MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XXXVIII. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1891.

Inhalt des achtunddreissigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Die partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente.

Von

Ed. Wiltheiss in Halle a./S.

Durch Herrn Klein wurde in der Sitzung am 1. Juni 1889 der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen eine vom Verf. ausgeführte Entwicklung derjenigen partiellen Differentialgleichungen der Abel'schen Thetafunctionen dreier Argumente vorgelegt, in welcher die Invarianteneigenschaft der Thetafunctionen vollkommen zur Geltung kommt. Diese Entwicklung, die dort nur in kurzen Zügen angegeben war, will ich im folgenden in ihrer Vollständigkeit mittheilen.

§ 1.

Die Normalintegrale erster und zweiter Gattung.

Die Curve vierter Ordnung, welche den Abel'schen Integralen vom Range III zu Grunde liegt, sei

$$f(x) = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}\, x_1^{\lambda} x_2^{\mu} x_3^{4-\lambda-\mu},$$

und werde symbolisch mit

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = \cdots$$

bezeichnet. Es sind dann die drei Normalintegrale erster Gattung bekanntlich gleich

$$\int x_1 \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3\, a_k}, \quad \int x_2 \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3\, a_k}, \quad \int x_3 \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3\, a_k}.$$

Indem ich dieselben mit den Variabeln U_1, bez. U_2, U_3, die zu x_1, bez. x_2, x_3 contragredient sind, multiplicire und addire:

$$(1) \qquad J(x, U) = \int U_x \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3\, a_k},$$

erhalte ich eine Zusammenfassung dieser Integrale, welche die In-

varianteneigenschaft besitzt, d. h. welche abgesehen von einer multiplicativ hinzutretenden Potenz der Substitutionsdeterminante ungeändert bleibt, wenn man für x_1, x_2, x_3 und k_1, k_2, k_3 durch lineare Substitution neue Variable einführt und zugleich mit U_1, U_2, U_3 und den Coefficienten von $f(x)$ die entsprechenden Aenderungen vornimmt.

Die drei Normalintegrale zweiter Gattung will ich von vornherein mit Hilfe der Variablen y_1, y_2, y_3 in der Weise in *ein* Integral zusammengezogen einführen, dass ihre Invarianteneigenschaft zum Ausdruck kommt. Dies kann auf verschiedene Weise geschehen, je nach den Functionen, die man zu dieser Darstellung benutzt. Setzt man nämlich

$$)2)\quad \gamma(x,y,z) = \gamma(y,x,z) = 2\,a_x^3 a_z b_y^3 b_z + 2\,a_x^2 a_y a_z b_x b_y^2 b_z - a_x^2 a_z^2 b_x b_y^3 - a_x a_y a_z^2 b_x^2 b_y^2 - a_y^2 a_z^2 b_x^3 b_y,$$

$$(3)\quad \Gamma(x,y) = (abc)^2 [a_x^2 b_x^2 c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x^2],$$

$$(4)\quad \Gamma_1(x,y) = \Gamma_1(y,x) = (abc)^2 [3\,a_x^2 b_x b_y c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x c_y],$$

wobei die Variablen z_1, z_2, z_3 vollkommen beliebig sind, die Variablen y_1, y_2, y_3 dagegen der Bedingung $f(y) = 0$ unterliegen, so kann man dies Integral in der folgenden Weise schreiben:

$$(5)\qquad J'(x,y) = \int \frac{\gamma(x,y,z)}{4(xyz)^2}\,\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \int \frac{\Gamma(x,y)}{8a_x^3 a_y}\,\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \int \frac{\Gamma_1(x,y)}{12 a_x^2 a_y^2}\,\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Die beiden ersten Formen des Integrals sind bekannt.*) Die dritte Form wird hier zum ersten Mal angeführt; sie hat mit der ersten die Eigenschaft gemein, in x_1, x_2, x_3 einerseits und y_1, y_2, y_3 andererseits symmetrisch zu sein, zeichnet sich aber vor derselben dadurch aus, dass sie die Variablen z_1, z_2, z_3 nicht enthält.

Die Gleichheit dieser drei Formen des Integrals beruht auf dem Umstand, dass

$$(6)\qquad \frac{\gamma(x,y,z)}{(xyz)^2} = \frac{\Gamma(x,y)}{2a_x^3 a_y} = \frac{\Gamma_1(x,y)}{3a_x^2 a_y^2}$$

ist, und diese Relation beweist man am leichtesten, indem man $\Gamma(x,y)$ und $\Gamma_1(x,y)$ mit $(xyz)^2$ multiplicirt und zur Umformung die Identität

$$(7)\quad (abc)(xyz) = a_x b_y c_z - a_x b_z c_y + a_y b_z c_x - a_y b_x c_z + a_z b_x c_y - a_z b_y c_x$$

benutzt. Man bekommt nämlich auf diese Weise

*) Die erste Form gab Herr Pick an (Math. Annalen Bd. 29, S. 259) an, die zweite verdankt man Herrn Klein (Math. Annalen Bd. 36, S. 20).

$$\Gamma(x,y)(xyz)^2 = 2a_x^3 a_y \gamma(x,y,z) + 2a_x^4 b_x^2 b_y^2 c_y^2 c_z^2 + 2a_x^4 b_x b_y^3 c_x c_y c_z^2 + 2a_x^4 b_y^4 c_x^2 c_z^2 - 4a_x^4 b_x^2 b_y b_z c_y^3 c_z - 2a_x^4 b_x b_y^2 b_z c_x c_y^2 c_z - 2a_y^4 b_x^3 b_z c_x^3 c_z,$$

$$\Gamma_1(x,y)(xyz)^2 = 3a_x^2 a_y^2 \gamma(x,y,z) + 3a_x^4 b_y^4 c_x c_y c_z^2 + 3a_x^4 b_x b_y^3 c_y^2 c_z^2 + 3a_y^4 b_x^3 b_y c_x^2 c_z^2 - 6a_x^4 b_x b_y^2 b_z c_y^3 c_z - 6a_y^4 b_x^2 b_y b_z c_x^3 c_z,$$

und, da $a_x^4 = f(x) = 0$ und $a_y^4 = f(y) = 0$, so folgt hieraus die Richtigkeit der obigen Gleichung (6). —

Da die erste Polare von $2\Gamma(x, y)$, die unter Einführung von y_1, y_2, y_3 an Stelle von x_1, x_2, x_3 gebildet wird, mit $\Gamma_1(x, y)$ identisch ist, so kann man dem letzten Theil dieser Gleichung (6), wenn man die symbolische Bezeichnung

$$\Gamma(x, y) = \mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_y^2$$

gebraucht, auch die Form

$$4a_x^3 a_y \mathsf{A}_x^3 \mathsf{A}_y \mathsf{B}_y^2 - 3a_x^2 a_y^2 \mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_y^2 = 0 \tag{8}$$

geben, in welcher diese Beziehung in der Folge benutzt werden wird.

§ 2.

Die Function Th.

Die Jacobi'schen Thetafunctionen $\vartheta(v_1, v_2, v_3)$, mit deren Hilfe die Umkehrung der Abel'schen Integrale ausgeführt wird, genügen den von Riemann aufgestellten Differentialgleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\alpha}} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha^2}, \\ 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\alpha\beta}} &= \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\alpha \partial v_\beta}, \end{aligned}$$

(wobei α und β die Werthe 1, 2, 3 annehmen können, und $\tau_{\alpha\beta}$ die einzigen Parameter sind, die in der Function ϑ vorkommen,) und sind in der Weise periodisch, dass

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \pm\, \vartheta(v_1 + 1, v_2, v_3) = \cdots,$$

und

$$\vartheta(v_1 + \tau_{1\alpha}, v_2 + \tau_{2\alpha}, v_3 + \tau_{3\alpha}) = \pm\, \vartheta(v_1, v_2, v_3) e^{-\left(v_\alpha + \frac{1}{2}\tau_{\alpha\alpha}\right) 2\pi i}.$$

Diese Thetafunctionen lassen sich nun so umformen, dass bei ihrer Reihenentwicklung nach Potenzen der Argumente die Glieder derselben Dimension Covarianten, freilich keine rationalen, von f sind*). Man erreicht dies, indem man an Stelle der Argumente v_1, v_2, v_3 durch die lineare Substitution

*) Vergl. den Aufsatz von Herrn Klein: Zur Theorie der Abel'schen Functionen, § 25 und 27 in den Math. Annalen Bd. 36.

(2) $$v_\alpha = c_{\alpha 1} u_1 + c_{\alpha 2} u_2 + c_{\alpha 3} u_3, \qquad \alpha = 1, 2, 3,$$

neue Variable u_1, u_2, u_3 einführt, und ausserdem die Thetafunction mit einer Constanten c und einem Exponentialfactor $e^{\eta(u_1, u_2, u_3)}$, der quadratisch in den Argumenten ist:

(3) $$\eta(u_1, u_2, u_3) = \sum_{\alpha\beta} \mathsf{H}_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta, \quad \mathsf{H}_{\alpha\beta} = \mathsf{H}_{\beta\alpha},$$

multiplicirt. Bei der so entstehenden Function, die ich mit $\mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)$ bezeichne:

(4) $$\mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3) = c e^{\eta(u_1, u_2, u_3)} \vartheta(v_1, v_2, v_3),$$

drückt sich die Periodeneigenschaft in der Weise aus, dass für sechs verschiedene Werthsysteme $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und η_1, η_2, η_3 die Gleichung

(5) $$\mathrm{Th}(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, u_3 + \omega_3) = \pm \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)\, e^{\sum\limits_\alpha \eta_\alpha \left(u_\alpha + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}$$

besteht. Insbesondere kann man es durch passende Bestimmung der Coefficienten $\mathsf{H}_{\alpha\beta}$ und $c_{\alpha\beta}$ dahin bringen, dass die Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ und $-\eta_1, -\eta_2, -\eta_3$ Periodensysteme der Normalintegrale erster und zweiter Gattung werden und zwar der Art, dass die Integration des Integrals (1) auf einem geschlossenen Wege

(6) $$\omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 + \omega_3 U_3$$

liefert, während man dadurch bei dem Integral (5)

(7) $$-\eta_1 y_1 - \eta_2 y_2 - \eta_3 y_3$$

bekommt*). Es enthalten alsdann die Coefficienten $c_{\alpha\beta}$ und $\mathsf{H}_{\alpha\beta}$ und der Factor c nur transcendente Parameter, indem die $c_{\alpha\beta}$ und c Aggregate der verschiedenen Periodensysteme $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sind, während sich in den $\mathsf{H}_{\alpha\beta}$ ausserdem noch die Periodensysteme η_1, η_2, η_3 vorfinden. Sie haben ausserdem für alle 64 Thetafunctionen denselben Werth. —

Wegen ihrer Invarianteneigenschaft genügen die Functionen Th den beiden Differentialgleichungen

(8) $$\begin{aligned} m\mathrm{Th} + u_1 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} &= \sum_{\lambda=1}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \lambda A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}}, \\ u_2 \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1} &= \sum_{\lambda=1}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \lambda A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_{\lambda-1,\mu+1,4-\lambda-\mu}}, \end{aligned}$$

und ausserdem noch den sieben weiteren Differentialgleichungen, welche durch die Vertauschung der Indices entstehen. Da aber die Form f fünfzehn Coefficienten hat und bezüglich jeder derselben eine Differentialgleichung bestehen muss, so existiren ausser jenen neun Gleichungen

*) Vergl. § 3 in der oben erwähnten Arbeit von Herrn Klein.

noch sechs andere Differentialgleichungen für die Function Th. Diese werden den sechs Riemann'schen Differentialgleichungen (1) entsprechen und sich aus denselben ableiten lassen. Dies ist nun die Aufgabe, die ich im folgenden zu lösen habe.

§ 3.

Die Form der Differentialgleichung für die Function Th.

Zuerst will ich die Form bestimmen, auf welche man die Differentialgleichung der Function Th mit Rücksicht auf ihre Invarianteneigenschaft bringen wird. Die Entwicklung ist im wesentlichen analog derjenigen, welche ich bei den hyperelliptischen Thetafunctionen gemacht habe, aber sie unterscheidet sich doch in einigen Punkten von derselben, und desshalb will ich sie noch einmal ganz durchführen.

Um aus den Riemann'schen Differentialgleichungen (1) in § 2 für die Function ϑ diejenigen für die Function Th abzuleiten, muss ich damit beginnen, die Beziehungen aufzustellen, die zwischen den partiellen Ableitungen beider Functionen bestehen. Zu dem Zwecke differentiire ich die Gleichung

$$(1)\qquad e^{-\eta}\,\mathrm{Th} = c\,\vartheta,$$

welche dieselben verbindet (vergl. (4) in § 2), zuerst zweimal partiell nach den Argumenten u_1, u_2, u_3, indem ich die Ausdrücke (2) und (3) in § 2 berücksichtige:

$$e^{-\eta}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha} - 2e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\sum_\gamma \mathsf{H}_{\alpha\gamma}u_\gamma = c\sum_\gamma c_{\gamma\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial v_\gamma}$$

und

$$(2)\qquad e^{-\eta}\frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\partial u_\beta} - 2e^{-\eta}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha}\sum_\gamma \mathsf{H}_{\beta\gamma}u_\gamma - 2e^{-\eta}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\beta}\sum_\gamma \mathsf{H}_{\alpha\gamma}u_\gamma$$
$$+ 4e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\sum_{\gamma\delta}\mathsf{H}_{\alpha\gamma}\mathsf{H}_{\beta\delta}u_\gamma u_\delta - 2e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\,\mathsf{H}_{\alpha\beta} = c\sum_{\gamma\delta}c_{\gamma\alpha}c_{\delta\beta}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\gamma\partial v_\beta}.$$

Die Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ haben hierin wie im folgenden die Werthe 1, 2, 3 anzunehmen. Das erste dieser Gleichungssysteme kann ich, da die Determinante $|c_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden sein muss, weil sonst zu Folge der Gleichungen (2) in § 2 die Argumente v_1, v_2, v_3 linear von einander abhängig wären, nach den $\frac{\partial\vartheta}{\partial v_\beta}$ auflösen:

$$(3)\qquad c\frac{\partial\vartheta}{\partial v_\beta} = \sum_\alpha c'_{\beta\alpha}\,e^{-\eta}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha} - 2e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\sum_{\alpha\gamma}c'_{\beta\alpha}\,\mathsf{H}_{\alpha\gamma}u_\gamma,$$

wo $c'_{\beta\alpha}$ die durch $|c_{\alpha\beta}|$ dividirten, adjungirten Subdeterminanten von $c_{\beta\alpha}$ bedeuten.

Sodann bezeichne ich, aber nur vorübergehend, sechs beliebige der Coefficienten der Form f mit $A_1, A_2, \ldots, A_6$ und differentiire partiell die Gleichung (1) nach einem dieser Coefficienten:

$$e^{-\eta}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\lambda} - e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial \mathrm{H}_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda}u_\alpha u_\beta = \frac{\partial c}{\partial A_\lambda}\,\vartheta + c\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\vartheta}{\partial v_\alpha}\,\frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda}u_\beta$$
$$+\, c\sum\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}}\,\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial A_\lambda},$$

wobei die letzte Summe bezüglich der sechs verschiedenen Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ ausgeführt werden soll. Da diese sechs Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ vollkommen beliebig sind, ist die Determinante

$$\left|\frac{\partial\tau_{11}}{\partial A_\lambda},\ \frac{\partial\tau_{22}}{\partial A_\lambda},\ \frac{\partial\tau_{33}}{\partial A_\lambda},\ \frac{\partial\tau_{12}}{\partial A_\lambda},\ \frac{\partial\tau_{13}}{\partial A_\lambda},\ \frac{\partial\tau_{23}}{\partial A_\lambda}\right|$$

nicht Null; man kann demnach aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für $\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}}$ bestimmen. Wenn man zugleich $\frac{\partial\vartheta}{\partial v_\alpha}$ mittels der Gleichung (3) und ϑ selbst mittels der Gleichung (1) eliminirt, so erhält man die folgende Darstellung:

$$(4)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}} = \sum_{\lambda=1}^{6} e^{-\eta}\,\mathfrak{A}_\lambda^{(\alpha\beta)}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\lambda} + e^{-\eta}\sum_{\gamma\delta}\mathfrak{k}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}u_\gamma\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\delta}$$
$$+\, e^{-\eta}\,\mathrm{Th}\sum_{\gamma\delta}\mathfrak{l}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}u_\gamma u_\delta + \mathfrak{C}_{\alpha\beta}e^{-\eta}\mathrm{Th}.$$

Da durch die Betrachtung in diesem Paragraphen nur die Form der Differentialgleichungen festgestellt werden soll, so kommt es auf die nähere Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}_\lambda^{(\alpha\beta)}$, $\mathfrak{k}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$, $\mathfrak{l}_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}$ und $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ nicht an.

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen (2) und (4) kann man nun aus den Riemann'schen Differentialgleichungen diejenigen für die Function Th herstellen. Ersetzt man nämlich in der ersteren gemäss der Riemann'schen Relationen (vergl. (1) in § 2) $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_\alpha^2}$ durch $4\pi i\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\alpha}}$, $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}$ durch $2\pi i\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}}$ und substituirt für $\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}}$ den aus der zweiten Gleichung sich dafür ergebenden Ausdruck, so resultirt eine Differentialgleichung für Th von der Form

$$\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\partial u_\beta} + \sum_{\lambda=1}^{6}\overline{A}_\lambda^{(\alpha\beta)}\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_\lambda} + \sum_{\gamma\delta}k_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}u_\gamma\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\delta} + \frac{1}{288}\,\mathrm{Th}\sum_{\gamma\delta}l_{\gamma\delta}^{(\alpha\beta)}u_\gamma u_\delta$$
$$+\, C'_{\alpha\beta}\,\mathrm{Th} = 0.$$

Dieselbe vereinfache ich noch dadurch, dass ich mittelst der Bedingungsgleichungen für die Invarianteneigenschaft der Function Th

(vergl. (8) in § 2) die Terme $u_\gamma \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_\delta}$ entferne. Es ändert sich dadurch nur das zweite und das letzte Glied der Gleichung, und zwar das zweite Glied insofern, als jetzt in demselben nach den sämmtlichen Coefficienten von f differentiirt wird. Ich erhalte auf diese Weise die endgültige Gestalt der Differentialgleichung:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \overline{A}^{(\alpha\beta)}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}} + \frac{1}{288}\mathrm{Th}\sum_{\gamma\delta} l^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta} u_\gamma u_\delta + C_{\alpha\beta}\mathrm{Th} = 0,$$

wobei α, β die sechs Werthsysteme

1, 1; 2, 2; 3, 3; 1, 2; 1, 3; 2, 3

annehmen kann.

Diese sechs Differentialgleichungen bestehen, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, gleichmässig für alle die vierundsechzig existirenden Functionen Th. Die transcendenten Parameter haben sich in derselben weggehoben, denn substituirt man für Th die Reihenentwicklung nach Potenzen der Argumente, so müssen die Gleichungen identisch erfüllt sein, und da die Glieder dieser Reihenentwicklung, wie schon oben in § 2 erwähnt, algebraische Functionen der Coefficienten von f sind, so folgt daraus, dass die $\overline{A}^{(\alpha\beta)}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}$, $l^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta}$ und $C_{\alpha\beta}$ dieselbe Eigenschaft haben und keine transcendenten Constanten enthalten. Zieht man jetzt noch weiter den Umstand mit in Betracht, dass die Differentialgleichungen für alle Functionen Th gelten, so muss man schliessen, dass die Grössen $\overline{A}^{(\alpha\beta)}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}$, $l^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta}$ und $C_{\alpha\beta}$ eindeutig, also rationale Functionen der Coefficienten von f sind. —

Um nun die Invarianteneigenschaft dieser Differentialgleichungen zum Ausdruck zu bringen, multiplicire ich (5) mit $w_\alpha w_\beta$, wo w_1, w_2, w_3 ein mit u_1, u_2, u_3 cogredientes Variablensystem sein soll, und summire über α und β, indem ich

$$\sum_{\alpha\beta} \overline{A}^{(\alpha\beta)}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} w_\alpha w_\beta = \overline{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu},$$

$$\sum_{\alpha\beta} l^{(\alpha\beta)}_{\gamma\delta} w_\alpha w_\beta = l_{\gamma\delta},$$

$$\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} w_\alpha w_\beta = C$$

setze:

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \overline{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}} + \frac{1}{288}\mathrm{Th}\sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta} u_\gamma u_\delta + C\,\mathrm{Th} = 0,$$

oder wenn ich

(6) $$\sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda}\overline{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}}=\delta,$$

(7) $$\sum_{\gamma\delta} l_{\gamma\delta}u_\gamma u_\delta = L$$

bezeichne:

(8) $$\delta\,\mathrm{Th}+\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}w_\alpha w_\beta+\frac{1}{288}L\,\mathrm{Th}+C\,\mathrm{Th}=0.$$

Hierin kann man ohne dadurch eine Beschränkung einzuführen,

(9) $$l_{\alpha\beta}=l_{\beta\alpha}$$

annehmen. — Da die Function Th die Invarianteneigenschaft hat und w_1, w_2, w_3 und u_1, u_2, u_3 cogrediente Variabeln sind, so besitzt

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\mathrm{Th}}{\partial u_\alpha\partial u_\beta}w_\alpha w_\beta$$

ebenfalls diese Eigenschaft, und dasselbe muss mithin bezüglich der übrigen Glieder der Gleichung der Fall sein; es müssen also L sowohl wie C, und wenn

$$\sum_{\lambda=0}^{4}\sum_{\mu=0}^{4-\lambda}\overline{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}x_1^{\lambda}x_2^{\mu}x_3^{4-\lambda-\mu}=\overline{f}$$

gesetzt wird, auch $\overline{f}$ eine Covariante sein, und demgemäss muss δ einen Aronhold'schen Process bedeuten.

§ 4.

Die Differentialgleichungen der Normalintegrale.

Die Bestimmung der Covarianten $\overline{f}$ und L will ich genau in derselben Weise, wie ich es bei den hyperelliptischen Functionen gethan habe, mit Hilfe der Periodicität der Thetafunctionen auf die Differentialgleichungen der Normalintegrale erster und zweiter Gattung zurückführen. Theils der Vollständigkeit halber, theils weil ich im Anschluss an die Arbeiten von Herrn Klein*) die Perioden der Normalintegrale, die ich auf einem und demselben Integrationswege erhalte, mit ω_1, ω_2, ω_3, bez. $-\eta_1$, $-\eta_2$, $-\eta_3$ bezeichne, werde ich diese Betrachtung wiederholen.

Die Gleichung (5) in § 2, welche die Periodicität der Function Th ausdrückt, kann ich in der Form

*) Es ist damit hauptsächlich der oben in § 2 angeführte Aufsatz gemeint.

$$\lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)$$
$$= \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3) + \sum_\alpha \eta_\alpha \left(u_\alpha + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right) + \varepsilon \pi i$$

schreiben, wo ε je nach der Thetafunction, die unter Th verstanden werden soll, und je nach dem Periodensystem, welches die ω_1, ω_2, ω_3 bedeuten, entweder den Werth 0 oder den Werth 1 hat. Durch partielle Differentiation nach den Argumenten folgt hieraus

$$\frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)}{\partial u_\alpha} = \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} + \eta_\alpha,$$

$$\frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = \frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}.$$

Sodann ergiebt sich bei der Ausführung der Operation δ, wenn man berücksichtigt, dass ω_1, ω_2, ω_3 ebenfalls von den Coefficienten von f abhängen und dass

$$\frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)}{\partial u_\alpha}$$
$$= \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} + \eta_\alpha$$

ist, die Gleichung

$$\delta \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3) = \delta \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)$$
$$+ \sum_\alpha \left(u_\alpha + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha\right)\delta\eta_\alpha - \sum_\alpha \left(\frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} + \tfrac{1}{2}\eta_\alpha\right)\delta\omega_\alpha.$$

Nun besteht die Differentialgleichung (8) in § 3 für alle Werthe der Variablen u_1, u_2, u_3. Man kann also $u_1+\omega_1$, $u_2+\omega_2$, $u_3+\omega_3$ an Stelle von u_1, u_2, u_3 setzen. Durch diese Substitution, und indem ich zugleich lg Th an Stelle von Th einführe, bekomme ich

$$\delta \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)$$
$$+ \sum_{\alpha\beta}\Bigg(\frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2, u_3+\omega_3)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2, u_3+\omega_3)}{\partial u_\alpha}$$
$$\cdot \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1+\omega_1, u_2+\omega_2, u_3+\omega_3)}{\partial u_\beta}\Bigg) w_\alpha w_\beta$$
$$+ \frac{1}{288}\sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}(u_\alpha+\omega_\alpha)(u_\beta+\omega_\beta) + C = 0,$$

oder wenn ich unter Benutzung der eben aufgestellten Gleichungen die partiellen Ableitungen von Th $(u_1+\omega_1,\ u_2+\omega_2,\ u_3+\omega_3)$ durch solche von $\mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)$ ersetze, und dabei beachte, dass $l_{\alpha\beta} = l_{\beta\alpha}$ (vergl. (9) in § 3) ist:

$$\left\{\delta \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3) + \sum_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} + \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} \right. \right.$$

$$\left.\left. \cdot \frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\beta} \right) w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta + C \right\}$$

$$+ \sum_\alpha \left(u_\alpha + \frac{1}{2} \omega_\alpha \right) \left\{ \delta \eta_\alpha + \frac{1}{144} \sum_\beta l_{\alpha\beta} \omega_\beta \right\}$$

$$- \sum_\alpha \left(\frac{\partial \lg \mathrm{Th}(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_\alpha} + \frac{1}{2} \eta_\alpha \right) \left\{ \delta \omega_\alpha - 2 w_\alpha \sum_\beta w_\beta \eta_\beta \right\} = 0.$$

Die erste Klammer ist wieder die ursprüngliche Gleichung und hat also den Werth Null; die übrigen Klammern müssen, da die u_1, u_2, u_3 und die $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_1}, \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_2}, \frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial u_3}$ linear unabhängig sind, einzeln ebenfalls Null sein. Dieser Umstand liefert die Differentialgleichungen der Perioden:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \delta \omega_\alpha &= 2 w_\alpha \sum_\beta \eta_\beta w_\beta, \\ \delta \eta_\alpha &= \frac{-1}{144} \sum_\beta \omega_\beta l_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Da aber wie schon oben in § 2 bemerkt, die Integration der Normalintegrale (1), bez. (5) in § 1 auf einem geschlossenen Integrationsweg gleichzeitig die Ausdrücke

$$\omega_1 U_1 + \omega_2 U_2 + \omega_3 U_3,$$

bez.

$$- \eta_1 y_1 - \eta_2 y_2 - \eta_3 y_3$$

ergeben, so bestehen nothwendig auch Differentialgleichungen dieser Integrale, welche den eben abgeleiteten Differentialgleichungen der Perioden entsprechen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \delta J(x, U) &= -2 U_w J'(x, w) + \Psi, \\ \delta J'(x, y) &= \frac{1}{144} \int L(x, y) \frac{(kx\,dx)}{a_x^3 a_k} + \Psi_1, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$(3) \qquad \sum_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = L(x, y)$$

bezeichnet ist und Ψ und Ψ_1 Functionen bedeuten, deren genauere Beschaffenheit erst im folgenden festgestellt werden wird.

Diese Gleichungen bilden den Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen über die Functionen $\bar{f}$ und L. Ehe ich aber direct darin fortfahren kann, muss ich erst feststellen, wie sich die Ausführung der Operation δ an Integralen mit homogenen ternären Variablen gestaltet.

§ 5.

Ausführung der Operation δ an Integralen mit homogenen ternären Variablen.

Die Operation δ besteht ihrer Definition nach darin, dass die Function g, an welcher die Operation ausgeführt werden soll, nach den in derselben vorkommenden Coefficienten $A_{\lambda,\mu,\nu}$ einer anderen Function f partiell differentiirt, die Ableitungen mit dem entsprechenden Coefficienten $\overline{A}_{\lambda,\mu,\nu}$ einer dritten Function $\overline{f}$, die mit f gleicher Dimension ist, multiplicirt, und dann die sämmtlichen erhaltenen Ausdrücke addirt werden. Wenn nun g noch die Variablen x_1, x_2, x_3 enthält, welche durch die Gleichung

$$f(x) = 0$$

von den Coefficienten $A_{\lambda,\mu,\nu}$ abhängig gemacht sind, so müssen beim Differentiiren nach diesen Coefficienten diese Grössen x_1, x_2, x_3 als variable betrachtet werden, denn wenn man sich die $A_{\lambda,\mu,\nu}$ ändern lässt, so ändern sich zu Folge der Gleichung $f(x) = 0$ auch die x_1, x_2, x_3. Demnach bekommt man beim Differentiiren nach $A_{\lambda,\mu,\nu}$ den Ausdruck

$$\frac{\partial g}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}},$$

und multiplicire ich denselben mit $\overline{A}_{\lambda,\mu,\nu}$ und summire über die verschiedenen Indicessysteme, so gelange ich zu einer Darstellung, welche ich gemäss der eben angeführten Definition der Operation δ als das Resultat dieser Operation ansehen muss:

$$(1\text{a}) \qquad \delta g = \sum \overline{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial g}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} \sum \overline{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}},$$

oder wenn ich

$$\sum \overline{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial g}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} = \overline{g},$$

$$\sum \overline{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial x_i}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} = \delta x_i$$

bezeichne:

$$(1\text{b}) \qquad \delta g = \overline{g} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i} \delta x_i.$$

Die Operation δ ist demnach in diesem Fall, wo g auch eine Function der Variablen x_1, x_2, x_3 ist, die durch die Gleichung $f(x) = 0$ verbunden sind, kein unmittelbarer Aronhold'scher Process mehr, sondern besteht aus einem gewöhnlichen Aronhold'schen Process, — welcher

g in $\bar{g}$ überführt, — und einer partiellen Differentiation nach den Variablen x_1, x_2, x_3.

Die Grössen δx_1, δx_2, δx_3 sind übrigens nicht ganz beliebig, sondern durch eine lineare Gleichung verbunden. Denn, da $f(x) = 0$, muss auch

$$\delta f(x) = 0$$

sein, und da ich für $\delta f(x)$ gemäss der Formel (1b), wenn ich berücksichtige, dass $\sum \bar{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial f}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} = \bar{f}$ ist, den Ausdruck $\bar{f} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i$ finde, so besteht also die Gleichung

$$\bar{f} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0. \tag{2}$$

Zu Folge derselben sind zwei der Grössen δx_1, δx_2, δx_3 beliebig, die dritte aber alsdann dadurch bestimmt. —

Diese Formel (1) muss ich speciell auch benutzen, wenn ich die Operation δ an einem Integrale $\int \varphi\,(kx\,dx)$ ausführen will. Nach derselben erhalte ich, wenn

$$\sum \bar{A}_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}} = \bar{\varphi} \tag{3}$$

gesetzt wird:

$$\delta \int \varphi(kx\,dx) = \int \left\{ \left(\bar{\varphi} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i\right)(kx\,dx) + \varphi(k\,\delta x\,dx) \right.$$
$$\left. + \varphi\,(kx\,d\delta x)\right\}.$$

Hierin kann ich durch Integration die Grössen δx_1, δx_2, δx_3 unter dem Integralzeichen entfernen. Um die dazu nothwendigen Umformungen zu machen, gehe ich von der bekannten Identität

$$(kx\,dx)\alpha_{\delta x} - (kx\,\delta x)\,\alpha_{dx} + (k\,dx\,\delta x)\,\alpha_x - (x\,dx\,\delta x)\,\alpha_k = 0$$

aus, in der $\alpha_{\delta x} = \alpha_1 \delta x_1 + \alpha_2 \delta x_2 + \alpha_3 \delta x_3$, u. s. w. ist, und substituire in derselben für α_1, α_2, α_3 die Ableitungen von φ, bez. von f nach den x_1, x_2, x_3. Dadurch ergeben sich, wenn ich beachte, dass f von der Dimension -2 sein muss, weil sonst bekanntlich das Integral keinen Sinn hätte, und wenn ich mit D_k die Polarenbildung unter Einführung der Variablen k_1, k_2, k_3 bezeichne, die beiden Beziehungen

$$(kx\,dx) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i - (kx\,\delta x)\,d\varphi - (k\,dx\,\delta x) 2\varphi + (x\,dx\,\delta x) 2 D_k \varphi = 0,$$

$$(kx\,dx) \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i - (kx\,\delta x)\,df + (k\,dx\,\delta x)\, 4f - (x\,dx\,\delta x) 4 D_k f = 0,$$

von denen sich die letztere, da $f=0$, $df=0$ und nach (2)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\delta x_i = -\overline{f}$$

ist, in

$$(k\,x\,dx)\overline{f} + (x\,dx\,\delta x)\,4D_k f = 0$$

vereinfacht. Aus denselben eliminire ich $(x\,dx\,\delta x)$ und setze den Ausdruck von $(k\,x\,dx)\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\delta x_i$, den ich dadurch erhalte:

$$(k\,x\,dx)\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\delta x_i = \frac{1}{2}\,(k\,x\,dx)\,\overline{f}\,\frac{D_k\varphi}{D_k f} + (k\,x\,\delta x)\,d\varphi + (k\,dx\,\delta x)\,2\,\varphi,$$

in obiges Integral ein:

$$\delta\int\varphi(k\,x\,dx) = \int\Big\{\Big(\overline{\varphi} + \frac{1}{2}\overline{f}\,\frac{D_k\varphi}{D_k f}\Big)(k\,x\,dx) + \Big((k\,x\,\delta x)\,d\varphi$$

$$+ (k\,dx\,\delta x)\varphi + (k\,x\,d\delta x)\varphi\Big)\Big\}.$$

Die zweite Klammer hierin ist aber das Differential von $(k\,x\,\delta x)\varphi$ und lässt sich also unmittelbar integriren. Man bekommt dadurch die *definitive Formel:*

$$(4)\qquad \delta\int\varphi(k\,x\,dx) = (k\,x\,\delta x)\,\varphi + \int\Big(\overline{\varphi} + \frac{1}{2}\overline{f}\,\frac{D_k\varphi}{D_k f}\Big)(k\,x\,dx),$$

welche anzeigt, wie man die Operation δ an Integralen mit homogenen ternären Variablen auszuführen hat.

Diese Formel will ich insofern noch ein wenig weiter bilden, als ich $\psi : D_k f$ für φ setze:

$$(5)\qquad \varphi = \frac{\psi}{D_k f} = \frac{\psi}{a_x^3 a_k},$$

da ja bekanntlich φ diese Form haben muss, sobald das Integral von k_1, k_2, k_3 unabhängig sein soll. Es ist dann zu Folge der Bedeutung von $\overline{\varphi}$ (vesgl. (3)), wenn ich dabei die symbolische Bezeichnung

$$\overline{f} = \overline{a}_x^4$$

gebrauche:

$$\overline{\varphi} = \frac{\overline{\psi}}{a_x^3 a_k} - \frac{\psi\,\overline{a}_x^3\,\overline{a}_k}{(a_x^3 a_k)^2},$$

(wo wiederum

$$\overline{\psi} = \sum \overline{A}_{\lambda,\mu,\nu}\,\frac{\partial\psi}{\partial A_{\lambda,\mu,\nu}}$$

ist,) und ferner, (da, wie aus (5) hervorgeht, ψ von der ersten Dimension ist):

$$-2D_k\varphi = \frac{D_k\psi}{a_x^3 a_k} - \frac{3\psi a_x^2 a_k^2}{(a_x^3 a_k)^2},$$

so dass die Gleichung (4) die Form

$$(6)\quad \delta\int\psi\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k}\psi + \int\Big\{\Big[\overline{\psi} - \tfrac{1}{4}D_k\psi\frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_k}\Big] - \frac{1}{4}\frac{\psi}{(a_x^3 a_k)^2}\big[4a_x^3 a_k \bar{a}_x^3 \bar{a}_k - 3a_x^2 a_k^2 \bar{a}_x^4\big]\Big\}\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}$$

annimmt.

§ 6.

Die Bestimmung der Function $\bar{f}$.

Führe ich nun die Operation δ an den Normalintegralen erster Gattung aus, so erhalte ich gemäss der eben aufgestellten Formel

$$\delta J(x, U) = \delta\int U_x\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k}U_x - \frac{1}{4}\int\Big\{U_k\frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_k} + \frac{U_x}{(a_x^3 a_k)^2}\big[4a_x^3 a_k \bar{a}_x^3 \bar{a}_k - 3a_x^2 a_k^2 \bar{a}_x^4\big]\Big\}\frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k}.$$

Da das Differential $\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}$, und mithin auch die ganze linke Seite, von k_1, k_2, k_3 unabhängig ist, kann sich die Bedeutung der Gleichung durch Specialisirung dieser Grössen nicht ändern. Ich werde daher, damit nicht zwei verschiedene Reihen von Variablen in dem zu integrirenden Ausdruck vorkommen, k_1, k_2, k_3 gleich w_1, w_2, w_3 werden lassen, dann aber der Gleichförmigkeit halber für $\frac{(w\,x\,dx)}{a_x^3 a_w}$ den davon nur in der Bezeichnung verschiedenen Ausdruck $\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}$ schreiben:

$$\delta J(x, U) = \frac{(w\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_w}U_x - \frac{1}{4}\int\Big\{U_w\frac{\bar{a}_x^4}{a_x^3 a_w} + \frac{U_x}{(a_x^3 a_w)^2}\big[4a_x^3 a_w \bar{a}_x^3 \bar{a}_w - 3a_x^2 a_w^2 \bar{a}_x^4\big]\Big\}\frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Aber durch anderweitige Betrachtung haben wir oben in § 4 (vergl. (2)) gefunden:

$$\delta J(x, U) = -2U_w J'(x, w) + \Psi.$$

Die Vergleichung dieser beiden Relationen liefert nun unmittelbar

die Functionen Φ und $\bar{f}$. Denn zu Folge der in § 1 aufgestellten Gleichung (8):

$$4\,a_x^3 a_y \mathsf{A}_x^3 \mathsf{A}_y \mathsf{B}_y^2 - 3\,a_x^2 a_y^2 \mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_y^2 = 0,$$

und da

$$\int \frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2}{8 a_x^3 a_w} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \int \frac{\Gamma(x, w)}{8 a_x^3 a_w} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}$$

eine Form des Integrals $J'(x, w)$ ist, geht eine derselben in die andere über, wenn man $\frac{(w\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_w} U_x$ für Φ und $\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2$ für $\bar{a}_x^4 = \bar{f}$ annimmt.

Dadurch ist jetzt $\bar{f}$ bestimmt: es ist

$$\bar{f} = \Gamma(x, w) = (a\,b\,c)^2 \left[a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2\right]. -$$

Dass $\bar{f}$ gleich diesem Ausdruck sein muss, hätte ich auch in derselben Weise feststellen können, wie ich es im 33. Bd. (Seite 279 u. f.) der Math. Annalen bei den hyperelliptischen Functionen gethan habe. Man kommt in derselben Weise wie dort zu dem Schlusse, dass die Operation δ an der Discriminante von f ausgeführt, entweder Null geben, oder dieselbe reproduciren muss. Die Differentialausdrücke aber, die diese Eigenschaft haben, sind, wenn dies auch nicht ausdrücklich hervorgehoben wurde, durch *die Form* der Discriminante von f, wie sie Herr Gordan mitgetheilt hat*), vollständig gegeben. Dieselbe ist nämlich dort so dargestellt, dass sie zugleich die Determinante ist, welche als Nenner auftritt, wenn man die Gleichungen (8) in § 2 und (5) in § 3 nach den $\frac{\partial \mathrm{Th}}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}}$ auflöst.

§ 7.

Bestimmung der Function L.

In § 4 sind wir zu der Gleichung

$$(1) \qquad \delta J'(x, y) = \frac{1}{144} \int L(x, y) \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} + \Psi_1$$

gelangt und aus derselben erhält man den Ausdruck von $L(x, y)$, indem man die Operation δ thatsächlich ausführt und Ψ_1 so bestimmt, dass $L(x, y)$ eine ganze Function wird. Dabei muss noch *ein* Punkt besonders berücksichtigt werden: Wie aus der Entwicklung dieser Gleichung hervorgeht, bezieht sich die Operation δ nur auf die Coefficienten von y_1, y_2, y_3 in diesem Integral. Es dürfen dementsprechend die Variablen y_1, y_2, y_3 während der Ausführung der Operation δ nicht

*) Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu München, Sitzung am 3. December 1887.

der Bedingung $f(y) = 0$ unterliegen, sondern müssen dabei ganz beliebig sein, (denn sonst müssten nach der Betrachtung am Anfange des Paragraphen 5 auch diese Grössen bei der Operation δ berücksichtigt werden,) und erst, wenn dieselbe beendet ist, darf man sie auf solche Werthe beschränken, für welche $f(y) = 0$ ist. Freilich ist dann während der Operation das betreffende Integral kein Normalintegral zweiter Gattung.

Demgemäss wende ich also unter der Voraussetzung, dass $f(y)$ nicht Null ist, die Formel (6) in § 5 auf das Integral

$$\int \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xyz)^2} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}$$

an, welches für $f(y) = 0$ die zu der weiteren Rechnung geeignetste Form des Integrals $J'(x, y)$ zu sein scheint, und bekomme

$$\delta \int \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xyz)^2} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k} = \frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k} \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xyz)^2} + \frac{1}{4} \int \left\{ \frac{\bar{\gamma}(x, y, z)}{(xyz)^2} \right.$$
$$- \frac{3}{4} \frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2 D_k\, \gamma(x, y, z)}{(xyz)^2 a_x^3 a_k} + \frac{1}{2} \frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2\, \gamma(x, y, z)\,(kyz)}{(xyz)^3 a_x^3 a_k}$$
$$\left. - \frac{1}{4} \frac{\gamma(x, y, z)}{(x\,y\,z)^2 (a_x^3 a_k)^2} \left[4 a_x^3 a_k \mathsf{A}_x^3 \mathsf{A}_k \mathsf{B}_w^2 - 3 a_x^2 a_k^2 \mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2\right] \right\} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k},$$

wo

$$\bar{\gamma}(x, y, z) = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu} \frac{\partial \gamma(x, y, z)}{\partial A_{\lambda, \mu, 4-\lambda-\mu}} \tag{2}$$

bedeutet und $\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2$ die schon öfters gebrauchte symbolische Bezeichnung für $\Gamma(x, w) = \bar{f}$ ist. Alsdann gebe ich den y_1, y_2, y_3 solche Werthe, für welche $f(y) = 0$, so dass dadurch die rechte Seite der Ausdruck von $\delta\, J'(x, y)$ wird, und substituire denselben in die obige Gleichung (1), indem ich zu gleicher Zeit

$$\Psi_1 - \frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k} \frac{\gamma(x, y, z)}{4(xyz)^2} = \Phi$$

setze:

$$\int L(x, y) \frac{(k\,x\,\delta x)}{a_x^3 a_k} = -144\Phi + 9 \int \left\{ 4 \frac{\bar{\gamma}(x, y, z)}{(xyz)^2} \right.$$
$$- 3 \frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2 D_k \gamma(x, y, z)}{(xyz)^2 a_x^3 a_k} + 2 \frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2 \gamma(x, y, z)\,(kyz)}{(xyz)^3 a_x^3 a_k}$$
$$\left. - \frac{\gamma(x, y, z)}{(xyz)^2 (a_x^3 a_k)^2} \left[4 a_x^3 a_k \mathsf{A}_x^3 \mathsf{A}_k \mathsf{B}_w^2 - 3 a_x^2 a_k^2 \mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2\right] \right\} \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k}.$$

Indem ich jetzt diese Gleichung differentiire, erhalte ich die Darstellung von $L(x, y)$ selbst:

$$L(x,y) = 9\left\{4\frac{\overline{\gamma}(x,y,z)}{(xyz)^2} - 3\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2 D_k\gamma(x,y,z)}{(xyz)^2 a_x^3 a_k} + 2\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2\gamma(x,y,z)(kyz)}{(xyz)^3 a_x^3 a_k}\right.$$
$$- \frac{\gamma(x,y,z)}{(xyz)^2(a_x^3a_k)^2}\left[4a_x^3a_k\mathsf{A}_x^3\mathsf{A}_k\mathsf{B}_w^2 - 3a_x^2a_k^2\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2\right]$$
$$\left. - 16\frac{a_x^3 a_k}{(k\,x\,dx)}\,d\Phi\right\}.$$

Da in $L(x,y)$ die Variablen k_1, k_2, k_3 und z_1, z_2, z_3 nicht vorkommen, muss auch die rechte Seite von diesen Grössen unabhängig sein, und folglich kann man, ohne damit eine Beschränkung einzuführen, dieselben mit w_1, w_2, w_3 zusammenfallen lassen. Wenn man ausserdem diese w_1, w_2, w_3 noch der Bedingung $f(w) = 0$ unterwirft und die Gleichung (8) in § 1 berücksichtigt, so vereinfacht sich dieser Ausdruck in

$$(3)\quad L(x,y) = 9\left\{4\frac{\overline{\gamma}(x,y,w)}{(xyw)^2} - 3\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2 D_w\gamma(x,y,w)}{(xyw)^2a_x^3a_w} - 16\frac{a_x^3a_w}{(w\,x\,dx)}\,d\Phi\right\}.$$

Auf der rechten Seite kommt noch der Term $\frac{a_x^3 a_w}{(w\,x\,dx)}\,d\Phi$ vor, und es ist nun zuerst nothwendig, denselben auf die Form einer gewöhnlichen Covariante zu bringen. Aus dem Umstande, dass $L(x,y)$ sowohl wie $\frac{a_x^3 a_w}{(w\,x\,dx)}$ von der Dimension 1 bezüglich x_1, x_2, x_3 ist, folgt, dass Φ hierin von der Dimension 0, also der Quotient zweier Functionen gleich hoher Dimension, $g = g_x^\lambda$ und $h = h_x^\lambda$, sein muss:

$$\Phi = \frac{g_x^\lambda}{h_x^\lambda}.$$

Demnach ist

$$d\Phi = \left(h_x^\lambda.\lambda g_x^{\lambda-1}\sum_\alpha g_\alpha dx_\alpha - g_x^\lambda.\lambda h_x^{\lambda-1}\sum_\alpha h_\alpha\,dx_\alpha\right) : (h_x^\lambda)^2,$$

oder da

$$g_x^\lambda = g_x^{\lambda-1}\sum_\alpha g_\alpha x_\alpha$$

und

$$h_x^\lambda = h_x^{\lambda-1}\sum_\alpha h_\alpha x_\alpha$$

ist:

$$d\Phi = \lambda\frac{g_x^{\lambda-1}h_x^{\lambda-1}}{(h_x^\lambda)^2}\{(h_1g_2 - h_2g_1)(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$
$$+ (h_2g_3 - h_3g_2)(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2)$$
$$+ (h_3g_1 - h_1g_3)(x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3)\}.$$

Hieraus eliminirt man die Differentialausdrücke mittels der Relationen

$$\frac{x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2}{a_x^3 a_1} = \frac{x_3\,dx_1 - x_1\,dx_3}{a_x^3 a_2} = \frac{x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1}{a_x^3 a_3} = \frac{(k\,x\,dx)}{a_x^3 a_k},$$

welche sich aus

$$a_x^4 = a_x^3 \sum_\alpha a_\alpha x_\alpha = 0$$

und

$$d\,a_x^4 = 4x_x^3 \sum_\alpha a_\alpha\,dx_\alpha = 0$$

ableiten lassen und bekanntlich gebraucht werden, um ein gewöhnliches Integral in ein solches mit homogenem ternären Differential überzuführen. Nimmt man zugleich für die beliebigen Grössen k_1, k_2, k_3 die Werthe w_1, w_2, w_3, so resultirt

$$d\Phi = \lambda \frac{(a h g)\, a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1}}{(h_x^\lambda)^2} \cdot \frac{(w\,x\,dx)}{a_x^3 a_w}.$$

In Folge davon verwandelt sich die rechte Seite von (3) in einen Ausdruck, der nur noch aus Covarianten besteht:

$$(4)\quad L(x,y) = 9\left\{4\,\frac{\overline{\gamma}(x,y,w)}{(x y w)^2} - 3\,\frac{\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_w^2 D_w\, \gamma(x,y,w)}{(x y w)^2 a_x^3 a_w} - 16\lambda \frac{(a h g) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1}}{(h_x^\lambda)^2}\right\}.$$

Für die Functionen g_x^λ und h_x^λ müssen, wie dies aus den Bemerkungen am Anfange des Paragraphen, die bezüglich Ψ_1 gemacht wurden, hervorgeht, solche Aggregate genommen werden, dass $L(x,y)$ eine ganze Function wird. Dieser Forderung genügt man, wie die weitere Rechnung zeigt, wenn man

$$g_x^\lambda = \frac{3}{4}\, a_x a_y a_w^2 \frac{\mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2}{a_y a_w^3} - \frac{1}{2}\, \mathsf{A}_x \mathsf{A}_w^3 \mathsf{B}_y^2,$$

$$h_x^\lambda = (x y w),$$

(wo also $\lambda = 1$ ist,) annimmt. Alsdann ist

$$\lambda (a h g) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1} = \frac{3}{4}\left(a_y^2 a_w^2 b_x^3 b_w - a_y a_w^3 b_x^3 b_y\right) \frac{\mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2}{a_y a_w^3}$$
$$- \frac{1}{2}\left(a_x^3 a_w \mathsf{A}_y \mathsf{A}_w^3 \mathsf{B}_y^2 - a_x^3 a_y \mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2\right),$$

oder wenn man die Beziehung

$$4 a_y a_w^3 \mathsf{A}_w^3 \mathsf{A}_y \mathsf{B}_y^2 - 3 a_y^2 a_w^2 \mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2 = 0,$$

(vergl. (8) in § 1,) zur Vereinfachung benutzt:

$$\lambda (a h g) a_x^3 g_x^{\lambda-1} h_x^{\lambda-1} = \frac{1}{2}\, a_x^3 a_w \mathsf{A}_y \mathsf{A}_w^3 \mathsf{B}_y^2 - \frac{1}{4}\, a_x^3 a_y \mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2.$$

Setzt man jetzt dies in die Gleichung (4) ein, so geht dieselbe über in

$$(5)\quad L(x,y) = 9\left\{4\bar\gamma(x,y,w)+[4a_x^3a_y\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_y^2 - 8a_x^3a_w\mathsf{A}_y\mathsf{A}_w^3\mathsf{B}_y^2] - 3\,\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2 D_w\gamma(x,y,w)}{a_x^3a_w}\right\}:(xyw)^2.$$

Ehe ich aber hierin auf der rechten Seite die Nenner durch Division entferne, will ich noch eine solche Umformung mit derselben vornehmen, dass die Variablen x_1, x_2, x_3 einerseits und y_1, y_2, y_3 andererseits symmetrisch auftreten. Dazu gebrauche ich die Identität

$$3D_w\,\gamma(x,y,w) = \gamma(w,y,x) + 6a_x^2a_w^2b_y^3b_w - 4a_xa_w^3b_xb_y^3,$$

deren Richtigkeit man einfach dadurch nachweist, dass man die Polare $D_w\,\gamma(x,y,w)$ thatsächlich bildet. Da nun nach (2), (6) und (8) in § 1

$$\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2}{a_x^3a_w} = 2\,\frac{\gamma(w,x,y)}{(xyw)^2} = \frac{\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_x^2}{a_xa_w^3},$$

$$3\,\frac{\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_x^2}{a_xa_w^3} = 4\,\frac{\mathsf{A}_w^3\mathsf{A}_x\mathsf{B}_x^2}{a_x^2a_w^2}$$

ist, so folgt aus dieser

$$3\,\frac{\mathsf{A}_x^4\mathsf{B}_w^2}{a_x^3a_w}\,D_w\,\gamma(x,y,w) = 2\,\frac{\gamma(w,x,y)\,\gamma(w,y,x)}{(xyw)^2} - 4a_xa_y^3\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_x^2 + 8a_y^3a_w\mathsf{A}_w^3\mathsf{A}_x\mathsf{B}_x^2.$$

Dementsprechend nimmt die Darstellung der Function $L(x,y)$ die Form

$$L(x,y) = 9\left\{4\bar\gamma(x,y,w) + 4[a_x^3a_y\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_y^2 + a_xa_y^3\mathsf{A}_w^4\mathsf{B}_x^2] - 8[a_x^3a_w\mathsf{A}_w^3\mathsf{A}_y\mathsf{B}_y^2 + a_y^3a_w\mathsf{A}_w^3\mathsf{A}_x\mathsf{B}_x^2] - 2\,\frac{\gamma(w,x,y)\,\gamma(w,y,x)}{(xyw)^2}\right\}:(xyw)^2$$

an.

§ 8.

Fortsetzung.

Um nun den gefundenen Ausdruck für $L(x,y)$ in eine ganze Function zu verwandeln, verfahre ich auf eine höchst elementare Weise, indem ich von der Identität

$$1)\quad (abc)^2(xyw)^2 = (a_xb_yc_w - a_xb_wc_y + a_yb_wc_x - a_yb_xc_w + a_wb_xc_y - a_wb_yc_x)^2$$
$$= a_x^2b_y^2c_w^2 - 2a_x^2b_yb_wc_yc_w + 2a_xa_yb_yb_wc_xc_w - \cdots$$

Gebrauch mache. Bei der Bezeichnung

$$\begin{aligned}C(x,y) = (abc)^2 \Big\{ & e_x^3 e_w (a_y a_w b_y b_w c_y c_w - a_y^2 b_y b_w c_w^2) \\ & + e_x^2 e_y^2 (a_x a_y b_w^2 c_w^2 - 5 a_x a_w b_y b_w c_w^2) \\ & + e_x^2 e_y e_w (6 a_x a_y b_y b_w c_w^2 + 3 a_x a_w b_y b_w c_y c_w + 7 a_x a_w b_y^2 c_w^2) \\ & - e_x^2 e_w^2 (4 a_x a_y b_y^2 b_w^2 + 4 a_x a_y b_y b_w c_y c_w) \\ & - e_x e_y e_w^2 (2 a_x a_y b_x b_y c_w^2 + 2 a_x a_w b_x b_w c_y^2) \\ & + e_x e_w^3 (a_x a_y b_x b_y c_y c_w - a_x^2 b_y^2 c_y c_w) \Big\}\end{aligned}$$

erhalte ich durch einfache Ausmultiplication, indem ich auf der rechten Seite die eben angeführte Identität (1) zu Hilfe nehme,

$$2\gamma(w, x, y)\, \gamma(w, y, x) = \{C(x, y) + C(y, x)\}\, (xyz)^2,$$

so dass

$$\begin{aligned}L(x, y) = 9 \Big\{ & 4\bar{\gamma}(x, y, w) + 4\left[a_x^3 a_y \mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_y^2 + a_x a_y^3 \mathsf{A}_w^4 \mathsf{B}_x^2\right] \\ & - 8\left[a_x^3 a_w \mathsf{A}_w^3 \mathsf{A}_y \mathsf{B}_y^2 + a_y^3 a_w \mathsf{A}_w^3 \mathsf{A}_x \mathsf{B}_x^2\right] \\ & - C(x, y) - C(y, x) \Big\} : (xyw)^2.\end{aligned}$$

Hierin substituire ich für $\bar{\gamma}(x, y, w)$ den Ausdruck, den ich nach (2) in § 7 dafür bekomme, d. i.

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(x,y,w) = & \sum_{\lambda=1}^{2} 2\left(a_x^{1+\lambda} a_y^{2-\lambda} a_w \mathsf{A}_x^{2-\lambda} \mathsf{A}_y^{1+\lambda} \mathsf{A}_w \mathsf{B}_w^2 + a_x^{2-\lambda} a_y^{1+\lambda} a_w \mathsf{A}_x^{1+\lambda} \mathsf{A}_y^{2-\lambda} \mathsf{A}_w \mathsf{B}_w^2\right) \\ & - \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_x^{1+\lambda} a_y^{1-\lambda} a_w^2 \mathsf{A}_x^{2-\lambda} \mathsf{A}_y^{2+\lambda} \mathsf{B}_w^2 + a_x^{2-\lambda} a_y^{2+\lambda} \mathsf{A}_x^{1+\lambda} \mathsf{A}_y^{1-\lambda} \mathsf{A}_w^2 \mathsf{B}_w^2\right),\end{aligned}$$

und ersetze hierauf die Polaren von $\mathsf{A}_x^4 \mathsf{B}_y^2$, die alsdann in der Gleichung für $L(x, y)$ vorhanden sind, durch die betreffenden Aggregate, die sich für dieselben aus $(abc)^2\left[a_x^2 b_x^2 c_y^2 + a_x a_y b_x b_y c_x^2\right]$ ergeben. Dadurch gelange ich zu einem Werthe von $L(x, y)$, den ich in der folgenden Form

$$L(x, y) = 9\big(C_1(x, y) + C_1(y, x)\big) - 5 C_2(x, y)$$

schreiben kann, wenn

$$\begin{aligned}C_1(x,y) = (abc)^2 \Big\{ & e_x^3 e_y (2 a_y^2 b_w^2 c_w^2 - 2 a_y a_w b_y b_w c_w^2) \\ & + e_x^3 e_w (a_y^2 b_y b_w c_w^2 - a_y a_w b_y b_w c_y c_w) \\ & + e_x^2 e_y^2 (2 a_x a_w b_y b_w c_w^2 - 2 a_x a_y b_w^2 c_w^2) \\ & + c_x^2 e_y e_w (2 a_x a_y b_y b_w c_w^2 + a_x a_w b_y b_w c_y c_w - 3 a_x a_w b_y^2 c_w^2) \\ & + e_x^2 e_w^2 (2 a_x a_y b_y b_w c_y c_w - 2 a_x a_w b_y b_w c_y^2) \\ & + e_x e_y e_w^2 (a_x^2 b_y^2 c_w^2 - 2 a_x^2 b_y b_w c_y c_w - a_x a_y b_x b_y c_w^2 + 2 a_x a_y b_x b_w c_y c_w) \\ & + e_x e_w^3 (a_x^2 b_y^2 c_y c_w - a_x a_y b_x b_y c_y c_w) \Big\},\end{aligned}$$

$$C_2(x,y) = 6(abc)^2\left\{a_x^2 b_y^2 c_w^2 - a_x^2 b_y b_w c_y c_w - a_y^2 b_x b_w c_x c_w - a_x a_y b_x b_y c_w^2 + 2 a_x a_y b_x b_w c_y c_w\right\} e_x e_y e_w^2$$

bedeutet. Zur weiteren Reduction habe ich wieder die Identität (1) selbst und diejenige Identität, die daraus durch Vertauschung von e mit c entsteht, nothwendig. Auf Grund derselben finde ich

$$C_1(x,y) + C_1(y,x) = (abc)^2(abe)^2\left[\frac{1}{2}c_x c_w e_y e_w + \frac{1}{2}c_y c_w e_x e_w + e_x e_y c_w^2\right],$$

$$C_2(x,y) = (abc)^4 e_x e_y e_w^2.$$

Demnach ist

$$(2) \quad L(x,y) = 9(abc)^2(abe)^2\left[c_x c_w e_y e_w + c_x c_y e_w^2\right] - 5(abc)^4 e_x e_y e_w^2,$$

und mithin speciell, da $L = L(u,u)$ ist:

$$(3) \quad L = 9(abc)^2(abe)^2\left[c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2\right] - 5(abc)^4 e_u^2 e_w^2. -$$

Diese beiden Gleichungen gelten ihrer Herleitung nach nur für solche Werthe von w_1, w_2, w_3, für welche $f(w) = 0$ ist. Da dieselben aber von der Dimension 2 sind, die Bedingungsgleichung dagegen die Dimension 4 hat, so ist diese Beschränkung hinfällig und die Gleichungen gelten für alle Werthe von w_1, w_2, w_3.

§ 9.

Bestimmung von C.

Zu dem Ausdrucke von C gelangt man wohl am einfachsten durch folgende Betrachtung. Setzt man in die Differentialgleichung (8) in § 3 $ce^{\eta}\vartheta$ für Th und eliminirt mittels der Riemann'schen Relationen (1) in § 2 die Glieder $\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau_{\alpha\beta}}$, so werden in derselben nur die Function ϑ selbst und ihre ersten und zweiten Ableitungen nach den Argumenten zurückbleiben. Da zwischen diesen, wie man auch unmittelbar mit Hilfe der Periodicität der Function ϑ nachweisen kann, keine linearen Gleichungen bestehen können, so müssen die Coefficienten derselben einzeln verschwinden. Insbesondere muss dies auch mit demjenigen von ϑ der Fall sein; dieser ist aber, wie man sich leicht überzeugt, [vergl. die Entwicklung in § 3,] gleich

$$C + \delta c + 2\sum_{\alpha\beta} \mathsf{H}_{\alpha\beta}\, w_\alpha\, w_\beta.$$

Folglich ist

$$C = -\delta c - 2\sum_{\alpha\beta} \mathsf{H}_{\alpha\beta}\, w_\alpha\, w_\beta.$$

Dies Aggregat enthält nur transcendente Parameter, denn die $H_{\alpha\beta}$ haben schon an und für sich diese Beschaffenheit, und da c nur aus Periodensystemen ω_1, ω_2, ω_3 gebildet ist, kommen nach (1) in § 4 auch in δc keine andern als transcendente Parameter vor. Nach den Bemerkungen aber in § 3 heben sich in der Differentialgleichung für Th und also speciell in dem Gliede C derselben, die transcendenten Grössen hinweg, und da die eventuell dazu benutzten Gleichungen zwischen den ω_1, ω_2, ω_3 und η_1, η_2, η_3 bekanntlich keine von den Coefficienten $A_{\lambda,\mu,\nu}$ algebraisch abhängenden Terme enthalten, so müssen die Coefficienten der w_1, w_2, w_3 in dem Ausdrucke von C, wenn welche überhaupt übrig geblieben wären, numerische Constanten sein. Dies ist aber unmöglich, weil C, wie die übrigen Theile der Differentialgleichung, die Invarianteneigenschaft haben muss. Demnach kann C keinen andern Werth als Null:

$$C = 0$$

haben.

§ 10.

Das Resultat.

Zur Uebersicht will ich die im vorhergehenden gefundenen Ergebnisse zusammenstellen:

Die Curve vierter Ordnung, welche den Abel'schen Integralen vom Range III zu Grunde liegt, sei

$$f = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\, x_1^{\lambda} x_2^{\mu} x_3^{4-\lambda-\mu},$$

und werde symbolisch mit

$$a_x^4 = b_x^4 = c_x^4 = e_x^4$$

bezeichnet. Wenn man nun unter Einführung eines willkürlichen Variablensystems w_1, w_2, w_3

$$9(abc)^2(abe)^2\left[c_u c_w e_u e_w + c_u^2 e_w^2\right] - 5(abc)^4 e_u^2 e_w^4 = L,$$

$$(abc)^2\left[a_x^2 b_x^2 c_w^2 + a_x a_w b_x b_w c_x^2\right] = \bar{f} = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}\, x_1^{\lambda} x_2^{\mu} x_3^{4-\lambda-\mu}$$

setzt, wenn man ferner das Operationszeichen

$$\delta = \sum_{\lambda=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4-\lambda} \bar{A}_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu} \frac{\partial}{\partial A_{\lambda,\mu,4-\lambda-\mu}}$$

einführt, so genügen die sämmtlichen 64 Thetafunctionen Th, *welche zu der Curve f gehören, der Differentialgleichung*

$$\delta \mathrm{Th} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathrm{Th}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} w_\alpha w_\beta + \frac{1}{288} L \mathrm{Th} = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat die Invarianteneigenschaft. In derselben sind sechs einzelne Differentialgleichungen zusammengefasst, welche sich daraus ergeben dadurch, dass die Coefficienten der w_1, w_2, w_3 einzeln gleich Null gesetzt werden.

Umformungen dieser Differentialgleichung, speciell der Operation δ, wie sie der Beschaffenheit der Coefficienten in den geraden, bez. ungeraden Functionen Th entsprechen, sind zum Theil bereits durch Herrn Pascal (Annali di Matematica, S. II, t. XVII) ausgeführt worden.

Halle, im Juni 1890.

Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung.

Von

M. Pasch in Giessen.

In zwei Aufsätzen, welche in diesen Annalen 1884 Bd. 23 S. 419, 1886 Bd. 26 S. 211 abgedruckt sind, habe ich mich, unter Zugrundelegung bilinearer Formen, mit projectiven ebenen Systemen und zwar hauptsächlich mit der Deutung der Invarianten, welche in der Determinante einer linearen Verbindung solcher Formen auftreten, beschäftigt.*) Seitdem bin ich durch verschiedene Fragen, welche sich ursprünglich auf ternäre quadratische Formen bezogen, veranlasst worden, auf ternäre und dann auf binäre bilineare Formen zurückzugehen. Der Zusammenhang, welcher sich dabei zwischen jenen Fragen ergab, führte zu der nachfolgenden Darstellung, welche mehrfache Berührungspunkte mit den früheren Aufsätzen bietet.

Wenn man von einer linearen Verbindung zweier ternären bilinearen Formen die Adjuncte bildet, so entsteht eine bilineare Form (Nr. 5 und 12), welche zu jenen in invarianter Beziehung steht. Mit dieser Beziehung und deren geometrischer Construction beschäftigen sich die Nummern 6, 7 und 13, mit den verschiedenen Ausartungen die Nummern 8, 14—16. Für den Fall, dass zwei ternäre quadratische Formen zu Grunde liegen, stellt die dritte Form den „Kegelschnitt der acht Tangenten" dar. Bei der eingehenden Betrachtung der Ausartungen dieses Kegelschnittes (Nr. 18—23) begegnet man einer Eigenschaft einförmiger Gebilde, welche in Nr. 4 selbstständig behandelt ist, ferner einem Zusammenhange mit den metrisch ausgezeichneten Kegelflächen 2. O. und mit den birationalen quadratischen Verwandtschaften.

---

*) Einige Druckfehler in diesen Arbeiten sind am Schluss des 26ten Bandes verzeichnet.

Ich erlaube mir hier nachzutragen, dass Herr S. Kantor in den Wiener Denkschriften von 1882 die Wiederholung linearer Transformationen untersucht hat, und dass Figuren, wie die in meiner zweiten Arbeit in § 2 und am Ende des § 3 betrachteten, bei Herrn Kantor in den Wiener Sitzungsberichten von 1881 bezw. 1877 vorkommen.

Gelegentlich konnten auch diejenigen Determinanten 9. und 6. Grades ausgewerthet werden, welche die Hesse'sche Form einer Determinante dritten Grades darstellen (Nr. 17, 23 und 24).

Um gewisse algebraische Fragen, welche bei den oben erwähnten quadratischen Verwandtschaften auftauchen, zu erledigen (Nr. 9—11), wurden Entwickelungen aus dem binären Gebiete — Ausdehnung von Eigenschaften quadratischer Formen auf bilineare — vorausgeschickt (Nr. 1—3).

Den Schluss bildet die Herleitung einer algebraischen Beziehung, welche bei der wiederholten Anwendung einer bilinearen Form von beliebig vielen Veränderlichen auftritt (Nr. 25 und 26).

I.

Binäre bilineare Formen.

1. Bildet man aus zwei bilinearen Formen der Veränderlichen $x_1 | x_2$ und $y_1 | y_2$:

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \sum a'_{ik} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

die beiden Functionaldeterminanten:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f'}{\partial y_2} - \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial f'}{\partial y_1} = \frac{1}{2} X = \frac{1}{2}(X_{11} x_1^2 + 2 X_{12} x_1 x_2 + X_{22} x_2^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f'}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f'}{\partial x_1} = \frac{1}{2} Y = \frac{1}{2}(Y_{11} y_1^2 + 2 Y_{12} y_1 y_2 + Y_{22} y_2^2),$$

so haben die Coefficienten X_{ik}, Y_{ik} folgende Werthe:

$$X_{11} = 2(a_{11} a'_{12} - a_{12} a'_{11}), \qquad X_{12} = a_{11} a'_{22} - a_{22} a'_{11} - a_{12} a'_{21} + a_{21} a'_{12},$$
$$X_{22} = 2(a_{21} a'_{22} - a_{22} a'_{21}),$$
$$Y_{11} = 2(a_{11} a'_{21} - a_{21} a'_{11}), \qquad Y_{12} = a_{11} a'_{22} - a_{22} a'_{11} - a_{21} a'_{12} + a_{12} a'_{21},$$
$$Y_{22} = 2(a_{12} a'_{22} - a_{22} a'_{12}),$$

und die Formen X, Y selbst lassen sich auf mannigfache Art schreiben, z. B.:

$$\frac{1}{2} X = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a_{21} & a'_{21} \\ a_{12} & a'_{12} & a_{22} & a'_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & -x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ -x_1 & 0 & -x_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Das identische Verschwinden der Combinante X würde bedeuten, dass f und f' entweder in constantem Verhältniss stehen oder durch eine und dieselbe lineare Form von $y_1 | y_2$ theilbar sind.

Aus dem Systeme

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \end{matrix} \right\|$$

gehen 6 Determinanten zweiten Grades hervor, nämlich:

$$a_{11}a'_{12} - a_{12}a'_{11} = \frac{1}{2} X_{11}, \quad a_{11}a'_{21} - a_{21}a'_{11} = \frac{1}{2} Y_{11},$$

$$a_{11}a'_{22} - a_{22}a'_{11} = \frac{1}{2}(Y_{12} + X_{12}),$$

$$a_{21}a'_{22} - a_{22}a'_{21} = \frac{1}{2} X_{22}, \quad a_{22}a'_{12} - a_{12}a'_{22} = -\frac{1}{2} Y_{22},$$

$$a_{12}a'_{21} - a_{21}a'_{12} = \frac{1}{2}(Y_{12} - X_{12}).$$

Man schliesst hieraus, dass $X_{11}X_{22} - Y_{11}Y_{22} + Y_{12}^2 - X_{12}^2$ verschwindet, dass also die Formen X und Y gleiche Discriminanten besitzen*):

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2.$$

Da die Ausdrücke $X_{ik} = X_{ki}$ und $Y_{ik} = Y_{ki}$ dadurch entstehen, dass man die Reihen

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a'_{i1} \quad a'_{i2} \quad \text{und} \quad a'_{k2} \quad -a'_{k1} \quad -a_{k2} \quad a_{k1}$$

bezw.

$$a_{1i} \quad a_{2i} \quad a'_{1i} \quad a'_{2i} \quad \text{und} \quad a'_{2k} \quad -a'_{1k} \quad -a_{2k} \quad a_{1k}$$

componirt, so erscheinen die Discriminanten auch in den Formen:

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{21} & a'_{22} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a'_{12} & -a'_{11} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{22} & -a'_{21} & -a_{22} & a_{21} \end{matrix} \right|,$$

$$Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a'_{11} & a'_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a'_{12} & a'_{22} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} a'_{21} & -a'_{11} & -a_{21} & a_{11} \\ a'_{22} & -a'_{12} & -a_{22} & a_{12} \end{matrix} \right|.$$

2. Die beiden bilinearen Formen von $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$ können — bei veränderter Bezeichnungsweise — aus einer trilinearen Form, welche noch weitere Veränderliche $z_1|z_2$ enthält:

$$F(xyz) = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

als Coefficienten von z_1 und z_2 entnommen werden. Zu den zwei Covarianten

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial z_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial z_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial z_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial z_1} = \frac{1}{2} X,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial x_1} = \frac{1}{2} Y$$

tritt alsdann noch eine dritte

*) Ueber entsprechende Erscheinungen im quadratischen Gebiete siehe Frobenius, Journal f. Math. 1890 Bd. 106 S. 125.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{1}{2} Z$$
$$= \frac{1}{2}(Z_{11}z_1^2 + 2Z_{12}z_1 z_2 + Z_{22}z_2^2)$$

hinzu, und die Discriminanten der Formen X, Y, Z sind einander gleich:

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2,$$

oder, anders ausgedrückt, die durch Composition hergestellte Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{122} & -a_{112} & -a_{121} & a_{111} \\ a_{222} & -a_{212} & -a_{221} & a_{211} \end{vmatrix}$$

ändert ihren Werth nicht, wenn man überall den ersten Index mit dem zweiten vertauscht, oder den ersten mit dem dritten, oder den zweiten mit dem dritten.

Die Function $\frac{1}{2}X$ erscheint als Determinante von F, wenn man nur $y_1|y_2$ und $z_1|z_2$ als Veränderliche ansieht:

$$X = 2\,\det_{yz} F, \quad Y = 2\,\det_{zx} F, \quad Z = 2\,\det_{xy} F.$$

Kehrt man also zu der vorigen Bezeichnungsweise zurück und führt statt $z_1|z_2$ homogene Parameter $\varrho|\sigma$ ein, so erscheint $\frac{1}{2}Z$ als Determinante der aus f und f' linear zusammengesetzten Form $\varrho f + \sigma f'$ der Veränderlichen $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$:

$$\frac{1}{2}Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \varrho & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & \varrho & 0 & \sigma \end{vmatrix} = \Delta\varrho^2 + \Theta\varrho\sigma + \Delta'\sigma^2,$$

und die Gleichheit der Discriminante von Z:

$$4\Delta\Delta' - \Theta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \end{vmatrix}$$

mit denen von X und Y als Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft des Systems zweier binären quadratischen Formen.

Ein einfacher Beweis ergiebt sich übrigens auch durch folgende Determinantenmultiplication:

$$4\Delta\Delta' = 4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{12} & -b_{11} \\ b_{22} & -b_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12}+\Theta \\ X_{12}-\Theta & X_{22} \end{vmatrix}.$$

Die so erhaltene Determinante ist die der bilinearen Form

$$2(a_{11}x_1 + x_{21}a_2)(b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2) - 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)(b_{11}\xi_1 + b_{21}\xi_2)$$
$$= X_{11}x_1\xi_1 + (X_{12}+\Theta)x_1\xi_2 + (X_{12}-\Theta)x_2\xi_1 + X_{22}x_2\xi_2,$$

welche unter der Bedingung $\Theta = 0$ symmetrisch wird.

3. Um in gleichem Sinne eine gewisse Eigenschaft dreier binären quadratischen Formen zu verallgemeinern, führe ich drei bilineare Formen von $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$:

$$f(xy)=\sum a_{ik}x_iy_k,\quad f'(xy)=\sum a'_{ik}x_iy_k,\quad f''(xy)=\sum a''_{ik}x_iy_k$$
$$(i, k = 1, 2)$$

ein und bilde die Ausdrücke:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\Delta,\quad a_{11}a'_{22}-a_{12}a'_{21}-a_{21}a'_{12}+a_{22}a'_{11}=\Theta_{01}=\Theta_{10},\ldots;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial f'}{\partial y_2}-\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial f'}{\partial y_1}=a''x_1^2+b''x_1x_2+c''x_2^2,\cdots;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f'}{\partial x_2}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f'}{\partial x_1}=\alpha''y_1^2+\beta''y_1y_2+\gamma''y_2^2,\cdots;$$

so dass z. B. a'', b'', c'' dieselbe Bedeutung haben, wie oben

$$\frac{1}{2}X_{11},\quad X_{12},\quad \frac{1}{2}X_{22}.$$

Da die halbe Determinante des componirten Systems aus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} & a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} & a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{21} & a''_{22} & a''_{22} & -a''_{21} & -a''_{12} & a''_{11} \end{vmatrix}$$

sich auf die Differenz zweier Determinantenproducte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{22} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{21} & a'_{22} \\ a''_{11} & a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{21} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \\ a''_{12} & a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$$
$$=(a_{22}a+a'_{22}a'+a''_{22}a'')(a_{11}c+a'_{11}c'+a''_{11}c'')$$
$$-(a_{21}a+a'_{21}a'+a''_{21}a'')(a_{12}c+a'_{12}c'+a''_{12}c'')$$

zurückführt und mit Zuziehung verschwindender Elemente in die Summe

$$\begin{vmatrix} a_{11}c+a'_{11}c'+a''_{11}c'' & a_{11}a+a'_{11}a'+a''_{11}a'' \\ a_{22}c+a'_{22}c'+a''_{22}c'' & a_{22}a+a'_{22}a'+a''_{22}a'' \end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} a_{21}c+a'_{21}c'+a''_{21}c'' & a_{21}a+a'_{21}a'+a''_{21}a'' \\ a_{12}c+a'_{12}c'+a''_{12}c'' & a_{12}a+a'_{12}a'+a''_{12}a'' \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a''_{11} \\ a_{22} & a'_{22} & a''_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{21} & a'_{21} & a''_{21} \\ a_{12} & a'_{12} & a''_{12} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & c' & c'' \\ a & a' & a'' \end{vmatrix}$$

übergeht, so gelangt man zu der Formel:

$$\begin{vmatrix} 2\Delta & \Theta_{01} & \Theta_{02} \\ \Theta_{10} & 2\Delta' & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & 2\Delta'' \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

4. Die Deutung der Invariante Θ der beiden Formen $f(xy)$ und $f'(xy)$ ist von Herrn Rosanes (Journal f. Math. 1881 Bd. 90 S. 312f.) angegeben worden; siehe auch Pasch, diese Annalen 1884 Bd. 23 S. 423, und die Schlussbemerkung in Nr. 2 der gegenwärtigen Abhandlung. In dem besonderen Falle $a_{12} = a_{21}$, $a'_{12} = a'_{21}$ stellen die Gleichungen $f(xy) = 0$, $f'(xy) = 0$, wenn $x_1|x_2$, $y_1|y_2$ als lineare Coordinaten von Punkten einer Geraden X gedeutet werden, Involutionen dar, deren Doppelpunkte FF' bezw. GG' heissen mögen, und die Gleichung $\Theta = 0$ drückt die harmonische Lage dieser Punktepaare aus.

Nehmen wir also an, dass $a_{12} = a_{21}$, $a'_{12} = a'_{21}$ und $\Theta = 0$ ist, aber $\Delta\Delta \neq 0$, und verstehen wir unter q' irgend einen Punkt der Geraden X, unter p den harmonischen Punkt zu $FF'q'$, unter q den harmonischen Punkt zu $GG'q'$. Dann erzeugen die Paare pq eine Involution (Rosanes a. a. O.), welcher die Paare FF' und GG' angehören; für einen gewissen Punkt p' der Geraden X ist daher p der harmonische Punkt zu $GG'p'$, q der harmonische Punkt zu $FF'p'$, und auch das Paar $p'q'$ liegt in der eben erwähnten Involution; m. a. W.:

Hat man auf einer Geraden vier harmonische Punkte $FF'GG'$ und einen weiteren Punkt p, und bestimmt man zu $FF'p$, $GG'p$ die bezüglichen harmonischen Punkte q', p', so ist der zu $FF'p'$ harmonische Punkt q zugleich harmonisch zu $GG'q'$, und die Paare FF', GG', pq, $p'q'$ liegen in Involution.

Geometrischer Beweis: Sowohl die Reihe $FF'G'Gq'q$, als auch die Reihe $F'FGG'p'p$ sind (involutorisch) projectiv zu $FF'GG'pp'$; folglich sind jene beiden Reihen einander projectiv, die Paare FF', GG', pq, $p'q'$ in Involution. Weiter sind die Reihen $G'Gpp'$ und $GG'qq'$ projectiv, folglich $GG'qq'$ harmonisch.

Wenn man einen Doppelpunkt der durch die Paare FF' und GG' bestimmten Involution mit ξ bezeichnet, so wird der andere Doppelpunkt aus der Gleichung $f(x\xi) = 0$ gefunden, und die Punkte GG' sind dann die Nullstellen der Functionaldeterminante der Formen $f(xx)$ und $(x\xi) \,.\, f(x\xi)$:

$$2\begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & (x\xi)(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \xi_2 f(x\xi) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & (x\xi)(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) - \xi_1 f(x\xi) \end{vmatrix}$$
$$= 2\Delta \,.\, (x\xi)^2 - 2\big(f(x\xi)\big)^2,$$

wobei $(x\xi)$ die Determinante $x_1\xi_2 - x_2\xi_1$ bedeutet. Nun ist

$$\Delta \cdot (x\xi)^2 = f(\xi\xi)\, f(xx) - \big(f(x\xi)\big)^2;$$

folglich können zwei harmonische Punktpaare durch die Gleichungen

$$f(xx) = 0, \quad f(\xi\xi)\, f(xx) - 2\,\big(f(x\xi)\big)^2 = 0$$

in der Weise dargestellt werden, dass der Punkt ξ in Bezug auf beide Paare einem und demselben Punkte harmonisch zugeordnet ist. — Auch die Identität

$$a_{11}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 - 2a_{12}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + a_{22}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 = \Delta \cdot f(xx)$$

lässt erkennen, dass die **harmonische Invariante** (**Rosanes**, diese Annalen 1884 Bd. 23 S. 413) der beiden Gleichungen verschwindet.*)

II.

Ternäre bilineare Formen mit contragredienten Veränderlichen.

5. Bei der bilinearen Form der contragredienten Veränderlichen $x_1|x_2|x_3$ und $u_1|u_2|u_3$:

$$f(xu) = \sum a_{ik}x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

treten uns zunächst Determinante und adjungirte Form (Adjuncte) entgegen:

$$\det f = \sum \pm a_{11}a_{22}a_{33} = \Delta,$$
$$\operatorname{adj} f = \sum \alpha_{ik}u_i x_k = \varphi(xu),$$

wo $\alpha_{ik} = \operatorname{adj} a_{ik}$ in der Determinante Δ. Bei verschwindendem Δ wird φ, bei identisch verschwindendem φ wird f selbst ein Product linearer Factoren.

Legt man nun eine lineare Verbindung $\varrho f + \sigma f'$ der Form $f(xu)$ und einer gleichartigen Form

$$f'(xu) = \sum a'_{ik}x_i u_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

zu Grunde, so haben Determinante und Adjuncte die Gestalt:

$$\det(\varrho f + \sigma f') = \varrho^3\Delta + \varrho^2\sigma\Theta + \varrho\sigma^2\Theta' + \sigma^3\Delta',$$
$$\operatorname{adj}(\varrho f + \sigma f') = \varrho^2\varphi(xu) + \varrho\sigma\Phi(xu) + \sigma^2\varphi'(xu).$$

---

*) Auch wenn $f(xy)$ nicht symmetrisch ist, besteht die Identität:

$$\Delta(x\xi)(y\eta) = f(\xi\eta)f(xy) - f(x\eta)f(\xi y).$$

Die harmonische Invariante der Formen $f(xy)$ und $(x\xi)(y\eta)$ ist $= f(\xi\eta)$, die der Formen $f(xy)$ und $f(x\eta)f(\xi y)$ folglich $= \Delta f(\xi\eta)$. Für

$$f'(xy) = \varkappa f(xy) + \lambda f(x\eta)f(\xi y)$$

wird daher

$$\Theta = \Delta(2\varkappa + \lambda f(\xi\eta)), \quad \Delta' = \varkappa\Delta(\varkappa + \lambda f(\xi\eta)),$$

und insbesondere für

$$f'(xy) = f(\xi\eta)f(xy) - 2f(x\eta)f(\xi y)$$

wird

$$\Theta = 0, \quad \Delta' = -\Delta(f(\xi\eta))^2.$$

Mittels der besonderen Form u_x, d. i. $\sum x_i u_i$, werde

$$\det(\varrho f + \sigma u_x) = \varrho^3 \Delta + \varrho^2 \sigma\, i_\varphi + \varrho \sigma^2 i + \sigma^3,$$
$$\operatorname{adj}(\varrho f + \sigma u_x) = \varrho^2 \varphi(xu) + \varrho\sigma\, \psi(xu) + \sigma^2 u_x.$$

Wir denken uns in einer Ebene lineare Coordinaten eingeführt, $x_1|x_2|x_3$ als Coordinaten eines Punktes x, $u_1|u_2|u_3$ als Coordinaten einer Geraden u. Dann begründet die Gleichung $f(xu) = 0$ unter der Voraussetzung $\Delta \neq 0$ in dieser Ebene eine Collineation, welche dem Punkte x einen bestimmten Punkt zuordnet; die Gleichung $\varphi(xu) = 0$ stellt die umgekehrte Beziehung dar, $u_x = 0$ die identische Collineation. Die Figuren, welche einer und derselben Figur mittels der Collineationen $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ entsprechen, stehen unter sich in einer projectiven Beziehung; vermöge dieses Umstandes kann die Deutung der Ausdrücke Θ', Θ, Φ auf die der Ausdrücke i, i_φ, ψ zurückgeführt werden (s. Nr. 11 der Abhandlung in Bd. 23).

6. Um die Projectivität $\psi(xu) = 0$, deren Bedeutung a. a. O. S. 425 entwickelt ist, geometrisch herzuleiten, nehmen wir in der Ebene den Punkt a beliebig an und geben dann zwei weiteren Punkten b, c eine solche Lage, dass — wenn immer $a, b, \ldots, a', \ldots$ mittels $f(xu) = 0$ in $a', b', \ldots, a'', \ldots$ übergehen — in dem Dreieck abc die Seite ab durch c', die Seite ac durch b' hindurchgeht (Seite bc durch a' nur bei verschwindendem i); m. a. W.: die Geraden bc' und cb' laufen durch a. Ich will das Paar bc ein Gegenpaar des Punktes a in Bezug auf f nennen; die Gerade bc trägt unendlich viele Gegenpaare von a, die Paare einer gewissen Involution. Nur auf einer einzigen solchen Geraden (vorausgesetzt, dass a kein Doppelpunkt der Projectivität f ist), nämlich auf aa', artet die Involution der Gegenpaare aus, indem dort beide Doppelpunkte in a zusammenliegen, und ausser a giebt es nur einen einzigen Punkt A, welcher sich mit mehr als einem Punkte — den sämmtlichen Punkten der Geraden aA' — zu einem Gegenpaare verbindet, nämlich denjenigen Punkt der aa', welchen das Quadrat der Projectivität f in einen Punkt A'' der aa' überträgt. Dieser Punkt A, in welchem alle Geraden bc sich begegnen, heisse der Gegenpunkt von a in f.

Zu je zwei projectiven Punktreihen $bc\ldots$, $b'c'\ldots$ auf den Geraden U, U' gehört eine Gerade u als Ort der Punkte (bc', cb') u. s. w., in welchen jene Reihen involutorisch gesehen werden. Herr J. Kraus*)

---

*) Jacob Kraus: Die geometrische Deutung von Invarianten, welche bei ebenen Collineationen auftreten. Dissertation, Giessen 1886. (Daselbst gehören auf S. 9 Z. 14 v. u. ε_1 und ε_2 in den Nenner; S. 15 Z. 1 v. u. vertausche man $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$, S. 16 Z. 11 v. o. $\mathfrak{ABCD}$ und $\alpha\beta\gamma\delta$). S. den Auszug in diesen Annalen 1887 Bd. 29 S. 234. — Die Uebertragung auf den Raum behandelt Herr P. Muth ebendas. 1889 Bd. 33 S. 493.

nennt u die Involutionslinie der beiden Reihen und beschreibt mittels derselben die Umkehrung der Collineation ψ (§ 9 der Dissertation); in der That läuft u beständig durch a, wenn U sich um A dreht. (Um direct zu beweisen, dass u, während U sich um einen beliebigen Punkt A dreht, ein Strahlbüschel beschreibt, schneidet man a aus AA'' mittels derjenigen Geraden heraus, welche durch f in die AA'' übergeht.) U verbindet die Gegenpunkte aller Punkte von u und heisse deshalb die Gegenlinie von u in f. Um zu irgend einer Geraden $u = ax$ die Gegenlinie $U = Ab$ zu erhalten, bestimmt man den Punkt b auf der Geraden xA' derart, dass xAb' in eine Gerade fallen.

Sind die bei festem a von u, U um a, A beschriebenen Büschel projectiv, so folgt, dass die Paare aA eine Collineation erzeugen. Nun beschreiben bei festem a, wenn man b irgend eine feste Gerade v durchlaufen lässt, $Ax = Ab'$ und $A'x = A'b$ projective Büschel, wobei für $d = (v, aA')$ die Strahlen $Aa = Ad'$ und $A'a = A'd$ einander entsprechen; mithin beschreibt x einen Kegelschnitt durch A, A' und a. Die Büschel der Strahlen $u = ax$ und $A'b = A'x$ sind demnach projectiv, die der Strahlen $A'b$ und $U = Ab$ aber perspectiv, folglich bewegen sich u, U projectiv.

Die Collineation der Paare aA ist die durch die Gleichung $\psi(xu) = 0$ dargestellte; sie mag als die Gegencollineation zu f bezeichnet werden. Die Doppelelemente von f sind zugleich die von ψ.

7. Wie leicht zu erkennen, entsprechen einander in ψ nicht bloss a und A, sondern auch a' und A'. Denn da $aa'AA''$ in gerader Linie liegen, so ist A' derjenige Punkt der in f entsprechenden Geraden $a'a''$, welcher sich durch das Quadrat von f nach derselben Geraden überträgt.

Unterwirft man daher den Strahl aA' der Transformation f und hierauf noch der Transformation ψ, so gelangt man über $a'A'' = aa'$ zu AA'. Hieraus folgt aber: Wenn von den drei Strahlen AA', aA, aA' einer ein Büschel beschreibt, so bewegen die beiden anderen sich ebenfalls in Büscheln. Sind also von A und A' beschriebene Figuren perspectiv, so sind sie auch perspectiv zu der von a beschriebenen Figur. Dies kommt mit dem von Herrn Keller auf S. 25 (§ 12) seiner Dissertation*) angegebenen Satze überein.

Da die Gerade aA mit AA'' identisch ist, so sind in dem eben betrachteten Falle auch die von A und A'' erzeugten Figuren perspectiv, d. h. bei veränderter Bezeichnung: *Wenn durch eine ebene Projectivität ein Dreieck abc in $a'b'c'$, dieses in $a''b''c''$ übergeht, und es liegen zwei von den Dreiecken perspectiv, so liegen sie auch perspectiv zu dem dritten.*

---

*) Adam Keller: Ueber gewisse Vierecke, die von Viereckspaaren abhängen. Dissertation, Giessen 1888.

8. Bei besonderer Beschaffenheit von f artet die Gegencollineation aus, so dass in ihr einem gewissen Punkte p alle Punkte der Ebene, den übrigen Punkten nur die Punkte einer gewissen Geraden π entsprechen. Es sind dann p und π Doppelelemente von f; p der Scheitel eines Strahlenbüschels, welches durch f in ein involutorisches Büschel übergeht; π der Träger einer Punktreihe, welcher in f eine involutorische Reihe entspricht. Das Auftreten eines solchen Doppelpunktes bei f zieht das einer solchen Doppelgeraden nach sich, und umgekehrt. Die beiden Involutionen liegen perspectiv.

Soll in der That der Gegenpunkt eines Punktes p in f unbestimmt werden, so muss p Doppelpunkt von f sein und jede Gerade Gegenpaare bc von p tragen, so dass $bc'p$, $cb'p$ gerade Reihen werden und einander doppelt entsprechen. Ein beliebiger Strahl durch p kehrt mithin bei zweimaliger Anwendung von f in sich selbst zurück und enthält (wenn f nicht involutorisch ist) ausser p noch *einen* Punkt β, welcher mit β'' zusammenfällt. Auf der Geraden $\pi = \beta\beta'$ werden aber durch f nicht bloss β und β', sondern auch umgekehrt β' und β einander zugeordnet.

Die algebraische Bedingung besteht in dem Verschwinden der Determinante von ψ:

$$\det\psi = \det(-f + iu_x) = -\Delta + ii_\varphi$$
$$= \frac{1}{2}(i^3 - ii_1 - 2\Delta) = \frac{1}{3}(i^3 - i_2),$$

während f zur Involution wird durch das identische Verschwinden der adjungirten Form von ψ (bei $i \neq 0$):

$$\operatorname{adj}\psi = \operatorname{adj}(-f + iu_x) = \varphi - i\psi + i^2 u_x$$
$$= \varphi + if = f_1 + i_\varphi u_x.$$

Wegen der Bedeutung von i_1, i_2, f_1 und wegen der erforderlichen Beziehungen s. Bd. 23 S. 425—427.

9. Die Form Φ, aus welcher ψ durch besondere Wahl von f' hervorging, kann in Verbindung mit φ und φ' noch auf anderem, als dem obigen Wege erzeugt werden. Wir führen Strahlen v, w und Punkte y, z mit der Massgabe ein, dass $(vw)_i = x_i$ und $(yz)_i = u_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei

$$(vw)_1 = v_2w_3 - v_3w_2, \quad (vw)_2 = v_3w_1 - v_1w_3 \text{ u. s. w.}$$

Bildet man dann unter Zuziehung weiterer Veränderlichen $\varkappa_1|\varkappa_2$ und $\lambda_1|\lambda_2$ die binären bilinearen Formen

$$g(\varkappa\lambda) = f(\varkappa_1y + \varkappa_2z,\ \lambda_1v + \lambda_2w), \quad g'(\varkappa\lambda) = f'(\varkappa_1y + \varkappa_2z,\ \lambda_1v + \lambda_2w),$$

so ist φ die Determinante von g (s. Bd. 23 S. 432) und mithin

$$\varrho^2\varphi + \varrho\sigma\Phi + \sigma^2\varphi' = \det(\varrho g + \sigma g').$$

Um nun die beiden Functionaldeterminanten von g und g' darzustellen, bezeichne ich (hier, wie später, mit Bezugnahme auf Nr. 6 in Bd. 23)

$$f(yv)\,f'(zv) - f(zv)\,f'(yv) \quad \text{d. i.} \quad \sum \pm u_1 f_2(v)\,f_3'(v) \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2}\,k(vv),$$

$$f(yv)\,f'(yw) - f(yw)\,f'(yv) \quad \text{d. i.} \quad \sum \pm x_1 f(y)_2\,f'(y)_3 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{2}\,l(yy),$$

$$\frac{1}{2}\sum_i w_i \frac{\partial k}{\partial v_i} \quad \text{mit} \quad k(vw), \qquad \frac{1}{2}\sum_i z_i \frac{\partial l}{\partial y_i} \quad \text{mit} \quad l(yz);$$

$\frac{1}{2}k(vv)$ ist die Determinante der Formen $f(\varkappa_1 y+\varkappa_2 z,v)$, $f'(\varkappa_1 y+\varkappa_2 z,v)$ nach $\varkappa_1$, $\varkappa_2$; aus ihr wird die Determinante von g, g' nach $\varkappa$, wenn man $\lambda_1 v + \lambda_2 w$ für v einsetzt:

$$2\,\det_\varkappa gg' = \lambda_1^2 k(vv) + 2\lambda_1\lambda_2 k(vw) + \lambda_2^2 k(ww),$$
$$2\,\det_\lambda gg' = \varkappa_1^2\, l(yy) + 2\varkappa_1\varkappa_2\, l(yz) + \varkappa_2^2\, l(zz).$$

Nach Nr. 2 besteht also die Identität:

$$4\varphi\varphi' - \Phi^2 = k(vv)\,k(ww) - \big(k(vw)\big)^2 = l(yy)\,l(zz) - \big(l(yz)\big)^2.$$

10. Bezüglich der Ausdrücke $k(vv)$ und $l(yy)$ führe ich die weiteren Bezeichnungen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k(vv)}{\partial v_i \partial v_k} = k_{ik}, \qquad \frac{\partial k(vw)}{\partial u_i} = k_i(vw),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 l(yy)}{\partial y_i \partial y_k} = l_{ik}, \qquad \frac{\partial l(yz)}{\partial x_i} = l_i(yz)$$

ein und betrachte die in $\varkappa_1|\varkappa_2$ und $\varrho_1|\varrho_2$ bilinearen Formen:

$$\varrho_1 f(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z,\, v) + \varrho_2 f'(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z,\, v),$$
$$\varrho_1 f(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z,\, w) + \varrho_2 f'(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z,\, w).$$

Die Determinante der ersteren ist $\frac{1}{2}\,k(vv)$; die Determinanten beider nach $\varkappa$ bezw. ϱ sind:

$$\varrho_1^2\varphi + \varrho_1\varrho_2\Phi + \varrho_2^2\varphi', \quad \frac{1}{2}\,\varkappa_1^2 l(yy) + \varkappa_1\varkappa_2 l(yz) + \frac{1}{2}\,\varkappa_2^2 l(zz).$$

Behandelt man daher die drei Formen von $\varkappa_1|\varkappa_2$ und $\varrho_1|\varrho_2$:

$$\varrho_1 f(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z)_i + \varrho_2 f'(\varkappa_1 y + \varkappa_2 z)_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

nach Nr. 3, so treten beispielsweise

$$k_{11},\ k_{23},\ \varphi_1(u),\ \Phi_1(u),\ \varphi_1'(u),\ \frac{1}{2}\,l_1(yy),\ l_1(yz),\ \frac{1}{2}\,l_1(zz)$$

an die Stelle von

$$2\Delta,\ \Theta_{12},\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ a,\ b,\ c,$$

und es ist demnach identisch:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \\ \Phi_1(u) & \Phi_2(u) & \Phi_3(u) \\ \varphi_1'(u) & \varphi_2'(u) & \varphi_3'(u) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} l_1(yy) & l_2(yy) & l_3(yy) \\ l_1(yz) & l_2(yz) & l_3(yz) \\ l_1(zz) & l_2(zz) & l_3(zz) \end{vmatrix},$$

wie auch

$$\sum \pm l_{11} l_{22} l_{33} = 2 \sum \pm \varphi(x)_1 \Phi(x)_2 \varphi'(x)_3 = \frac{1}{2} \sum \pm k_1(vv) k_2(vw) k_3(ww).$$

11. Zur Aufsuchung der in den beiden vorigen Nummern entwickelten Identitäten wurde ich durch eine geometrische Ueberlegung veranlasst, welche, ursprünglich an quadratischen Formen angestellt, mit Steiner's „schiefer Projection" zusammenhängt (Werke I. 1881 S. 409; Systematische Entwickelung u. s. w. 1832. § 59, II). Diese Verwandtschaft zwischen ebenen Punktfeldern wird, da sie quadratisch und birational ist, durch zwei bilineare Gleichungen zwischen Punktcoordinaten dargestellt (Rosanes, Journal f. Math. 1871 Bd. 73 S. 104). Man kann aber ähnliche Betrachtungen durchführen, indem man Punkt- und Liniencoordinaten verbindet. Es entspricht nämlich mittels der beiden Gleichungen

$$f(yv) = 0, \quad f'(yv) = 0$$

jedem Punkte y eine Gerade v mit den Coordinaten

$$f(y)_2 f'(y_3) - f(y)_3 f'(y)_2 \,|\, f(y)_3 f'(y)_1 - f(y)_1 f'(y)_3 \,|\, f(y)_1 f'(y)_2 - f(y)_2 f'(y)_1,$$

zu welcher rückwärts der Punkt y der Coordinaten

$$f_2(v) f_3'(v) - f_3(v) f_2'(v) \,|\, f_3(v) f_1'(v) - f_1(v) f_3'(v) \,|\, f_1(v) f_2'(v) - f_2(v) f_1'(v)$$

gehört; v ist der Ort der Punkte, welche dem Punkte y durch die Collineationen $\varrho f + \sigma f' = 0$ zugeordnet werden, während in den umgekehrten Collineationen der Geraden v die Strahlen des Büschels y entsprechen.

Wenn y die Gerade u durchläuft, so umhüllt v den durch die Gleichung $k(vv) = 0$ dargestellten Kegelschnitt, welcher der correspondirende Kegelschnitt der u genannt werden kann. Die Gleichung $k(vv) = 0$ entsteht aber auch durch Elimination von ϱ und σ aus dem Systeme

$$u_1 = \varrho f_1(v) + \sigma f_1'(v), \quad u_2 = \varrho f_2(v) + \sigma f_2'(v), \quad u_3 = \varrho f_3(v) + \sigma f_3'(v),$$

welches die in $\varrho f + \sigma f' = 0$ zugehörige Gerade v liefert. Folglich umhüllen die Geraden v, welche sich der u durch die Collineationen $\varrho f + \sigma f' = 0$ zuordnen, ebenfalls den correspondirenden Kegelschnitt der u, und man erhält für diesen Kegelschnitt die Parameterdarstellung:

$$v_i = \varrho^2 \varphi_i(u) + \varrho\sigma \Phi_i(u) + \sigma^2 \varphi_i'(u). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Aus der Parameterdarstellung eines beliebigen Kegelschnittes

$$v_i = a_i \varrho^2 + b_i \varrho\sigma + c_i \sigma^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

fliessen nun bekanntlich die Gleichungen desselben in Punkt- und Liniencoordinaten $\left(\text{wenn z. B. } (bcv) = \sum \pm b_1 c_2 v_3\right)$:

$$4a_x c_x - b_x^2 = 0, \quad (bcv)(abv) - (cav)^2 = 0,$$

und zwar ist

$$\frac{1}{4}\operatorname{adj}(4a_x c_x - b_x^2) = (bcv)(abv) - (cav)^2, \quad \det(4a_x c_x - b_x^2) = 4(abc)^2.$$

Wenden wir dies auf unsern Fall an, so finden wir die Gleichung des correspondirenden Kegelschnittes der u in Punktcoordinaten x:

$$4\varphi\varphi' - \Phi^2 = 0;$$

und in der That ist $4\varphi\varphi' - \Phi^2$, wie sich in Nr. 9 ergeben hat, in x die Adjuncte von $k(vv)$, zugleich in u die Adjuncte von $l(yy)$. Weiter muss

$$4\left(\sum \pm \varphi_1(u)\,\Phi_2(u)\,\varphi_3'(u)\right)^2$$

mit dem Quadrat der Determinante von $k(vv)$ übereinstimmen, wie dies durch Nr. 10 bestätigt wird, wobei man $2 \det k$ zugleich als die Hermite'sche Form des Netzes

$$x_1 l_1(yy) + x_2 l_2(yy) + x_3 l_3(yy)$$

erkennt. Beachtet man endlich, dass

$$\operatorname{adj}(4\varphi\varphi' - \Phi^2) = k(vv) \,.\, \det k,$$

so kommt die Identität:

$$\sum \pm v_1 \Phi_2(u)\,\varphi_3'(u) \cdot \sum \pm v_1\, \varphi_2(u)\,\Phi_3(u) - \left(\sum \pm v_1\, \varphi_2'(u)\,\varphi_3(u)\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\, k(vv) \cdot \sum \pm \varphi_1(u)\,\Phi_2(u)\,\varphi_3'(u),$$

welche die neue Tangentialgleichung auf die alte zurückführt. Der Fall, wo zwei Polarsysteme statt der Collineationen vorliegen, ist in der Dissertation von O. Weimar*) auf Grund einer Andeutung über das hier befolgte Verfahren behandelt.

III.

Ternäre bilineare Formen mit cogredienten Veränderlichen.

12. Bei der weiteren Betrachtung werden Formen mit cogredienten Veränderlichen vorausgesetzt, so dass $x_1|x_2|x_3$ und $y_1|y_2|y_3$ in

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \sum a'_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

als Coordinaten von Punkten einer Ebene aufgefasst werden können.

---

*) Ueber verschiedene Darstellungen des correspondirenden Kegelschnitts einer Geraden in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel. Giessen 1890.

Die mit Determinante und Adjuncte von $\varrho f + \sigma f'$ zusammenhängenden Bezeichnungen sind wie in Nr. 5 einzuführen. Ausserdem schreibe ich:

$$\Phi(uv) = \sum A_{ik} u_i v_k, \quad f(xy) = \sum x_i f_i(y) = \sum y_x f(x)_x$$

u. s. w.

In Betreff des Einflusses linearer Substitution sei bemerkt, dass die Determinante einer Form $\sum b_{ik} u_i v_k$, wenn die u_i durch $f_i(x)$ ersetzt werden, sich mit Δ multiplicirt, während gleichzeitig in der Adjuncten die $x_i y_k$ in $x_k \varphi_i(v)$ übergehen.

Bildet man also die Determinanten von beiden Seiten der in Bd. 23 S. 434 hergeleiteten Identität:

$$\sum A_{ik} f_i(y) f(x)_x = \Theta f(xy) - \Delta f'(xy),$$

so kommt links $\Delta^2 \det \Phi$, rechts $\Theta \Delta^2 . \Theta' - \Delta^3 . \Delta'$ und mithin:

$$\det \Phi = \Theta \Theta' - \Delta \Delta'.$$

13. Die Paare der Punkte, welche ($\Delta\Delta' \neq 0$ vorausgesetzt) einer und derselben Geraden mittels der Reciprocitäten $f' = 0$, $f = 0$ zugeordnet werden, bilden eine Collineation, deren Gleichung $g(xu) = 0$ ich in Bd. 23 S. 435 angegeben habe. Es ist zu erwarten, dass die Form Φ mit der Form

$$g(xu) = \sum a_{lk} a'_{li} x_i u_k \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

zusammenhängt, welcher wir noch die Form

$$g'(xu) = \sum a'_{li} a_{lk} u_i x_x$$

zur Seite stellen können.

Bemerken wir zunächst, dass die Determinante und die Adjuncte von g die Werthe

$$\det g = \Delta^2 \Delta', \quad \operatorname{adj} g = \Delta g',$$

ferner die in Nr. 5 mit i und i_φ bezeichneten Invarianten für g die Werthe Θ, $\Delta\Theta'$ annehmen, folglich die ebendaselbst mit ψ bezeichnete den Werth

$$\psi_g = \Theta u_x - g \quad \text{und} \quad \det \psi_g = \Delta \det \Phi, \quad \operatorname{adj} \psi_g = \Delta g' + \Theta g.$$

Wendet man nun das in Bd. 23 S. 432 beschriebene Verfahren auf die Identität

$$\sum a_{lk} u_k f_l(x) = \Delta u_x$$

an, so kommt

$$g + \sum A_{ik} u_k f_i(x) = \Theta u_x,$$

d. h. ψ_g geht aus $\Phi(vu)$ dadurch hervor, dass man die v_i durch $f_i(x)$ ersetzt. Um die Adjuncte von ψ_g zu erhalten, verwandelt man in

adj Φ die $x_i y_k$ in $x_k \varphi_i(u)$. Schreibt man endlich $f(y)_k$ für u_k, so geht ψ_g über in

$$\Theta f(yx) - \Delta f'(yx).$$

14. Die Ausartungen der Form Φ sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Diese Ausartungen finden stets gleichzeitig mit den entsprechenden Ausartungen von ψ_g statt.

Verschwindet det Φ, so giebt es nach Nr. 8 eine Strahleninvolution, in welcher jedes Paar conjugirter Strahlen mittels f und f' einem und demselben Punkte, und eine (dazu perspective) gerade Punktinvolution, in welcher jedes Paar conjugirter Punkte mittels f und f' der nämlichen Geraden entspricht. Es ist dann $\Theta f - \Delta f'$ eine der drei singulären Formen des Büschels $\varrho f + \sigma f'$.

Eine weitere Besonderheit tritt ein, wenn adj Φ und mithin adj ψ_g identisch verschwindet. In diesem Falle ist die Collineation $g = 0$ involutorisch, nicht verschieden von $g' = 0$. Da die Form Φ in lineare Factoren zerfällt:

$$\Phi = c u_\xi u_\eta, \quad \psi_g = c u_\xi f(x\eta), \quad \Theta f - \Delta f' = c f(x\eta) f(\xi y),$$

so wird f' eine lineare Verbindung von f und $f(x\eta) f(\xi y)$; und da für $f' = \varkappa f + \lambda f(x\eta) f(\xi y)$:

$$\Theta = 3\varkappa\Delta + \lambda\Delta f(\xi\eta), \; \Theta' = \varkappa\Delta\big(3\varkappa + 2\lambda f(\xi\eta)\big), \; \Delta' = \varkappa^2\Delta\big(\varkappa + \lambda f(\xi\eta)\big),$$
$$\Phi = 2\varkappa\varphi(uv) + \lambda f(\xi\eta)\varphi(uv) - \lambda\Delta u_\xi v_\eta,$$
$$\varphi' = \varkappa^2\varphi(uv) + \varkappa\lambda f(\xi\eta)\varphi(uv) - \varkappa\lambda\Delta u_\xi v_\eta,$$

so kann man hier annehmen:

$$f'(xy) = f(\xi\eta) f(xy) - 2 f(x\eta) f(\xi y)$$

und erhält bei dieser Annahme:

$$\Theta = \Delta f(\xi\eta), \quad \Theta' = -\Delta\big(f(\xi\eta)\big)^2, \quad \Delta' = -\Delta\big(f(\xi\eta)\big)^3,$$
$$\Phi = 2\Delta u_\xi v_\eta, \quad \varphi' = -f(\xi\eta)\big\{f(\xi\eta)\varphi(uv) - 2\Delta u_\xi v_\eta\big\}.$$

Dabei sind die Punkte ξ und η beliebig; nur muss, so lange die Voraussetzung $\Delta\Delta' \neq 0$ festgehalten wird, $f(\xi\eta)$ von Null verschieden sein.

15. Der Fall, wo Φ sich zerlegt und zugleich $\Delta\Delta'$ verschwindet, ist noch zu erörtern.

Bleibt Δ von Null verschieden, so kann nach dem Vorstehenden f' nur dann, wenn $f(\xi\eta) = 0$ wird, singulär und zwar das Product linearer Factoren werden, nämlich:

$$f'(xy) = -2 f(x\eta) f(\xi y).$$

Verlangt man dagegen: $\Delta = 0$, $\Delta' \neq 0$, so ist zu nehmen:

$$f(xy) = -2 f'(x\eta) f'(\xi y) \quad \text{mit} \quad f'(\xi\eta) = 0.$$

Beidemal wird Φ durch u_ξ und v_η theilbar, ohne identisch zu verschwinden; auch hat man beidemal: $\Theta = \Theta' = 0$.

Was endlich den Fall $\Delta = \Delta' = 0$ anlangt, so sei zuerst bemerkt, dass dann wieder Θ und Θ' Null werden; denn entweder ist $\varphi = 0$ und schon deshalb $\Theta = 0$, oder f ist kein Product und dennoch $\Theta f = cf(x\eta)\, f(\xi y)$, u. s. w. Ferner sei bemerkt, dass bei der Annahme: $f = l_x q_y$, $f' = l'_x q'_y$ sich ergeben würde:

$$\varrho f + \sigma f' = \varrho l_x q_y + \sigma l'_x q'_y, \quad \text{adj}\,(\varrho f + \sigma f') = \varrho\sigma (ll'u)\,(qq'v),$$
$$\Phi = (ll'u)\,(qq'v).$$

In Rücksicht auf die Voraussetzung $\Delta = \Delta' = 0$ kann man nun den Formen f und f' die Gestalt:

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l'_x q'_y - \mu' m'_x p'_y$$

geben, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}\Phi(uv) = {} & \lambda\lambda'(ll'u)\,(qq'v) - \lambda\mu'(lm'u)\,(qp'v)\\ & - \mu\lambda'(ml'u)\,(pq'v) + \mu\mu'(mm'u)\,(pp'v),\end{aligned}$$
$$\varphi(uv) = \lambda\mu(lmu)\,(pqv),$$
$$\Theta = \lambda\mu\left\{\lambda'(lml')\,(pqq') - \mu'(lmm')\,(pqp')\right\}$$

u. s. w., und es gehen dann entweder die Geraden $lml'm'$ oder die Geraden $pqp'q'$ durch einen Punkt. In der That: Wenn man — was zulässig ist — l'_x als identisch mit l_x annimmt, so folgt aus $\Theta = \Theta' = 0$:

$$\lambda\mu\mu'(lmm')\,(pqp') = 0, \quad \mu\lambda'\mu'(lmm')\,(pp'q') = 0,$$

und es wird daher

$$\begin{aligned}\text{adj}\,\Phi = {} & \lambda\mu\lambda'\mu' \cdot \sum \pm (lm')_1\,(ml')_2\, x_3 \cdot \sum \pm (qp')_1\,(pq')_2\, y_3\\ & - \lambda\mu\mu'^2 \cdot \sum \pm (lm')_1\,(mm')_2\, x_3 \cdot \sum \pm (qp')_1\,(pp')_2\, y_3\\ & - \mu^2\lambda'\mu' \cdot \sum \pm (ml')_1\,(mm')_2\, x_3 \cdot \sum \pm (pq')_1\,(pp')_2\, y_3\\ = {} & \lambda\mu\lambda'\mu'(lmm')\, l_x\big(p_y(qp'q') - q'_y(pqp')\big)\\ = {} & \lambda\mu\lambda'\mu'(lmm')\,(qp'q')\, l_x p_y = - \lambda\mu\lambda'\mu'(lmm')\,(pqq')\, l_x p'_y.\end{aligned}$$

Da aber dieser Ausdruck verschwinden soll, so ist entweder $(lmm') = 0$, oder $(pqp') = (pqq') = (pp'q') = (qp'q') = 0$, oder — falls keine dieser Möglichkeiten zutrifft — das Product $\lambda\mu\lambda'\mu' = 0$. Im letzten Falle kann man, wenn μ oder $\mu' = 0$, die Gerade m bezw. m' so wählen, dass $(lmm') = 0$; wenn $\lambda = 0$ neben $\mu\lambda'\mu' \neq 0$, oder $\lambda' = 0$ neben $\lambda\mu\mu' \neq 0$, so ist $(pp'q') = 0$ bezw. $(pqp') = 0$, und man kann q bezw. q' so wählen, dass $pqp'q'$ durch einen Punkt gehen; entsprechend verfährt man bei $\lambda = \lambda' = 0$.

Man kann also die Formen f und f', wenn beide singulär sind und ihre Contravariante Φ zerfällt, entweder auf die Gestalt

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l_x q_y' - \mu' m_x p_y'$$

oder auf die Gestalt

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l_x' q_y - \mu' m_x' p_y$$

bringen. Umgekehrt folgt aus der ersteren Gestalt, dass für einen gewissen Punkt ξ sowohl $f(\xi y)$ wie $f'(\xi y)$ identisch in y verschwinden und φ, φ', Φ durch $u_\xi = (lmu)$ getheilt werden; aus der letzteren, dass für einen gewissen Punkt η sowohl $f(x\eta)$ wie $f'(x\eta)$ identisch in x verschwinden und $v_\eta = (pqv)$ in φ, φ', Φ als Factor steckt.

16. Will man erreichen, dass Φ nicht bloss zerfällt, sondern geradezu identisch verschwindet, so hat man die Formen f und f', welche alsdann nach Nr. 14 und 15 beide (wie überhaupt alle Formen $\varrho f + \sigma f'$) singulär sein müssen, jedenfalls in der Gestalt

$$\begin{aligned} f(xy) &= \lambda_{11} l_x p_y + \lambda_{12} l_x q_y + \lambda_{21} m_x p_y + \lambda_{22} m_x q_y, \\ f'(xy) &= \lambda'_{11} l_x p_y + \lambda'_{12} l_x q_y + \lambda'_{21} m_x p_y + \lambda'_{22} m_x q_y \end{aligned}$$

vorauszusetzen. Denn schreibt man gemäss Nr. 15 etwa

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l_x q_y' - \mu' m_x p_y',$$

so wird

$$\Phi = (lmu)[\lambda \mu' (p' q v) - \mu \lambda' (q' p v)],$$

und hier soll, da das Zusammenfallen der Geraden l und m sich vermeiden lässt, der zweite Factor verschwinden; dann gehen aber entweder die Geraden $pqp'q'$ durch einen Punkt, oder man hat: $\lambda \mu \lambda' \mu' = 0$ und kann deshalb eine oder zwei dieser Geraden so wählen, dass alle vier sich in einem Punkte treffen.

Werden nun f und f' in der obigen Weise angenommen, so verschwinden $f(\xi y)$ und $f'(\xi y)$ identisch in y für einen gewissen Punkt ξ, zugleich $f(x\eta)$ und $f'(x\eta)$ identisch in x für einen gewissen Punkt η, und φ, φ', Φ werden theilbar durch $u_\xi v_\eta$:

$$\Phi = (\lambda_{11} \lambda'_{22} - \lambda_{12} \lambda'_{21} - \lambda_{21} \lambda'_{12} + \lambda_{22} \lambda'_{11}) u_\xi v_\eta .$$

Damit also Φ identisch verschwindet, ist nur noch die Bedingung

$$\lambda_{11} \lambda'_{22} - \lambda_{12} \lambda'_{21} - \lambda_{21} \lambda'_{12} + \lambda_{22} \lambda'_{11} = 0$$

zu erfüllen.

17. Bei jeder Beschaffenheit der Form f kann man die Adjuncte von Φ durch geeignete Wahl von f' zum Verschwinden bringen. Wird jedoch gewünscht, dass Φ selbst bei gegebenem f durch geeignete Wahl von f' den Werth Null erhalte, so ist dazu die Bedingung $\Delta = 0$ nothwendig und auch hinreichend (Nr. 16). Die Nothwendigkeit derselben folgt schon daraus, dass mit Φ auch $\Theta f - \Delta f'$ (s. Nr. 12) und mithin Δ (wie auch Θ, Θ', Δ') verschwindet; der Fall $f : f' =$ Const.

würde sogar $\varphi = \varphi' = 0$ ergeben. Andrerseits erhellt die Zulänglichkeit der Bedingung $\Delta = 0$ sofort, wenn man f auf die Gestalt $\lambda l_x q_y - \mu m_x p_y$ bringt und dann $f' = l_x p_y$ annimmt.

(Die singuläre Reciprocität $f = 0$ läuft übrigens — wenn f nicht zerfällt — auf eine projective Beziehung zwischen den Strahlen zweier Büschel lm, pq hinaus. Jeder Punkt etwa von l bildet mit jedem Punkte des entsprechenden Strahles p ein Nullpaar der Form f, d. h. für alle u, v ist $\sum a_{ik}(lu)_i(pv)_k = 0$. Dieser Ausdruck ist aber der Werth von Φ für $a'_{ik} = l_i p_k$, da unter der Annahme $u = xy$, $v = \xi\eta$:

$$f(x\xi)\, l_y - f(y\xi)\, l_x = \sum a_{ik}(lu)_i \xi_k$$

u. s. w.)

Die vorstehende Ueberlegung führt zu dem Werthe der symmetrischen Determinante neunten Grades:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & -a_{32} & 0 & -a_{23} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{33} & 0 & a_{31} & a_{23} & 0 & -a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & a_{32} & -a_{31} & 0 & -a_{22} & a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & -a_{12} \\ a_{33} & 0 & -a_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & 0 & a_{11} \\ -a_{32} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & a_{23} & -a_{22} & 0 & -a_{13} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{23} & 0 & a_{21} & a_{13} & 0 & -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & -a_{21} & 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

welche aus dem Systeme $A_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3$) durch Elimination der a'_{ik} hervorgeht und als Jacobi'sche Determinante der a_{ik} oder als Hesse'sche Determinante von Δ aufzufassen ist*). Ist nämlich $H = 0$, lässt sich also das System $A_{ik} = 0$ durch geeignete Werthe der a'_{ik} befriedigen, so ist auch $\Delta = 0$. Folglich sind alle irreduciblen Theiler von H gleich Δ, $H : \Delta^3$ eine Constante. Nimmt man für die a_{ik} das Einheitssystem, so wird $\Delta = 1$, $H = -2$. Somit ist $H = -2\Delta^3$.

Auch die Formeln der Nr. 14 ermöglichen eine Berechnung von H und zugleich die der ersten Unterdeterminanten. Indem man eine jede Zeile von H mit der Reihe

$$a_{ik} f(\xi\eta) - 2 f_i(\eta) f(\xi)_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

componirt, erhält man die Werthe $2\Delta\, \xi_l \eta_m$ ($l, m = 1, 2, 3$); indem man

---

*) auch als Determinante der in den a'_{ik} und a''_{ik} bilinearen (in den a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik} symmetrischen) Invariante $\sum A_{ik} a''_{ik}$ dreier Formen f, f', f''. Ueber diese Invariante s. Kraus a. a. O.

also die Elemente jener Reihe nach den Producten $\xi_i \eta_m$ ordnet, gewinnt man ein System K, welches, mit dem Systeme H componirt, in der Diagonale überall 2Δ, sonst Nullen liefert. Demnach ist $HK = (2\Delta)^9$, $H : \Delta^3$ eine Constante, $H = -2\Delta^3$, $K = -2^8\Delta^6$, und die Elemente von K sind die mit $-\Delta^2$ dividirten Adjuncten der Elemente von H.

IV.

Anwendungen im Gebiete der ternären quadratischen Formen.

18. Ich wende mich nun zu dem besonderen Falle symmetrischer Formen. Durch die Annahme

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad a'_{ik} = a'_{ki} \quad \text{für} \quad i, k = 1, 2, 3$$

werden $f(xy)$, $f'(xy)$ Polarformen der quadratischen Formen $f(xx)$, $f'(xx)$; zugleich werden $\varphi(uv)$, $\varphi'(uv)$, $\Phi(uv)$ symmetrisch. Dient f als Abkürzung für $f(xx)$, φ für $\varphi(uv)$, f_i für $f_i(x)$ u. s. w., so bestehen (Nr. 12) die Identitäten:

$$\sum A_{ik} f_i f_k = \Theta f - \Delta f', \qquad \sum A_{ik} f'_i f'_k = \Theta' f' - \Delta' f.$$

Bekanntlich stellt die Gleichung $\Phi = 0$ den Ort der Geraden dar, welche aus den Kegelschnitten $f = 0$, $f' = 0$ harmonische Punktepaare herausschneiden.

Es handelt sich um die Ausartungen von Φ, d. h. um die Fälle, wo $\det \Phi = \Theta\Theta' - \Delta\Delta'$ verschwindet. Ich nehme also zunächst an, dass $\det \Phi = 0$ ist, während adj Φ und auch $\Delta\Delta'$ noch von Null verschieden bleiben sollen. Die Gleichungen $f = 0$ und $f' = 0$ stellen alsdann eigentliche Kegelschnitte dar, Φ zerfällt in ein Product $u_\xi u_\eta$, die Strahlenbüschel ξ und η liegen getrennt und umfassen die Träger harmonischer Schnittpunktpaare mit jenen Kegelschnitten. Zugleich wird $\Theta : \Delta = \Delta' : \Theta'$ und

$$\Theta f - \Delta f' = -\frac{\Delta}{\Theta'}(\Theta' f' - \Delta' f) = f(x\xi)\, f(x\eta) = -\frac{\Delta}{\Theta'} f'(x\xi)\, f'(x\eta),$$

d. h. $\Theta f - \Delta f' = 0$ ist einer der drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels ff', etwa mit dem Doppelpunkte r; und zwar besteht derselbe aus zwei verschiedenen Geraden, welche den beiden Kegelschnitten f und f' in den nämlichen Punkten, etwa $a\,b$ bez. $c\,d$ begegnen; endlich sind ξ und η die Pole dieser Geraden für f und für f', etwa ξ der Pol der ab für f und der cd für f', η der Pol der cd für f und der ab für f'. Die Gerade $\xi\eta$ ist demnach für alle Kegelschnitte des Büschels die Polare des Punktes r; auf ihr treffen sich die Geraden bc und ad in einem Punkte p, die Geraden ca und bd in einem

Punkte q, und da die Strahlen pr, qr durch ab, cd harmonisch getrennt werden, so bilden auch die Pole $pq\,\xi\eta$ eine harmonische Punktreihe.

19. Hieraus ergeben sich auch die nach Nr. 14 dem vorliegenden Falle eigenthümlichen Involutionen. Man kann auf der Geraden $\xi\eta$ je zwei Punkte einander zuordnen, welche für f und f' dieselbe (durch r laufende) Polare besitzen; diese projective Zuordnung mit den Doppelpunkten pq ist involutorisch, weil in ihr ξ mit η ein Paar bildet; sie fällt mit der Involution zusammen, welche die Gerade $\xi\eta$ aus den Kegelschnitten des Büschels herausschneidet*). Man kann in dem Strahlenbüschel r je zwei Strahlen einander zuordnen, welche für f und f' denselben Pol (auf $\xi\eta$) besitzen; diese Paare liegen ebenfalls in Involution und zu den obigen Punktpaaren perspectiv.

Wie schon bemerkt, lässt sich jedes derartige Punktpaar mit $abcd$ durch einen Kegelschnitt verbinden. Insbesondere läuft durch $abcd\xi\eta$ ein Kegelschnitt k, auf welchem jeder Punkt nach ξ und η conjugirte Strahlen sowohl für f wie für f' entsendet. Denn ξa, ηa sind für f und f' conjugirt u. s. w.

Noch sei auf den Zusammenhang hingewiesen, in welchem unsre Figur mit gewissen, in metrischer Hinsicht ausgezeichneten Kegelflächen 2. O. steht. Man verlege die Ebene der Figur nach dem Unendlichen, den Kegelschnitt f' nach dem Durchschnitt der Ebene mit allen Kugeln und verbinde die Punkte der Figur mit irgend einem Punkte O im Endlichen. Dann gehen aus den Linien f, f', k drei Kegel 2. O. hervor: F, F', K, und die Paare senkrechter Strahlen oder Ebenen des Bündels O sind die Paare conjugirter Elemente für F'. Demnach ist F ein Kegel des Pappus**), d. i. ein Kegel 2. O., welcher aus den Ebenen einer gewissen Geraden $O\xi$ (und mithin auch aus denen einer zweiten Geraden $O\eta$) je zwei senkrechte Strahlen herausschneidet; K ein orthogonaler Kegel (nach Schroeter, Journal f. Math. 1878 Bd. 85 S. 79), dessen Kanten mit zwei Strahlen $O\xi$, $O\eta$ durch je zwei rechtwinklige (hier in Bezug auf F conjugirte) Ebenen verbunden werden, — der mit F concyklische orthogonale Kegel (Th. Meyer a. a. O. S. 18). —

20. Dass die Kegelschnitte f und f' einander berühren, ist nicht ausgeschlossen. Die Berührung muss aber dann im Punkte r erfolgen, so

---

*) Wird $\xi\eta$ von f in FF', von f' in GG' geschnitten, so liegen FF', GG' mit einander und mit pq harmonisch. Die aus solchen Paaren FF', GG' in Nr. 4 hergestellte Involution stimmt mit der obigen überein.

**) Siehe Theodor Meyer: Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette. Strassburger Dissertation, Berlin 1884. Dort sind die Benennungen „Kegel des Pappus" und „Kegel des Hachette" eingeführt. Der letztere ist der supplementäre Kegel des ersteren.

dass etwa q, a und d mit r zusammenfallen; denn wegen $\Theta\Theta' = \Delta\Delta'$ wird die Discriminante von det $(\varrho f + \sigma f')$:

$$4(3\Delta\Theta' - \Theta^2)(3\Theta\Delta' - \Theta'^2) - (9\Delta\Delta' - \Theta\Theta')^2 = -12\frac{\Delta'}{\Theta}(\Theta^2 + \Delta\Theta')^2,$$

und andrerseits ist

$$3\Delta\varrho^2 + 2\Theta\varrho\sigma + \Theta'\sigma^2 = \Delta(\Theta^2 + \Delta\Theta') \quad \text{für} \quad \varrho = \Theta,\ \sigma' = -\Delta.$$

Am Kegelschnitt f wird die Tangente des Punktes a von den Tangenten der Punkte b, c in ξ bezw. η, von der Geraden bc in p getroffen. Aus der hierdurch bedingten harmonischen Lage der Punkte $\xi\eta ap$ folgen die übrigen Eigenschaften der Figur.

Um auch den Fall $\Delta\Delta' = 0$ (also $\Delta\Delta' = \Theta\Theta' = 0$) zu erledigen, nehmen wir zuerst etwa Δ von Null verschieden, aber $\Delta' = 0$. Unter der Voraussetzung $\Delta' = \Theta = 0$ zerfällt f' in zwei für f conjugirte Geraden, von denen im Falle $\Delta' = \Theta = \Theta' = 0$ die eine f berührt. Unter der Voraussetzung $\Delta' = \Theta' = 0$ zerfällt f' in zwei Geraden, welche sich auf f begegnen, etwa in b, und f ausserdem etwa in a und c schneiden; $\Theta f - \Delta f' = 0$ zerfällt in die Gerade ac und die Tangente des Punktes b, $\Phi = 0$ in den Punkt b und den Pol β der ac. Dass jede Gerade durch β (d. i. jede zu ac conjugirte Gerade, also die Polare eines beliebigen Punktes B der ac) die Geraden bc, ba in conjugirten Polen A, C schneidet, ist eine bekannte Eigenschaft des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks abc.*)

Zerfällt endlich sowohl f wie f', so geht eine Gerade des einen Linienpaares durch den Doppelpunkt des andern; nur eine der Grössen Θ, Θ' wird Null.

21. In der Reihe der Ausartungen von Φ folgt jetzt der Fall, wo adj Φ für alle u verschwindet, aber nicht Φ selbst, d. i. $\Phi = c\,u_\xi^2$, $c \neq 0$.

Zuerst sei wieder $\Delta\Delta'$ von Null verschieden. Dann wird man nach Nr. 14 schreiben:

$$f'(xx) = f(\xi\xi)\,f(xx) - 2\big(f(xy)\big)^2,$$

wo ξ einen beliebigen, dem Kegelschnitt f (und mithin auch f') nicht angehörigen Punkt bedeutet, dessen Polare ω für f — zugleich seine Polare für f' — durch die Gleichungen $\xi_i = \varphi_i(\omega)$ bestimmt werden kann. Ebenfalls nach Nr. 14 ist $\Phi = 2\Delta u_\xi^2$ und

$$\begin{aligned}\varphi'(uu) &= -f(\xi\xi)\left\{f(\xi\xi)\,\varphi(uu) - 2\Delta u_\xi^2\right\}\\ &= -\Delta f(\xi\xi)\left\{\varphi(\omega\omega)\,\varphi(uu) - 2\big(\varphi(u\omega)\big)^2\right\}.\end{aligned}$$

*) Reye: Die Geometrie der Lage I, 3. Aufl. 1886 S. 102. Ein besonderer Fall ist der Satz, wonach je zwei Supplementarsehnen des Kegelschnittes conjugirte Richtungen besitzen. — Das Dreieck abc und das ihm eingeschriebene Poldreieck ABC erscheinen perspectiv in einem gewissen Punkte des Kegelschnittes.

Die beiden so dargestellten Kegelschnitte befinden sich in doppelter Berührung; die gemeinschaftlichen Tangenten treffen sich in ξ und berühren auf ω. Die Strahlen des Büschels ξ — und nur diese — schneiden f und f' in harmonischen Punktpaaren; die Punkte der Geraden ω — und nur diese — entsenden an f und f' harmonische Tangentenpaare. Jeder der beiden Kegelschnitte ist seine eigene Polarfigur in Bezug auf den andern. Derartige Kegelschnitte behandelt Herr F. Gerbaldi in Nr. VI der Abhandlung: Sul sistema di due coniche (Annali di Matematica 1889/90 Serie 2 T. 17 p. 161) und nennt sie „conjugirte Kegelschnitte in Bezug auf den Punkt ξ oder die Gerade ω."

Ist $\Delta \neq 0$, aber $\Delta' = 0$, so bedeutet f' eine doppelt zu zählende Tangente von f; sind beide Determinanten Null, so stellen f, f' Strahlenpaare eines Büschels dar, welche einander nicht harmonisch trennen (Nr. 15).

22. Auch hier — wie in Nr. 19 — treten gewisse, mit den in Nr. 4 betrachteten verwandte, Punkt- und Strahlen-Involutionen auf, diesmal aber in unendlicher Menge, nämlich auf jeder Geraden durch ξ und in jedem Punkte von ω. Man verbinde ξ mit irgend einem anderen Punkte P der Ebene durch eine Gerade, welche ω in η, f in FF', f' in GG' schneidet, so dass die Paare $\xi\eta$, FF', GG' zu je zweien harmonisch liegen, und bezeichne den harmonischen Punkt zu $\xi\eta P$ mit Q; dann ist auf $\xi\eta$ ein gewisser Punkt p' zugleich dem Punkte P für f und dem Punkte Q für f', ebenso ein Punkt q' (der harmonische zu $\xi\eta p'$) zugleich P für f' und Q für f conjugirt. Man verzeichne ferner auf ω denjenigen Punkt ζ, welcher ξ und η zu einem Poldreieck von f und f' ergänzt (vorausgesetzt wird $\Delta\Delta' \neq 0$); dann sind $\zeta P p'$ und $\zeta Q q'$ Poldreiecke von f, $\zeta P q'$ und $\zeta Q p'$ Poldreiecke von f'.

Wenn P die Ebene durchwandert, so beschreibt Q eine projective Figur, und zwar entsteht eine durch ω als Axe und ξ als Centrum bestimmte involutorische Beziehung, in welcher auch p' und q' einander entsprechen. Legt man daher auf ω einen Punkt O (mithin in dem Büschel ξ einen Strahl $O\xi = \omega'$) fest, und bringt man die Geraden $\zeta p'$ und OQ in P', die entsprechenden Geraden $\zeta q'$ und OP in Q' zum Schneiden, so sind die mit P veränderlichen Punkte P' und Q' ebenfalls entsprechende Punkte in jener Projectivität. Mit P ist aber sowohl P', wie Q' durch quadratische, birationale und überdies symmetrische Verwandtschaft verknüpft, nämlich P' als der harmonische Pol von P für den Kegelschnitt f und zugleich für das diesem conjugirte Linienpaar $\omega\omega'$, Q' als der in der Geraden OP enthaltene harmonische Pol von P für den Kegelschnitt f'. Wir sind also im Stande, diese beiden Arten von quadratischer Verwandtschaft durch Zuziehung einer involutorischen Projectivität in einander überzuführen.

Ueberhaupt wird jede quadratische, birationale und symmetrische Verwandtschaft (vergl. Nr. 11) durch zwei bilineare Gleichungen $g(xy)=0$, $g'(xy)=0$ dargestellt, welche sich mit dem Systeme $g(yx)=0$, $g'(yx)=0$ decken müssen; dabei ist jedoch der Fall auszuschliessen, dass g und g' gleichzeitig alternirende Formen sind. Entweder sind nun die Formen g und g' beide symmetrisch; dann sind je zwei zugeordnete Punkte harmonische Pole in Bezug auf ein Büschel von Kegelschnitten. Oder man kann g und g' durch eine symmetrische und eine alternirende Form ersetzen (denn wenn etwa g weder symmetrisch noch alternirend ist, so deckt sich das System $g=g'=0$ mit dem Systeme $g(xy)=g(yx)=0$, und die Summe der Formen $g(xy)$, $g(yx)$ ist symmetrisch, ihre Differenz alternirend); dann liegen je zwei zugeordnete Punkte auf einem Strahle eines bestimmten Büschels harmonisch gegen einen bestimmten Kegelschnitt. Zwischen den hiernach einzig möglichen beiden Arten solcher Verwandtschaft hat sich oben ein linearer Zusammenhang ergeben. Geht man von der ersten Art aus, so hat man in dem Kegelschnittbüschel ein Linienpaar $\omega\omega'$ zu ermitteln, dann denjenigen Kegelschnitt f des Büschels, welcher $\omega\omega'$ in harmonischen Punkten schneidet, u. s. w.

23. Die letzte Möglichkeit ist die, dass alle Coefficienten von Φ verschwinden (vergl. Nr. 16). Dann bedeuten $f=0$, $f'=0$ Linienpaare mit gleichem Doppelpunkt und in harmonischer Lage. Sind die Linien des Paares $f=0$ von einander verschieden, so darf man wieder, wie in Nr. 21:

$$f'(xx)=f(\xi\xi)\,f(xx)-2\big(f(x\xi)\big)^2$$

nehmen, wo ξ jetzt einen beliebigen Punkt der Ebene vorstellt, nur nicht den Doppelpunkt von f (vergl. Nr. 4). Besteht jedoch f aus zwei gleichen Factoren, so ist f' das Product eines solchen Factors in eine beliebige lineare Form.

Analog zu dem in Nr. 17 eingeschlagenen Gange bringen wir hiermit die symmetrische Determinante sechsten Grades*)

$$H=\begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{22} & -2a_{23} & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & a_{11} & 0 & -2a_{31} & 0 \\ a_{22} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & -2a_{12} \\ -2a_{23} & 0 & 0 & -2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{31} \\ 0 & -2a_{31} & 0 & 2a_{12} & -2a_{22} & 2a_{23} \\ 0 & 0 & -2a_{12} & 2a_{31} & 2a_{23} & -2a_{33} \end{vmatrix},$$

*) Auf diese Determinante wurde ich durch eine von Herrn A. Breuer zu Trautenau im Januar d. J. mir zugeschickte Schrift: Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung, Eisenach 1888, aufmerksam. Herr Breuer ist zu der Determinante — mit entgegengesetztem Vorzeichen — durch eine eigen-

die Hesse'sche Determinante von Δ nach $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$, in Verbindung. Diesmal ist H durch das Quadrat von Δ theilbar, $H = -16\Delta^2$.

Man kann H als die Determinante der in den je sechs Grössen a'_{ik}, a''_{ik} bilinearen Invariante $\sum A_{ik}\,a''_{ik}$ dreier quadratischen Formen f, f', f'' auffassen. Diese (in den $a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik}$ symmetrische) Invariante*) geht, wenn man $u_i u_k$ für a'_{ik}, $v_i v_k$ für a''_{ik} einsetzt (vergl. Nr. 17), in den Ausdruck

$$\sum a_{ik}(uv)_i(uv_k), \text{ d. i. } v_x^2 f(yy) - 2v_x v_y f(xy) + v_y^2 f(xx)$$

über, wobei $u_i = (xy)_i$ für $i = 1, 2, 3$ zu nehmen ist. In der That entsteht $H = 0$ als Bedingung für die Zerlegbarkeit von f am einfachsten, wenn man davon ausgeht, dass jeder Punkt uv auf f liegen, d. h. dass bei allen u der vorstehende Ausdruck Null werden muss, falls eine Gerade v ganz zu f gehören soll. Zugleich erhält man für diesen Fall die Zerlegung von f in lineare Factoren:

$$v_y^2 \cdot f(xx) = v_x\left\{2v_y f(xy) - v_x f(yy)\right\},$$

wo y einen beliebigen Punkt ausserhalb der Geraden v bedeutet.

24. In dem Elementensysteme H sind auch die Adjuncten der Elemente durch Δ theilbar, nämlich gleich den mit -8 multiplicirten Elementen, aus welchen sich die Determinante des Ausdrucks

$$f(\xi\xi)f(xx) - 2\left(f(x\xi)\right)^2$$

zusammensetzt, wenn man denselben als bilineare Form der Reihe $x_1^2, x_2^2, x_3^2, 2x_2x_3, 2x_3x_1, 2x_1x_2$ und der Reihe $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, 2\xi_2\xi_3, 2\xi_3\xi_1, 2\xi_1\xi_2$ auffasst. Wegen der Begründung darf auf die in Nr. 21 über Φ gemachte Angabe und auf Nr. 17 verwiesen werden.

Im Falle $\Delta = 0$ sinkt für das System H der Rang (nach der von Herrn Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1884 S. 1078, eingeführten Ausdrucksweise) von 6 auf 4, vorausgesetzt dass nicht zugleich alle a_{ik} Null werden, wodurch der Rang sich auf 3 erniedrigen würde. Eine weitere Erniedrigung ist nicht möglich, es müsste denn schon f identisch verschwinden. Diese Verhältnisse lassen sich aus der Determinante selbst nachweisen.

Die entsprechende Determinante zehnten Grades im Gebiete der ternären cubischen Form besitzt, wie Herr Rosanes neuerdings (diese Annalen 1890 Bd. 36 S. 316) bewiesen hat, die Eigenschaft, dass sie selbst und alle ihre ersten Minoren immer verschwinden.

---

thümliche Elimination gelangt und hat durch Ausrechnung der Determinante den Werth $16\Delta^2$ erhalten, a. a. O. S. 30.

*) S. Nr. 17 Fussnote. Eine neue Deutung dieser Invariante giebt Herr Wölffing, diese Annalen 1890 Bd. 36 S. 113f.

V.

Bilineare Formen mit beliebig vielen Veränderlichen.

25. Im Anschluss an die Bezeichnungen in Bd. 23 S. 423—427 werde eine bilineare Form der Veränderlichen x und der contragredienten Veränderlichen u eingeführt:

$$f(xu) = \sum a_{ik} x_i u_k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ferner für $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_{i0} = x_i, \quad x_{i1} = a_{1i} x_{10} + a_{2i} x_{20} + \cdots + a_{ni} x_{n0},$$
$$x_{i2} = a_{1i} x_{11} + a_{2i} x_{21} + \cdots + a_{ni} x_{n1}$$

u. s. f., sodann

$$f_1(xu) = \sum_i x_{i2} u_i, \quad f_2(xu) = \sum_i x_{i3} u_i \quad \text{u. s. f.}$$

Es ist nun bekannt, dass für $n = 3$ eine Beziehung

$$f_2 - A_1 f_1 + A_2 f_2 - A_3 u_x = 0$$

besteht, deren Coefficienten auch in der Gleichung

$$\det(f + \sigma u_x) = \sigma^3 + A_1 \sigma^2 + A_2 \sigma + A_3$$

auftreten. Diese Beziehung, welche sich sofort ergiebt, wenn man f in der — allerdings nicht immer zulässigen — Gestalt $\sum a_{ii} x_i u_i$ annimmt, ist von Clebsch und Gordan, diese Annalen 1869 Bd. 1 S. 374 und 379, sowie in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I. 1876 S. 989—991 durch symbolische Rechnung, in meiner Arbeit Bd. 23 S. 425—428 (s. auch Nr. 5 der vorliegenden Arbeit) auf anderem Wege hergestellt worden. Die entsprechende Thatsache für beliebiges n hat Herr Netto, gelegentlich seiner noch nicht veröffentlichten Untersuchungen über lineare Substitutionen, im Juli 1888 gefunden und nebst seinem Beweise mir mitgetheilt. Hierdurch veranlasst, habe ich damals eine Verallgemeinerung des a. a. O. von mir eingeschlagenen Weges aufgesucht.

26. Bei beliebigem n setze ich:

$$\det(f + \sigma u_x) = \sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + A_2 \sigma^{n-2} + \cdots + A_n,$$

$$\sum_k \begin{vmatrix} x_{i,n-1} & a_{ki} \\ x_{k,n-1} & a_{kk} \end{vmatrix} = \sum_k \sum_l x_{l,n-2} \begin{vmatrix} a_{li} & a_{ki} \\ a_{lk} & a_{kk} \end{vmatrix} = R_1,$$

$$\sum_{k,l} \begin{vmatrix} x_{i,n-2} & a_{ki} & a_{li} \\ x_{k,n-2} & a_{kk} & a_{lk} \\ x_{l,n-2} & a_{kl} & a_{ll} \end{vmatrix} = \sum_{k,l} \sum_m x_{m,n-3} \begin{vmatrix} a_{mi} & a_{ki} & a_{li} \\ a_{mk} & a_{kk} & a_{lk} \\ a_{ml} & a_{kl} & a_{ll} \end{vmatrix} = R_2$$

u. s. f., wo i festgehalten wird, während $k, l, m, \ldots$ bei den Summationen die Werthe $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen, jedoch ohne Wiederholung der Combinationen. Dann kommt:

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1\; x_{i,n-1} - x_{in},\\
R_2 &= A_2\; x_{i,n-2} - R_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_{n-1} &= A_{n-1} x_{i1} \quad - R_{n-2},\\
0 &= A_n\; x_{i0} \quad - R_{n-1}
\end{aligned}$$

und durch Addition unter Beifügung abwechselnder Vorzeichen:

$$\begin{gathered}
x_{in} - A_1 x_{i,n-1} + A_2 x_{i,n-2} - \cdots + (-1)^n A_n x_{i0} = 0,\\
f_{n-1} - A_1 f_{n-2} + A_2 f_{n-3} - \cdots + (-1)^{n-1} A_{n-1} f + (-1)^n A_n u_x = 0.
\end{gathered}$$

In der hier benutzten Gruppe von n Gleichungen ist die erste eine Ausdehnung der Formel (13) in Bd. 23 S. 425, da R_1 für $n=3$ den Coefficienten von u_i in der Form $\psi(xu)$ vorstellt, wenn man die x_λ durch die $x_{\lambda 2}$ ersetzt.

Giessen, Juli 1890.

Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen.

(Mit einer Figurentafel).

Von

ROBERT FRICKE in Berlin.

Herr Poincaré hat in seiner Abhandlung*) „*Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique*" ein sehr merkwürdiges Princip entwickelt, von den indefiniten ternären quadratischen Formen aus unendliche Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen zu definiren; und zwar gehören die so auf arithmetischem Wege zu gewinnenden Gruppen zu denen, die einen endlichen Fundamentalbereich besitzen**). Bei dem grossen Werthe, welchen die gedachten Entwicklungen Poincaré's sowohl für die Gruppentheorie wie Arithmetik besitzen, sind vielleicht die folgenden Specialentwicklungen über den in Rede stehenden Gegenstand von einigem Interesse. Wir ziehen etwa nur Formen der Gestalt $(ax^2 + by^2 + cz^2)$ heran und unter ihnen nur solche von Primzahldeterminante q. Es soll sich also um die Formen der Gestalt $(\pm qx^2 \mp y^2 - z^2)$ handeln, q dabei als positive Primzahl gedacht, und wenn wir wiederum hierbei nur die Formen $(qx^2 - y^2 - z^2)$ berücksichtigen, so geschieht dies im wesentlichen deshalb, weil die Formen $(-qx^2 + y^2 - z^2)$ durchgehends die Null darzustellen vermögen und dieserhalb, wie wir noch sehen werden, auf bekannte Gegenstände zurückführen. Es soll also gelten, für die Formen $(qx^2 - y^2 - z^2)$ den Ansatz Poincaré's zu illustriren bez. zur Durchbildung zu bringen.

---

*) Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4[te] Folge, Bd. 3 (1887).

**) Bezüglich der hier zu brauchenden Begriffsbestimmungen und Benennungen muss ich der Kürze halber auf meine Bearbeitung der Vorlesungen F. Klein's über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen (Bd. 1, Leipzig, 1890) verweisen.

Erster Theil.*)

Aufstellung aller ganzzahligen Substitutionen der Form $(qx^2 - y^2 - z^2)$ in sich, sowie der entsprechenden Substitutionen der einzelnen Veränderlichen ω.

§ 1.

Allgemeine Sätze über die Transformation einer ternären quadratischen Form in sich.

Es sei $f(x, y, z)$ eine noch nicht näher specificirte, indefinite ternäre quadratische Form, die also beliebige reelle Coefficienten besitzt und, mit Null identisch gesetzt, einen reellen Kegelschnitt darstellt. Es möge ferner in

$$(1)\qquad S: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

eine Substitution mit irgend welchen reellen Coefficienten vorliegen, welche der Bedingung

$$(2)\qquad f(x', y', z') = f(x, y, z)$$

genügt und also f in sich transformirt. Diese Substitution S hat alsdann mehrere wichtige Eigenschaften, die wir durch die folgende Entwicklung in Erfahrung bringen.

Man führe an Stelle der bisherigen Variabelen die neuen ξ, η, ζ durch die Substitution

$$(3)\qquad T: \begin{cases} \xi = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z, \\ \eta = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z, \\ \zeta = c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z \end{cases}$$

ein, und zwar bestimmen wir die Coefficienten c derart, dass $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ zwei Tangenten von $f = 0$ mit willkürlich zu wählenden Berührungspunkten sind, während $\eta = 0$ die Verbindungslinie dieser Berührungspunkte darstellt. Es sind nach Wahl der Berührungspunkte die ξ, η, ζ je nur erst bis auf numerische Factoren bestimmt, und über die letzteren verfügen wir derart, dass einerseits die Form f in

*) Für die erste Hälfte dieses Theils kommen ausser Poincaré's gen. Arbeit ältere Entwicklungen von Hermite, Cayley u. a. in Betracht; inzwischen ist die Gestalt derselben für die vorliegenden Zwecke nicht ohne weiteres brauchbar. Die Beziehungen auf Aequivalenz und Reduction der ternären Formen bleiben im Texte ausserhalb der Entwicklung.

die neue Gestalt $f = \text{const.}\,(\xi\zeta - \eta^2)$ übergeht, und dass andrerseits die Determinante von T gleich 1 ist.

Jetzt entspricht jeder Substitution S, welche f in sich transformirt, eine Substitution $U = TST^{-1}$, welche dasselbe für $(\xi\zeta - \eta^2)$ leistet, und umgekehrt correspondirt jeder Substitution U eine $S = T^{-1}UT$. Die Gesammtheit der Substitutionen U aber, die eine ∞^3-fache Mannigfaltigkeit darstellt, lässt sich leicht charakterisiren. Durch eine Substitution U werden nämlich $\xi = 0$ und $\zeta = 0$ wieder in Tangenten $\xi' = 0$, $\zeta' = 0$ von $\xi\eta - \zeta^2 = 0$ transformirt, während $\eta' = 0$ die Verbindungslinie der neuen Berührungspunkte ist. Dieserhalb dürfen wir, wie man leicht ins einzelne nachweist, für U die allgemeine Gestalt in Ansatz bringen:

$$(4) \qquad U: \begin{cases} \xi' = \xi\alpha^2 + 2\eta\,\alpha\gamma + \zeta\gamma^2, \\ \eta' = \xi\alpha\beta + \eta(\alpha\delta + \beta\gamma) + \zeta\gamma\delta, \\ \zeta' = \xi\beta^2 + 2\eta\beta\delta + \zeta\delta^2, \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewisse reelle Zahlen sind. Eine einfache Rechnung liefert hier

$$\xi'\zeta' - \eta'^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(\xi\zeta - \eta^2),$$

so dass die übrigens willkürlichen reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der einen Bedingung zu unterwerfen sind

$$(5) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Je nachdem hier das obere oder untere Zeichen stattfindet, nennen wir U eine *Substitution oder Operation der ersten bez. der zweiten Art*. Diese Fallunterscheidung behält ihre Bedeutung beim Rückgang zu den Substitutionen S. Um also bei einer Substitution S zu unterscheiden, ob sie von der ersten oder zweiten Art ist, haben wir S in das entsprechende U überzuführen, alsdann vorkommenden Falls einen (für die Transformation von f in sich gleichgültigen) Zeichenwechsel der neun Coefficienten auszuführen, um direct die Gestalt (4) mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu erreichen. Diese letzteren Zahlen sind dann, wie man sieht, bis aufs Zeichen bestimmt und also ist $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ absolut fixirt. — Man bemerke übrigens noch, dass die Determinante der Substitution (4) $+1$ oder -1 ist, je nachdem U zur ersten oder zweiten Art gehört.

Ist U von der ersten Art, so besitzt diese Substitution den Punkt mit den Coordinaten $\xi = 2\gamma$, $\eta = \delta - \alpha$, $\zeta = -2\beta$ zum Fixpunkte, und entsprechend wird durch dieselbe die lineare Form

$$-\beta\xi + (\alpha - \delta)\eta + \gamma\zeta$$

in sich übergeführt. Die Coordinaten des Fixpunktes werden gefunden, indem man in (4) $\xi' = \xi$, $\eta' = \eta$, $\zeta' = \zeta$ substituirt und alsdann nach ξ, η, ζ auflöst; die angegebene lineare Form giebt, gleich Null gesetzt,

die Polare des Fixpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt $\xi\zeta - \eta^2 = 0$. Für eine Operation zweiter Art U findet man durch die Substitution $\xi' = -\xi$, $\eta' = -\eta$, $\zeta' = -\zeta$ wiederum den Punkt $(2\gamma, \delta-\alpha, -2\beta)$ als Fixpunkt, aber jetzt wechselt $(-\beta\xi + (\alpha-\delta)\eta + \gamma\zeta)$ bei Ausübung von U das Zeichen.

Indem wir bei Rückgang zu S einen Zeichenwechsel der neun Coefficienten vermeiden, haben wir ohne weiteres die Sätze: Ist S von der ersten Art und also von der Determinante $+1$, so findet man einen Fixpunkt von S durch die Substitution $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$; sind dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0, so wird die lineare Form

$$(6) \qquad x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}$$

unverändert durch S in sich übergeführt. Gehört S zur zweiten Art (wo sie also die Determinante -1 hat), so giebt die Substitution $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$ einen Fixpunkt (x_0, y_0, z_0), und die zugehörige lineare Form (6) wechselt bei Ausübung von S das Zeichen.

Nun aber möge man im letzteren Falle einer Operation zweiter Art zugleich das Zeichen der neun Coefficienten der Operation S ändern, wodurch S die Determinante $+1$ erhält; alsdann gewinnt man durch die Substitution $x' = +x$, $y' = +y$, $z' = +z$ den gerade genannten Fixpunkt (x_0, y_0, z_0), und (6) geht nun ohne Zeichenwechsel in sich über, während doch auf der anderen Seite die geometrische Bedeutung und damit auch die Art von S eine Veränderung nicht erlitten hat. Man wolle also für später festhalten, dass in Anbetracht der gerade entwickelten Sätze die Vorzeichenwahl der neun Substitutionscoefficienten von Belang ist.

§ 2.

Allgemeine Gestalt der ternären Substitutionen, welche die Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ in sich transformiren.

Indem wir jetzt f mit unserer speciellen Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ identificiren, wollen wir die allgemeine Gestalt der zugehörigen Substitutionen S ausrechnen. Wir gehen davon aus, dass S im Sinne des vorigen Paragraphen den Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) besitzt, welch' letzteren wir willkürlich auswählen; nur soll vorerst der Fall, dass (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt $f = 0$ liegt, sowie auch der Punkt $y_0 = z_0 = 0$ ausgeschlossen sein; ersteren Fall müssen wir hernach besonders betrachten, der letztere wird sich von selbst mit erledigen. Indem wir aber nach allen Substitutionen S mit dem Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) und der Determinante 1 suchen, werden wir, wie wir vorhin sahen, sogleich die Gesammtheit der für f in Betracht kommenden Operationen erster und zweiter Art gewinnen.

Die gesuchte Substitution S wird mit (x_0, y_0, z_0) zugleich die lineare Form $(qxx_0 - yy_0 - zz_0)$ in sich überführen. Um demgemäss S zu berechnen, wolle man folgende Transformation des Coordinatensystems ausführen:

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x\cdot(y_0^2+z_0^2) - y\cdot x_0y_0 - z\cdot x_0z_0, \\ Y = \qquad\qquad\qquad\; y\cdot z_0 \quad - z\cdot y_0\;\;, \\ Z = x\cdot qx_0 \qquad\quad - y\cdot y_0 \quad - z\cdot z_0\;\;, \end{cases}$$

wobei die Determinante von (1) die von Null verschiedene Zahl ist:

$$(2)\qquad D = (y_0^2+z_0^2)\,(qx_0^2-y_0^2-z_0^2) = (y_0^2+z_0^2)\cdot f_0.$$

Das neue Coordinatendreieck der X, Y, Z ist so gewählt, dass jede Ecke der Pol der gegenüber liegenden Seite in Bezug auf $f = 0$ ist. Das spricht sich zugleich in der transformirten Gestalt von f aus, für welche wir erhalten:

$$(3)\qquad -Df = qX^2 + f_0Y^2 - (y_0^2+z_0^2)Z^2.$$

Durch (1) wird S in eine Substitution der Gestalt

$$(4)\qquad S': \begin{cases} X' = aX + bY, \\ Y' = cX + dY, \\ Z' = Z \end{cases}$$

übergeführt, welche die Determinante 1 besitzt und (3) in sich transformirt. Indem wir hier noch für a, b, c, d

$$a = \frac{r}{D},\quad b = \frac{s}{D},\quad c = \frac{t}{D},\quad d = \frac{u}{D}$$

schreiben, sind r, s, t, u vier reelle Zahlen der Determinante

$$(5)\qquad ru - st = D^2.$$

Diese vier Zahlen sind nun so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$q\left(\frac{r}{D}X + \frac{s}{D}Y\right)^2 + f_0\left(\frac{t}{D}X + \frac{u}{D}Y\right)^2 = qX^2 + f_0Y^2$$

identisch besteht, was explicite die drei Bedingungen giebt:

$$\begin{aligned} qr^2 + f_0t^2 &= qD^2, \\ qs^2 + f_0u^2 &= f_0D^2, \\ qrs + f_0tu &= 0. \end{aligned}$$

Wir genügen denselben und zugleich (5) in allgemeinster Weise dadurch, dass wir $r = u$, $s = -f_0v$, $t = qv$ schreiben und die zwei reellen Zahlen u, v der Bedingung

$$(6)\qquad u^2 + qf_0\cdot v^2 = D^2$$

unterwerfen. Die Substitution S' nimmt daraufhin die Gestalt an:

$$(7)\qquad X' = \frac{u}{D}\cdot X - \frac{f_0v}{D}\cdot Y,\quad Y' = \frac{qv}{D}\cdot X + \frac{u}{D}\cdot Y,\quad Z' = Z,$$

während wir für die ursprüngliche Substitution S die neun Coefficienten berechnen:

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{ccc} 1+(-y_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u-D}{Df_0}, & x_0y_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}+\frac{z_0v}{D}, & x_0z_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}-\frac{y_0v}{D} \\ -qx_0y_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}+\frac{qz_0v}{D}, & 1+(qx_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u-D}{Df_0}, & y_0z_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}-\frac{qx_0v}{D} \\ -qx_0z_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}-\frac{qy_0v}{D}, & y_0z_0\cdot\frac{u-D}{Df_0}+\frac{qx_0v}{D}, & 1+(qx_0^2-y_0^2)\cdot\frac{u-D}{Df_0} \end{array}\right|.$$

Ist jetzt der Punkt (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt $f=0$ gelegen, d. h. haben wir $f_0=0$, so führe man folgende neue Variablen ein:

$$\begin{aligned} X &= qx_0x+y_0y+z_0z, \\ Y &= \qquad\quad\; z_0y-y_0z, \\ Z &= qx_0x-y_0y-z_0z, \end{aligned}$$

wodurch f in

$$qx_0^2\cdot f = XZ-Y^2$$

transformirt wird. Die Substitution S geht über in

$$\begin{aligned} X' &= X+2\gamma Y+\gamma^2 Z, \\ Y' &= \;\pm\;(Y+\gamma Z), \\ Z' &= \qquad\quad\; Z, \end{aligned}$$

wobei γ beliebig bleibt und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem wir mit einer Operation erster oder zweiter Art zu thun haben. Für die in Betracht kommenden Operationen erster Art S finden wir von hier aus rückwärts sehr leicht die Gestalt:

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{ccc} \frac{\gamma^2+2}{2}, & \frac{\gamma(2z_0-\gamma y_0)}{2qx_0}, & -\frac{\gamma(2y_0+\gamma z_0)}{2qx_0} \\ \frac{\gamma(2z_0+\gamma y_0)}{2x_0}, & -\frac{\gamma^2y_0^2}{2qx_0^2}+1, & -\frac{\gamma(2qx_0^2+\gamma y_0z_0)}{2qx_0^2} \\ -\frac{\gamma(2y_0-\gamma z_0)}{2x_0}, & \frac{\gamma(2qx_0^2-\gamma y_0z_0)}{2qx_0^2}, & -\frac{\gamma^2z_0^2}{2qx_0^2}+1 \end{array}\right|.$$

Die hierher gehörigen Operationen zweiter Art brauchen wir nicht noch explicite auszurechnen.

Wechseln wir das Vorzeichen von v bez. γ ohne Aenderung der übrigen Bestandtheile der Formeln (8) und (9), so gelangen wir in beiden Fällen zu der zur gerade betrachteten Operation S inversen S^{-1}, wie man am leichtesten unter Gebrauch der entsprechend für die X, Y, Z bestehenden Substitutionen beweist. Bezeichnen wir übrigens die zum Gliede a_{ik} von S gehörende erste Unterdeterminante durch A_{ik}, so kleidet sich der gerade gefundene Satz in die neun Formeln

$$(10)\quad\begin{cases} A_{11}= \quad a_{11}, & A_{12}=-q a_{12}, & A_{13}=-q a_{13}, \\ A_{21}=-\frac{1}{q}\,a_{21}, & A_{22}= \quad a_{22}, & A_{23}= \quad a_{23}, \\ A_{31}=-\frac{1}{q}\,a_{31}, & A_{32}= \quad a_{32}, & A_{33}= \quad a_{33}, \end{cases}$$

wie man mit Rücksicht auf die Gestalt der Substitutionen (8) und (9) leicht erhärtet.

§ 3.
Arteintheilung der Substitutionen S.

Für die Substitutionen, deren Fixpunkt auf dem Kegelschnitt $f=0$ gelegen ist, haben wir nur die erste Art unter (9) § 2 berücksichtigt; bei der Operation (8) § 2 hingegen müssen wir jetzt noch nachträglich entscheiden, ob dieselbe zur ersten oder zweiten Art gehört. Sei erstlich $f_0>0$, so knüpfen wir an die Gestalt (7) unserer Substitution und schreiben statt X, Y, Z die neuen Veränderlichen

$$\xi=X\sqrt{q}+Z\sqrt{y_0^2+z_0^2},\quad \eta=Y\sqrt{f_0},\quad \zeta=-X\sqrt{q}+Z\sqrt{y_0^2+z_0^2}.$$

Dadurch geht f, von einem constanten Factor abgesehen, in $(\xi\zeta-\eta^2)$ über, und die Substitution (7) nimmt die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \xi' &= \frac{u+D}{2D}\cdot\xi-\frac{v\sqrt{qf_0}}{D}\cdot\eta+\frac{D-u}{2D}\cdot\zeta,\\ \eta' &= \frac{v\sqrt{qf_0}}{2D}\cdot\xi+\frac{u}{D}\cdot\eta-\frac{v\sqrt{qf_0}}{2D}\cdot\zeta,\\ \zeta' &= \frac{D-u}{2D}\cdot\xi+\frac{v\sqrt{qf_0}}{D}\cdot\eta+\frac{u+D}{2D}\cdot\zeta, \end{aligned}$$

welche sich unter (4) § 1 (möglicherweise nach Zeichenwechsel der Coefficienten) subsumiren muss. Da indessen im gegenwärtigen Falle $D>0$ und der absolute Werth von u nie grösser als D sein kann, so folgt nach früheren Regeln: *Für $f_0>0$ ist die angegebene Substitution S stets von der ersten Art.*

Ist demgegenüber $f_0<0$, so führe man die Transformation aus:

$$\xi=X\sqrt{q}+Y\sqrt{-f_0},\quad \eta=Z\sqrt{y_0^2+z_0^2},\quad \zeta=X\sqrt{q}-Y\sqrt{-f_0},$$

wodurch f von einem constanten Factor abgesehen wieder in $(\xi\zeta-\eta^2)$, S aber in:

$$\xi'=\frac{u+v\sqrt{-qf_0}}{D}\cdot\xi,\quad \eta'=\eta,\quad \zeta'=\frac{u-v\sqrt{-qf_0}}{D}\cdot\zeta$$

übergeht. Hier haben die beiden Coefficienten in der ersten und dritten Formel das nämliche Vorzeichen, und zwar dasjenige von

$\frac{2u}{D} = u'$; daher mit Rücksicht auf § 1 zugleich das Resultat: *Im Falle $f_0 < 0$ liefern die positiven u' die Operationen erster Art, die negativen u' aber diejenigen der zweiten Art.*

§ 4.

Aussonderung aller ganzzahligen Substitutionen S im Falle einer Primzahl der Form $q = 4h - 1$.

Die Gesammtheit aller Operationen S erster und zweiter Art, welche die Form $f = qx^2 - y^2 - z^2$ in sich überführen, bildet eine Gruppe; aber diese Gruppe kann, wie man sehr leicht erkennt, keinen endlichen Fundamentalbereich besitzen. Ziehen wir indes aus der Gesammtheit der Substitutionen S nur alle diejenigen heran, welche durchgehends *ganzzahlige* Coefficienten besitzen, so gewinnen wir die von Hrn. Poincaré allgemein für indefinite ternäre Formen eingeführte Gruppe, *und diese besitzt einen endlichen Fundamentalbereich.* Innerhalb dieser Gruppe bilden die ihr angehörenden Operationen *erster* Art für sich eine Untergruppe des Index zwei, die wir hinfort als $\Gamma^{(q)}$ bezeichnen wollen; demgegenüber möge die auch die Operationen *zweiter* Art umfassende Gruppe als erweiterte Gruppe $\Gamma^{(q)}$ benannt und durch $\bar{\Gamma}^{(q)}$ bezeichnet werden. Unsere ferneren Betrachtungen gelten den hierdurch definirten Gruppen, und es liegt uns demnach zuvörderst die Aufgabe ob, aus den Operationen S des vorigen Paragraphen die ganzzahligen auszusondern. In diesem Betracht verhalten sich die Primzahlen q der Gestalt $(4h - 1)$ sehr viel einfacher als diejenigen von der Gestalt $q = 4h + 1$; wir beginnen demgemäss mit den ersteren.

Hat S ausschliesslich ganzzahlige Coefficienten, so werden auch die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des oft genannten Fixpunktes ganze Zahlen sein, die wir von gemeinsamen Factoren befreit denken. Es entspringt zugleich aus den Formeln (10) § 2 der Satz, dass die Zahlen a_{21} und a_{31} durch q theilbar sein müssen. Für den gegenwärtigen Fall $q = 4h - 1$ kann f die Null nicht darstellen, es kommen also nur Substitutionen der Gestalt (8) § 2 in Betracht, welche letztere wir demnach hier zu discutiren haben. Erstlich muss für dieselbe

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1 = \frac{2u}{D} = u'$$

eine ganze Zahl sein, und ein Gleiches muss von den drei Zahlen gelten:

$$a_{12} + \frac{1}{q}\, a_{21} = \frac{2z_0 v}{D}, \quad -a_{13} - \frac{1}{q}\, a_{31} = \frac{2y_0 v}{D}, \quad a_{32} - a_{23} = \frac{2qx_0 v}{D}.$$

Hier ist nun die Fallunterscheidung zu treffen, ob f_0 prim q ist oder q als Factor enthält, welches letztere nur dann eintritt, wenn y_0 und z_0

zugleich durch q theilbar sind. Im Falle I eines gegen q primen f_0 haben offenbar auch die drei Zahlen qx_0, y_0, z_0 keinen Theiler gemein, und es wird alsdann auch

$$\frac{2v}{D} = v'$$

eine ganze Zahl sein müssen, die im Verein mit u' *der Pell'schen Gleichung* genügt:

$$u'^2 + qf_0 \cdot v'^2 = 4. \tag{1}$$

Die Substitution S nimmt daraufhin die Gestalt an

$$\begin{vmatrix} 1+(-y_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0}, & x_0y_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{z_0v'}{2}, & x_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{y_0v'}{2} \\ -qx_0y_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{qz_0v'}{2}, & 1+(qx_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0}, & y_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{qx_0v'}{2} \\ -qx_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{qy_0v'}{2}, & y_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{qx_0v'}{2}, & 1+(qx_0^2-y_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Damit wir hier neun ganze Zahlen haben, müssen erstlich die drei Ausdrücke

$$\frac{u'}{2}-\frac{qx_0^2(u'-2)}{2f_0}, \quad \frac{u'}{2}+\frac{y_0^2(u'-2)}{2f_0}, \quad \frac{u'}{2}+\frac{z_0^2(u'-2)}{2f_0} \tag{3}$$

ganze Zahlen sein, woraus man leicht folgert, dass $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$ sein muss. Darüber hinaus müssen mod. 2 die Congruenzen bestehen:

$$y_0z_0\cdot\frac{u'-2}{f_0}\equiv x_0v', \quad z_0x_0\cdot\frac{u'-2}{f_0}\equiv y_0v', \quad x_0y_0\cdot\frac{u'-2}{f_0}\equiv z_0v'. \tag{4}$$

Wir behaupten nun: *Wenn wir unter allen Lösungen der Pell'schen Gleichung* (1) *nur diejenigen mit $u'\equiv 2$, (mod. f_0) heranziehen, bekommen wir gerade die Gesammtheit der nach I gehörenden Substitutionen S.* Um diesen Satz zu belegen, müssen wir die drei Fälle unterscheiden, dass unter den drei Zahlen x_0, y_0, z_0 keine oder eine oder endlich zwei gerade sind. Sollen wir hier etwa den zweiten unter diesen Fällen ausführlich discutiren, so wird für denselben f_0 das Doppelte einer ungeraden Zahl und es muss nach (1) sowohl u' wie v' gerade sein. Da aber $f_0v'^2$ durch 8 theilbar ist, so wird zufolge (1) auch u' das Doppelte einer ungeraden Zahl sein, und sonach haben wir in $\frac{u'-2}{2f_0}$ eine ganze Zahl. Den Bedingungen (3) und (4) geschieht demnach thatsächlich Genüge. In ähnlicher Weise überzeugt man sich auch in den beiden anderen Fällen von der Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Im Falle II eines durch q theilbaren f_0 können wir nur folgern, dass

$$\frac{2qv}{D} = v'$$

eine ganze Zahl ist, die im Verein mit der ganzen Zahl $\frac{2u}{D} = u'$ nunmehr der Pell'schen Gleichung genügt:

$$(5)\qquad u'^2 + \frac{1}{q} f_0 \cdot v'^2 = 4.$$

Die Substitution S aber gewinnt die Gestalt:

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} 1+(-y_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0}, & x_0y_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{z_0v'}{2q}, & x_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{y_0v'}{2q} \\ -qx_0y_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{z_0v'}{2}, & 1+(qx_0^2-z_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0}, & y_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{x_0v'}{2} \\ -qx_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}-\frac{y_0v'}{2}, & y_0z_0\cdot\frac{u'-2}{2f_0}+\frac{x_0v'}{2}, & 1+(qx_0^2-y_0^2)\cdot\frac{u'-2}{2f_0} \end{vmatrix}.$$

Man führt die fernere Discussion wieder leicht zu Ende und findet, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung für eine ganzzahlige Substitution S das Bestehen der Congruenz ist:*

$$(7)\qquad u' \equiv 2, \quad \left(\text{mod.}\, \frac{1}{q} f_0\right).$$

Hiermit sind alle Operationen der erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}^{(q)}$ für den Fall $q = 4h - 1$ charakterisirt.

§ 5.

Aussonderung aller ganzzahligen Substitutionen S für den Fall einer Primzahl q der Gestalt $q = 4h + 1$.

Etwas complicirter gestaltet sich die Lösung der gleichen Aufgabe für den Fall, dass die Primzahl q die Gestalt $q = 4h + 1$ hat. Nehmen wir hier erstlich an, dass y_0 und z_0 nicht beide durch q theilbar sind (wobei aber f_0 selbst noch sehr wohl ein Vielfaches von q sein kann), so wird wiederum $\frac{2v}{D} = v'$ ganzzahlig und es kommen die Formeln (1) und (2) des vorigen Paragraphen zur Geltung. Indem wir dann weiter die ganzzahligen Ausdrücke (3) des vorigen Paragraphen, sowie die Congruenzen (4) heranziehen, gewinnen wir wieder *als nothwendige Bedingung $u' \equiv 2$ (mod. f_0). Dieselbe ist auch im allgemeinen hinreichend*, nur dass die beiden folgenden Ausnahmen bestehen: *Ist eine der Zahlen y_0, z_0 gerade, die andere und x_0 aber ungerade, so dürfen wir nur die Lösungen der Pell'schen Gleichung* (1) § 4 *heranziehen, für welche $u' \equiv 2$ (mod. $2f_0$) und $v' \equiv 0$ (mod. 2) ist; ist ferner eine der Zahlen y_0, z_0 ungerade, die andere und x_0 aber gerade, so haben wir in gleicher Weise $u' \equiv 2$ (mod. $2f_0$) zu verlangen.*

Sind beide Zahlen y_0, z_0 durch q theilbar, so ist $\frac{2qv}{D} = v'$ eine ganze Zahl und es tritt die Pell'sche Gleichung (5), sowie die Gestalt (6) § 4 für die Substitution S in Kraft. *Hier führt die Einzeldiscussion auf genau dieselben Bedingungen, wie in dem soeben behandelten Falle,*

nur dass überall an Stelle der Zahlmoduln f_0 *und* $2f_0$ *bez.* $\frac{1}{q}f_0$ *und* $\frac{1}{q}2f_0$ *treten.*

Endlich vermag für $q = 4h + 1$ die Form f stets die Null darzustellen, so dass wir hier auch noch die Substitution (9) § 2 zu berücksichtigen haben, deren Fixpunkt (x_0, y_0, z_0) auf dem Kegelschnitt selbst gelegen ist. Die Bedingungen für die Ganzzahligkeit dieser Substitution sind die folgenden: *Ist wenigstens eine der Zahlen* y_0, z_0 *prim gegen* q, *so ist* $\gamma \equiv 0$, (*mod.* $2qx_0$) *die hinreichende und nothwendige Bedingung; ist aber* $y_0 \equiv z_0 \equiv 0$, (*mod.* q), *so tritt an Stelle dieser Congruenz für die ganze Zahl* γ *die nachfolgende* $\gamma \equiv 0$, (*mod.* $2x_0$). Uebrigens bringen wir in Erinnerung, dass die hiermit gemeinten Substitutionen durchgehends der *ersten* Art angehören.

§ 6.

Transformation der Substitutionen S in linear-gebrochene Substitutionen einer einzigen Variabelen ω.

Von besonderer Wichtigkeit ist für die Folge ein gewisser mit der Coordinatenebene der x, y, z vorzunehmender Umformungsprocess, bei dem das Innere der durch $f = 0$ gegebenen Ellipse*) in eine einfach und vollständig bedeckte Halbebene (etwa die positive) einer complexen Variabelen ω übergeht, während die geraden Secanten der Ellipse die zur reellen ω-Axe orthogonalen Halbkreise liefern**).

Um die analytische Beziehung des Ellipseninnern zur Halbebene festzulegen, führen wir die Coordinatentransformation aus:

$$\xi = x\sqrt{q} - y, \qquad \eta = z, \qquad \zeta = x\sqrt{q} + y,$$

wodurch f in $(\xi\zeta - \eta^2)$ übergeht. Sodann setzen wir zunächst für die Punkte der Ellipse selbst $\omega = \frac{\eta}{\xi}$, so dass das Geradenbüschel $\omega\xi - \eta = 0$ in das System der zur reellen ω-Axe senkrechten Geraden übergeht. Wenn wir hierauf für einen Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0) im Innern der Ellipse den zugehörigen Werth $\omega_0 = X_0 + iY_0$ berechnen wollen, so ist erstlich zufolge unserer gerade geschehenen Festsetzung $X_0 = \frac{\eta_0}{\xi_0}$. Weiter ziehen wir in der Ebene der Ellipse die Gerade $\eta\zeta_0 - \zeta\eta_0 = 0$, der in der ω-Halbebene der Halbkreis durch $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\zeta_0}{\eta_0}$ zu-

*) Man denke das Coordinatendreieck der x, y, z derart fixiert, dass $f = 0$ thatsächlich eine Ellipse vorstellt.

**) Dieser Process ist für die Modulfunctionen l. c. pg. 239 u. f. ausführlich beschrieben; er kommt im Texte gerade in entgegengesetzter Folge in Anwendung.

geordnet sein wird. Aber der Schnittpunkt dieses Halbkreises mit der Geraden $X = \frac{\eta_0}{\xi_0}$ ist der gesuchte Punkt ω_0. Indem wir also überall sogleich die unteren Indices fortlassen, kommt das Resultat: *Dem Punkte* (ξ, η, ζ) *im Innern der Ellipse oder auf dieser selbst ist der Punkt:*

$$\omega = \frac{\eta + i\sqrt{f}}{\xi} \tag{1}$$

im Innern bez. auf dem Rande der positiven ω-Halbebene zugeordnet.

Jetzt übe man auf ω die lineare Substitution

$$\omega' = \frac{\delta\omega + \beta}{\gamma\omega + \alpha} \tag{2}$$

aus, in welcher α, β, γ, δ irgend welche reelle Zahlen der Determinante 1 sind. Indem entsprechend ξ, η, ζ in ξ', η', ζ' übergehen mögen, finden wir nach kurzer Rechnung, dass letztere Grössen an ξ, η, ζ gerade durch die Substitution (4) § 1 geknüpft sind. *Der linearen Substitution* (2) *ist demgemäss die Operation erster Art U zugeordnet, welche unsere Form f in sich transformirt.*

Auf dieser Grundlage stellen wir uns die Aufgabe, die in den voraufgehenden Paragraphen ausgesonderten ganzzahligen Substitutionen erster Art S in die ihnen parallel gehenden Substitutionen (2) zu transformiren. Zu dem Ende rechne man erstlich die Substitution (4) § 1 für die x, y, z um, wo sie die Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2), & \frac{1}{2\sqrt{q}}(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2), & \frac{1}{\sqrt{q}}(\alpha\gamma+\beta\delta) \\ \frac{1}{2}\sqrt{q}(-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+\delta^2), & \frac{1}{2}(+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2), & (-\alpha\gamma+\beta\delta) \\ \sqrt{q}(\alpha\beta+\gamma\delta), & (-\alpha\beta+\gamma\delta), & (\alpha\delta+\beta\gamma) \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Diese Substitution haben wir nun zuvörderst mit (2) bez. (6) § 4 zu identificiren, was nach kurzer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned} \alpha + \delta &= \pm\sqrt{u'+2}, & \beta + \gamma &= \pm\, y_0\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}} \\ \alpha - \delta &= \pm\, z_0\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}, & \beta - \gamma &= \pm\, x_0\sqrt{q}\cdot\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}} \end{aligned} \tag{4}$$

liefert, und zwar gültig für beide Fälle. Da es sich hier einzig um Substitutionen erster Art handelt, so bemerke man zuvörderst, dass nach § 3 die unter den Quadratwurzeln der Ausdrücke (4) stehenden Zahlen jedenfalls niemals negativ werden. Wir entschliessen uns überdies, das Vorzeichen von $\sqrt{q}$ und $\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}$ stets positiv zu nehmen,

während wir das Zeichen von $\sqrt{u'+2}$ im Einzelfall demjenigen von v' entgegengesetzt wählen. Letztere Bestimmung können wir auch durch die Formeln

$$(5)\quad \sqrt{u'+2}\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}} = -v'\sqrt{q}, \quad \sqrt{u'+2}\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}} = -\frac{v'}{\sqrt{q}}$$

zum Ausdruck bringen, von denen die erste oder zweite gilt, je nachdem wenigstens eine oder keine der Zahlen y_0, z_0 prim gegen q ist. Durch ferneren Vergleich der Substitution (3) mit (2) und (6) § 4 findet man, dass nach den geschehenen Verabredungen in (4) allenthalben die oberen Zeichen gelten müssen. *Als die gesuchte ω-Substitution* (2) *entspringt demgemäss die nachfolgende:*

$$(6)\quad \omega' = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{u'+2} - z_0\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}\right)\omega + \frac{1}{2}(y_0 + x_0\sqrt{q})\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}}{\frac{1}{2}(y_0 - x_0\sqrt{q})\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}\cdot\omega + \frac{1}{2}\left(\sqrt{u'+2} + z_0\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0}}\right)},$$

wobei u' die für die einzelnen Fälle angegebene Bedeutung besitzt. Nur der eine Fall, dass $f_0 = 0$ ist, wird von der Formel (6) noch nicht mit umfasst. Hier erhalten wir

$$(7)\quad \omega' = \frac{\left(1 + \frac{a z_0}{\sqrt{q}}\right)\omega - a\left(x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)}{a\left(x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\omega + \left(1 - \frac{a z_0}{\sqrt{q}}\right)},$$

wobei a eine beliebige ganze Zahl ist, falls y_0 und z_0 beide durch q teilbar sind, während andernfalls a eine beliebige durch q teilbare ganze Zahl sein soll.

In (7) erkennt man in den Coefficienten ohne weiteres ganze Zahlen des aus der Basis $(1, \sqrt{q})$ zu bildenden Zahlkörpers, und man bemerkt nach kurzer Rechnung, dass sich auch die Coefficienten von (6) mit vier ganzen Zahlen dieser Art proportional setzen lassen. Wollten wir diese ganzzahligen Coefficienten jedoch in (6) einführen, so würde die Determinante dieser Substitution aufhören gleich 1 zu sein, was manche Unbequemlichkeit nach sich ziehen würde.

Aus (7) entsteht, den verschiedenen a entsprechend, eine cyklische Gruppe *parabolischer* Substitutionen mit dem Fixpunkte $\omega = \frac{z_0}{x_0\sqrt{q} - y_0}$, deren Erzeugende die dem kleinsten in Betracht kommenden Werthe von a zugehörige Substitution ist. Demgegenüber haben wir in (6) eine *elliptische* Substitution, falls der Punkt (x_0, y_0, z_0) im Innern der Ellipse liegt und also $f_0 > 0$ ist, dagegen eine *hyperbolische* für $f_0 < 0$. Im ersten Falle haben wir die beiden complexen Fixpunkte

$$\omega = \frac{z_0 \pm i\sqrt{f_0}}{x_0\sqrt{q} - y_0},$$

im anderen Falle zwei reelle, die den Schnittpunkten der zu (x_0, y_0, z_0) gehörenden Polare mit der Ellipse entsprechen. Immer bilden die zu demselben Zahlentripel x_0, y_0, z_0 gehörenden Substitutionen (6) eine cyklische Untergruppe innerhalb $\Gamma^{(q)}$.

Den Operationen zweiter Art der $\overline{\Gamma}^{(q)}$ brauchen wir jetzt nicht noch einmal eine directe Betrachtung zu widmen. Vielmehr genügt es zu bemerken, dass sich unter denselben stets die Operation $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$ findet, welch' letztere für die complexe Ebene ω eine Spiegelung an deren reeller Axe bedeutet. Eben diese schreiben wir aber analytisch: $\omega' = -\overline{\omega}$, unter $\overline{\omega}$ den zu ω conjugirt complexen Werth verstanden. Durch Combination dieser Operation mit den Operationen (6) bez. (7) der $\Gamma^{(q)}$ entspringt nun sogleich die gesammte $\overline{\Gamma}^{(q)}$.

Zweiter Theil.

Die Fundamentalbereiche der Gruppen $\overline{\Gamma}^{(q)}$ und $\Gamma^{(q)}$ für die niedersten Zahlwerthe der Primzahl q.

§ 1.

Plan und Methode der nächstfolgenden Entwicklungen.

Für die nun gewonnenen Gruppen werden wir jetzt eine weitere Untersuchung dadurch anbahnen, dass wir bei einer Reihe niederer Werthe von q die Fundamentalbereiche in zweckmässiger Weise fixiren und ihre Gestalt in Betracht ziehen. Für die dabei zu Tage tretenden Verhältnisse geben die bekannten an analoger Stelle in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen eintretenden Sätze in jeder Beziehung das Vorbild ab.*) Inzwischen empfiehlt es sich hier, die Untersuchung nicht sogleich innerhalb der ω-Halbebene anzustellen, sondern vielmehr vorab, im Innern der Ellipse im Einzelfall einen Fundamentalbereich abzugrenzen, um letzteren hernach in die ω-Halbebene zu übertragen.

Wie bei der Modulgruppe, so ist es auch hier in allen Fällen angezeigt, mit der erweiterten Gruppe $\overline{\Gamma}^{(q)}$ die Betrachtung zu beginnen. In der letzteren finden sich nämlich stets Operationen der Periode zwei, welche sogenannte *harmonische Perspectivitäten* vorstellen. Für die ω-Halbebene bedeuten dieselben Spiegelungen an gewissen Symmetriekreisen und den letzteren entsprechen innerhalb der Ellipse *gerade* Secanten derselben, welche die Axen eben jener Perspectivitäten sind. *Diese das Innere der Ellipse durchsetzenden Geraden sind uns dann die natürlichen Grenzlinien für die gesuchten Fundamentalbereiche.*

*) Vergl. l. c. Abschn. II, Cap. 2.

Ueber die harmonischen Perspectivitäten hinaus werden wir immer wieder die *elliptischen*, sowie gelegentlich (für $q = 4h + 1$) auch die *parabolischen* Substitutionen der $\Gamma^{(q)}$ zu brauchen haben. Die Beziehung zwischen diesen Substitutionen und jenen Perspectivitäten ist dadurch begründet, dass allemal da, wo sich im Innern der Ellipse zwei Perspectivitätsaxen schneiden, der Fixpunkt für eine der $\Gamma^{(q)}$ angehörende cyklische Untergruppe elliptischer Substitutionen sich findet. Schneiden sich in gleicher Weise zwei Perspectivitätsaxen auf der Ellipse selbst, so findet sich dort leicht ersichtlich der Fixpunkt für eine der $\Gamma^{(q)}$ angehörende cyklische Untergruppe parabolischer Substitutionen.

Endlich haben wir noch zu bemerken, dass wir für unsere Betrachtungen im Innern der Ellipse die auf diese Ellipse zu gründende projective Massbestimmung in Anwendung bringen, über welche man alles Nähere in der unten genannten Abhandlung Klein's nachsehen wolle*). In der ω-Halbebene entspringt daraus die von Poincaré für dieselbe zuerst in Anwendung gebrachte Massbestimmung**); doch kommt die letztere in der Folge nicht weiter in Betracht.

§ 2.

Die elliptischen u. s. w. Substitutionen innerhalb der Gruppen $\Gamma^{(1)}$ und $\bar{\Gamma}^{(1)}$.

Indem wir unsere Einzeluntersuchung mit dem einfachsten Falle, nämlich $q = 1$, beginnen, mögen wir zuvörderst die cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen in ihrer Gesammtheit charakterisiren, die in der $\Gamma^{(1)}$ enthalten sind. Für diesen Fall ist f_0 positiv und alsdann hat die Gleichung (1) § 4 höchstens die Lösungen $u' = 0, \pm 1, \pm 2$, wobei wir auch noch von $u' = +2$ absehen können, da diese Lösung stets auf die identische Substitution führt. Nun haben wir in allen Fällen nur solche Lösungen heranzuziehen, die der Congruenz $u' \equiv 2 \pmod{f_0}$ genügen, und also ist bei den in Rede stehenden Werthen von u' f_0 offenbar auf die vier Möglichkeiten $f_0 = 1, 2, 3, 4$ eingeschränkt. Indessen bleiben selbst die beiden letzten Werthe $f_0 = 3, 4$ ausgeschlossen; nach den Regeln des § 5 haben wir nämlich für diese beiden Fälle, wie man leicht bemerkt, die Congruenz $u' \equiv 2 \pmod{2f_0}$ zu fordern, was durch die zur Verfügung stehenden Werthe von u' in keiner Weise geleistet werden kann. Die beiden zurückbleibenden Werthe $f_0 = 1, 2$ kommen nun aber thatsächlich zur Geltung, wie die hierhergehörigen Beispiele (1, 0, 0),

---

*) *Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*, Math. Ann. Bd. 4 (1872).

**) Cf. *Poincaré*, *Théorie des groupes fuchsiens*, Acta math. Bd. 1 (1882).

(2, 1, 1) belegen. Für $f_0 = 1$ haben wir die vier Lösungen $(0, \pm 2)$, $(\pm 2, 0)$ der Pell'schen Gleichung (1) § 4, für $f_0 = 2$ aber die beiden $(\pm 2, 0)$. Sprechen wir also das Resultat aus: *Innerhalb* $\Gamma^{(1)}$ *findet sich eine Gattung cyklischer Untergruppen* G_4 *vierter Ordnung, nämlich für* $f_0 = 1$, *und weiter eine Gattung cyklischer* G_2, *nämlich für* $f_0 = 2$. Wenn wir alle innerhalb unserer Gruppe gleichberechtigten Untergruppen zu einer *Classe* zusammenfassen, so bleibt hier vorab noch unentschieden, ob die beiden angeführten Gattungen jeweils aus einer oder aus mehreren Classen bestehen.

Da im gegenwärtigen Falle $f = 0$ ganzzahlige Lösungen besitzt, so bemerken wir nun sogleich weiter: *Innerhalb der* $\Gamma^{(1)}$ *giebt es eine Gattung von cyklischen Untergruppen aus parabolischen Substitutionen;* als Beispiel verfolge man etwa die zu (1, 1, 0) gehörende Untergruppe.

Vor allem aber müssen wir jetzt die harmonischen Perspectivitäten innerhalb der $\bar{\Gamma}^{(1)}$, d. h. die Operationen zweiter Art der Periode zwei verfolgen. Für dieselben muss $v' = 0$ und also $u' = -2$ sein, während f_0 nur negative Zahlwerthe besitzen darf. Aus der Congruenz $u' = -2 \equiv 2$, (mod. f_0) entspringen somit die drei Möglichkeiten $f_0 = -1, -2, -4$, von denen die letzte wieder nach den genaueren Regeln des § 5 auszuschliessen ist. Die beiden Fälle $f_0 = -1, -2$ kommen aber thatsächlich in Betracht, wie die leicht durchzurechnenden Beispiele (0, 1, 0) und (0, 1, 1) belegen. Also das Resultat: *Es giebt innerhalb der* $\bar{\Gamma}^{(1)}$ *zwei Gattungen von harmonischen Perspectivitäten; für die eine ist* $f_0 = -1$, *für die andere* $f_0 = -2$.

Es kommen aber, wie man leicht bestätigt, für die einzelne der im Laufe des Paragraphen angeführte Gattung stets die *gesammten* ganzzahligen Lösungen der gerade gültigen Gleichung $f_0 = 1, 2, \ldots$ zur Verwendung. Insbesondere haben wir als Axen für die erste Gattung der eben genannten Perspectivitäten die Geraden

$$(1) \qquad x_0 x - y_0 y - z_0 z = 0,$$

wo x_0, y_0, z_0 alle ganzzahligen Lösungen von $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -1$ durchlaufen, während für die zweite Gattung in analoger Weise alle ganzzahligen Lösungen von $x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -2$ zu nehmen sind.

§ 3.

Fundamentalbereiche für die Gruppen $\bar{\Gamma}^{(1)}$ und $\Gamma^{(1)}$.

Um jetzt für die betrachteten Gruppen thatsächlich Fundamentalbereiche in zweckmässiger Gestalt einzugrenzen, denke man sich die Gesammtheit der soeben genannten Perspectivitätsaxen (1) § 2 gezogen. Dieselben werden das Innere der Ellipse in unendlich viele Bereiche theilen, die sich gegen die Ellipse hin allenthalben häufen.

Diese Bereiche denken wir uns abwechselnd schraffirt und frei gelassen, und haben dann ohne Weiteres den Satz: Je zwei benachbarte Bereiche sind bei Zugrundelegung der verabredeten Maassbestimmung symmetrisch, irgend zwei gleichartige Bereiche aber congruent; in der That gehen ja alle diese Bereiche aus einem unter ihnen durch Substitutionen der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ hervor.

Die Gestalt der in Rede stehenden Bereiche bringen wir leicht in Erfahrung. Von den drei Punkten $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, -1, 1)$ genügen die ersten beiden der Bedingung $f_0 = -1$, während der letztere $f_0 = -2$ liefert. Ihnen entsprechen also drei Perspectivitäten der $\bar{\Gamma}^{(1)}$, und die zugehörigen Axen sind gegeben durch:

$$(1) \qquad z = 0, \quad x - y - z = 0, \quad y - z = 0.$$

Dieselben bilden ein Dreieck mit den Ecken $(2, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ und den Winkeln $\frac{\pi}{2}$ bez. $\frac{\pi}{4}$, 0. Die Eckpunkte des Dreiecks liefern bez. $f_0 = 2, 1, 0$, ergeben also je einen Fixpunkt für die drei in $\Gamma^{(1)}$ enthaltenen Gattungen elliptischer und parabolischer Substitutionen.

Wir behaupten nun: Das Innere des gefundenen Dreiecks wird von keiner Perspectivitätsaxe durchzogen. Eine solche kann nämlich erstlich nicht über eine der beiden Ecken $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ in das Dreieck eindringen, da dortselbst die Axen mindestens die Winkel $\frac{\pi}{4}$ bez. $\frac{\pi}{2}$ mit einander bilden müssen. Die fragliche Axe müsste sonach eine der beiden Seiten $z = 0$, $y - z = 0$ in einem von einer Ecke des Dreiecks verschiedenen Punkte überkreuzen, und dortselbst würde also der Fixpunkt für eine elliptische Substitution der $\Gamma^{(1)}$ gelegen sein. Daraufhin untersuche man die Lösungen von $f_0 = 1, 2$ für $z_0 = 0$ und $y_0 = z_0$; $x_0^2 - y_0^2 = 2$ hat überhaupt keine ganzzahlige Lösung, $x_0^2 - y_0^2 = 1$ nur die eine $(1, 0, 0)$, welche auf die Ecke unseres Dreiecks führt. Die kleinste positive Lösung von $x_0^2 - 2y_0^2 = 1$ ergiebt den Punkt $(3, 2, 2)$, diejenige von $x_0^2 - 2y_0^2 = 2$ aber $(2, 1, 1)$. Letzterer ist Ecke des Dreiecks, ersterer liegt auf der Linie $y - z = 0$ bereits über unser Dreieck hinaus; alle höheren Lösungen liefern aber auf Grund elementarer Ueberlegung Punkte, die sich dem Rande der Ellipse noch mehr genähert haben. *Es wird also thatsächlich das Innere unseres Dreiecks nicht noch von einer weiteren Perspectivitätsaxe durchzogen.*

Hiermit haben wir nun ohne Weiteres das Resultat gewonnen: *Die unendlich vielen Bereiche, in welche das Innere der Ellipse durch die Perspectivitätsaxen getheilt wird, sind abwechselnd symmetrische und congruente geradlinige Dreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0. Durch die

Operationen der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ wird diese Theilung in sich transformirt, und also geht z. B. das soeben besonders beschriebene Dreieck durch eine beliebig herausgegriffene Operation der $\bar{\Gamma}^{(1)}$ entweder in ein anderes Dreieck der Theilung oder in sich selbst über. Letzteres ist aber, wie man sofort erkennt, auf keine Weise möglich, *und eben deswegen besitzen wir in einem beliebigen unserer Dreiecke, z. B. jenem oben besonders beschriebenen, direct einen Fundamentalbereich für die Gruppe* $\bar{\Gamma}^{(1)}$. Neben dieses Dreieck, das wir schraffirt denken, lagern wir nun noch dasjenige freie Dreieck der Theilung, welches mit jenem die Seite $x - y - z = 0$ gemein hat. Beide zusammengenommen werden alsdann ein grösseres Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, 0 bilden, *und in diesem besitzen wir einen Fundamentalbereich für die Gruppe* $\Gamma^{(1)}$. Die letztere Gruppe lässt sich demnach aus *zwei* Operationen erzeugen, von denen die eine elliptisch, mit dem Fixpunkte $(2, 1, 1)$, die andere parabolisch mit dem Fixpunkte $(1, 1, 0)$ ist; in ternärer Gestalt lauten diese Substitutionen bez.

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 3, & -2, & -2 \\ 2, & -2, & -1 \\ 2, & -1, & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 3, & -2, & 2 \\ 2, & -1, & 2 \\ 2, & -2, & 1 \end{vmatrix}.$$

Gehen wir nun zur ω-Halbebene, so haben wir dortselbst zuvörderst als Symmetriekreise für die in $\bar{\Gamma}^{(1)}$ enthaltenen Spiegelungen die durch die folgende Gleichung gegebenen:

$$(3) \qquad (x_0 - y_0) \cdot (X^2 + Y^2) - 2 z_0 X + (x_0 + y_0) = 0;$$

und zwar durchlaufen x_0, y_0, z_0 für eine Gattung von Spiegelungen wieder alle ganzzahligen Lösungen von $f_0 = -1$, für die andere von $f_0 = -2$. Durch diese Kreise wird die gesammte Halbebene in unendlich viele abwechselnd symmetrische und congruente*) *Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0 eingetheilt. Diese Eintheilung ist in Fig. 1 der beigegebenen Tafel angedeutet, wo sich übrigens ein gewisser Complex solcher Kreisbogendreiecke eingegrenzt findet, dessen Bedeutung weiterhin noch hervortreten wird. Fundamentalraum für $\bar{\Gamma}^{(1)}$ ist das schraffirte Dreieck mit den Ecken $\omega = i$, $1 + i\sqrt{2}$, $i\infty$. Lagern wir das rechts daneben liegende freie Dreieck an, so haben wir einen Fundamentalbereich für $\Gamma^{(1)}$. Die Erzeugenden der letztern Gruppe (in der Figur durch punktirte Pfeile angedeutet) sind die beiden folgenden:

$$(4) \qquad V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}, \qquad V_2(\omega) = \omega + 2.$$

*) Im Sinne der zugehörigen Maassbestimmung.

Ihre Combination giebt die Substitution der Periode vier:

$$(5)\qquad V_3(\omega) = V_1\,V_2(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Aus der Figur lesen wir endlich noch den Satz ab: Die beiden Gattungen von Untergruppen G_4 und G_2 bestehen jeweils nur aus *einer* Classe, desgleichen die Gattung der Untergruppen aus parabolischen Substitutionen. Demgegenüber haben wir *drei* Classen von Spiegelungen, von denen zwei zu $f_0 = -1$ gehören, während die dritte $f_0 = -2$ hat.*)

§ 4.

Fundamentalbereiche der Gruppen $\bar{\Gamma}^{(3)}$ und $\Gamma^{(3)}$.

Die soeben zur Verwendung gekommenen Ueberlegungen führen auch in den folgenden Fällen auf's Leichteste zum gewünschten Resultat, und wir wenden dieselben sogleich auf den nächsten Fall einer ungeraden Primzahl nämlich auf $q = 3$ an. Indem wir hier immer zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden haben, dass f_0 prim gegen 3 oder durch 3 theilbar ist, haben wir erstlich *drei* Gattungen cyklischer Untergruppen aus *elliptischen* Substitutionen. Alle ganzzahligen Lösungen von $3x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 1$, z. B. $(1, 1, 1)$ liefern eine Gattung cyklischer G_6 der Ordnung *sechs*, desgleichen liefern die Lösungen von $f_0 = 2$ z. B. $(1, 1, 0)$ eine Gattung cyklischer G_2 der Ordnung *zwei*, und endlich haben wir für $f_0 = 3$ z. B. $(2, 0, 3)$ eine Gattung cyklischer G_4 der Ordnung *vier*. Jede dieser drei Gattungen besteht, wie wir sehen werden, nur aus einer *einzigen* Classe. Parabolische Substitutionen kommen für den gegenwärtigen Fall nicht in Betracht, da $f_0 = 0$ keine ganzzahligen Lösungen zulässt; dagegen finden sich in der erweiterten Gruppe *drei* Gattungen von Spiegelungen, die bez. den Gleichungen $f_0 = -1, -2, -6$ zugehören. Wir werden bemerken, dass jede dieser Gattungen nur aus einer einzigen Classe besteht und haben übrigens als Beispiele bez. $(1, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$ und $(2, 3, 3)$.

Nunmehr denke man sich wieder für die gesammten soeben gefundenen Perspectivitäten die drei Systeme von Axen gezogen, die

---

*) Die hiermit gefundene Figur ist bereits früher von Hrn. Hurwitz betrachtet worden; vergl. dessen Aufsatz: *Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden*, Math. Ann. Bd. 20 (1881).

in dem Inneren der Ellipse die für unsere Gruppe charakteristische Eintheilung liefern. Um die Gestalt der einzelnen Bereiche in Erfahrung zu bringen, wolle man bemerken, dass die drei Punkte $(0, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 3, 0)$ bez. den Gleichungen $f = -1, -2, -6$ genügen. In den drei zugehörigen Polaren

$$(1) \qquad z = 0, \quad y - z = 0, \quad x - y = 0$$

besitzen wir also für jede der drei Gattungen von Perspectivitäten eine Axe. Die drei Axen (1) bilden ein Dreieck mit den Ecken $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$; diese drei Punkte aber genügen den Gleichungen $f_0 = 1, 2, 3$, liefern also die Fixpunkte für je eine cyklische Untergruppe aus den drei oben gefundenen Gattungen elliptischer Substitutionen. Als Winkel des Dreiecks erhalten wir bei $(1, 1, 0)$ und $(1, 0, 0)$ bez. $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$; bei $(1, 1, 1)$ findet der Winkel $\frac{\pi}{6}$ statt. Die zum Fixpunkte $(1, 1, 1)$ gehörende G_6 lässt sich nämlich aus der elliptischen Substitution der Periode sechs:

$$x' = 2x - z, \quad y' = 3x - 2z, \quad z' = y$$

erzeugen, und diese transformirt die Linie $x - z = 0$ in $x - y = 0$. Wir beweisen endlich genau wie im vorigen Paragraphen, dass das Innere des Dreiecks von keiner weiteren Perspectivitätsaxe durchsetzt wird; damit ist bei der Gestalt dieses Dreiecks evident, dass es einen Fundamentalbereich für $\overline{\Gamma}^{(3)}$ liefert.

Indem wir jetzt zur ω-Halbebene gehen, haben wir dort die drei Classen von Halbkreisen:

$$(x_0\sqrt{3} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0 X + (x_0\sqrt{3} + y_0) = 0$$

zu zeichnen, für welche $f_0 = -1, -2, -6$ ist. Dieselben theilen die Halbebene in unendlich viele *Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$, von denen je zwei benachbarte symmetrisch sind. Ein einzelnes dieser Dreiecke, z. B. dasjenige mit den Ecken $\omega = \frac{i\sqrt{2}}{-1+\sqrt{3}}$, i, $\frac{1+i}{-1+\sqrt{3}}$, welches dem oben beschriebenen geradlinigen Dreieck entspricht, ergiebt uns einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\overline{\Gamma}^{(3)}$. Spiegeln wir dieses Dreieck etwa an der imaginären ω-Axe, *so entspringt ein Doppeldreieck mit den Ecken* $\omega = i$, $\frac{\pm 1 + i}{-1+\sqrt{3}}$ *und den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$, *und in ihm besitzen wir einen Fundamentalraum für die Gruppe* $\Gamma^{(3)}$ (vergl. hier überall Fig. 2 der Tafel). Die fragliche Gruppe lässt sich sonach aus *zwei* Substitutionen erzeugen, beide

elliptisch und zwar von der Periode vier bez. zwei. Diese Substitutionen sind:

$$(2)\qquad V_1(\omega)=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega+\frac{1}{\sqrt{2}}},\quad V_2(\omega)=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\omega}.$$

§ 5.

Fundamentalbereiche für die Gruppen $\bar{\Gamma}^{(5)}$ und $\Gamma^{(5)}$.

In der nun zu besprechenden Gruppe $\Gamma^{(5)}$ giebt es im ganzen *drei* Classen von cyklischen Untergruppen aus elliptischen Substitutionen, und zwar bestehen *zwei* von diesen Classen aus Gruppen G_2 der Ordnung *zwei*, die dritte aus Gruppen G_4 der Ordnung *vier*. Für die beiden Classen von G_2 ist $f_0=1$, bez. $=2$, und wir führen als Beispiele die zu den Fixpunkten $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 3)$ gehörenden G_2 an; für die Classe der G_4 liefert $(1, 0, 0)$ ein Beispiel, wir haben dortselbst $f_0=5$. Hierzu kommt *eine* Classe von cyklischen Untergruppen aus *parabolischen* Substitutionen, zu denjenigen Fixpunkten gehörig, welche von den ganzzahligen Lösungen der Gleichung $f=0$ herrühren; ein Beispiel für die letztere Classe liefert der Fixpunkt $(1, 2, 1)$. Auf der anderen Seite haben wir innerhalb $\bar{\Gamma}^{(5)}$ *vier Classen von harmonischen Perspectivitäten*; für die ersten beiden unter ihnen ist $f_0=-1$ bez. -2, die beiden letzten Classen haben übereinstimmend $f_0=-5$. Beispiele für diese vier Classen werden durch die vier Perspectivitätscentra

$$(1)\qquad (0, 0, 1),\ (0, 1, -1),\ (3, 5, 5),\ (2, 5, 0)$$

geliefert.

Um jetzt einen Fundamentalraum für $\bar{\Gamma}^{(5)}$ im Innern der Ellipse abzugrenzen, ziehe man die vier zu den Centren (1) gehörenden Axen. Dieselben sind gegeben durch die Gleichungen

$$(2)\qquad z=0,\quad y-z=0,\quad 3x-y-z=0,\quad 2x-y=0.$$

Dieselben bilden ein Vierseit mit den Eckpunkten

$$(3)\qquad (1, 0, 0),\quad (2, 3, 3),\quad (1, 2, 1),\quad (1, 2, 0),$$

wo bez. die Winkel stattfinden $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$. Die Eckpunkte (3) aber ergeben $f_0=5, 2, 0, 1$ und liefern sonach für jede der oben genannten Classen cyklischer Untergruppen ein Beispiel. Im gefundenen Viereck erkennen wir daraufhin einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(5)}$ und stellen von hieraus sofort einen ebensolchen für $\Gamma^{(5)}$ durch Verdoppelung des Vierecks her. Die oben angeführten Sätze

über die Untergruppen von $\bar{\Gamma}^{(5)}$ aber sind nun leicht nachträglich bestätigt. Man betrachte z. B. die Perspectivitätsaxen: Die beiden letzten Axen (2) bestehen jeweils aus *zwei* Vierecksseiten und haben als Sehnen der Ellipse je zwei *ganzzahlige* Endpunkte. Auf jeder ist ein Fixpunkt einer G_2 gelegen, nämlich die Punkte $(2, 3, 3)$ und $(1, 2, 0)$; aber diese Punkte sind *nicht* äquivalent, da der eine $f_0 = 2$, der andere $f_0 = 1$ hat, und eben dieserhalb können beide Axen nicht zu derselben Classe gehören.

Indem wir jetzt zur ω-Halbebene vorgehen, kommt der Satz: *Die Halbkreise*

$$(4) \qquad (x_0\sqrt{5} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0 X + (x_0\sqrt{5} + y_0) = 0,$$

wobei x_0, y_0, z_0 *alle ganzzahligen Lösungen der drei Gleichungen* $f_0 = -1, -2, -5$ *durchlaufen, theilen die ω-Halbebene in unendlich viele Kreisbogenvierecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, 0$, *die alle aus einem unter ihnen nach dem Princip der Symmetrie erzeugt werden können.* Das Viereck mit den Ecken (3) ergiebt jetzt das Kreisbogenviereck mit den Ecken:

$$(5) \qquad \omega = i, = \frac{3 + i\sqrt{2}}{-3 + 2\sqrt{5}}, = 2 + \sqrt{5}, = i(2 + \sqrt{5}),$$

und in ihm besitzen wir einen Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(5)}$.

Spiegeln wir dieses Viereck längs derjenigen seiner Seiten, welche die beiden letzten Punkte (5) verbindet, so entspringt ersichtlich durch Anfügung des Spiegelbildes an jenes erstere Viereck ein Kreisbogenfünfeck, welches einen Fundamentalbereich für $\Gamma^{(5)}$ liefert. (Man vergl. hier überall die Figur 3, welche jedoch die hier in Rede stehende Viereckstheilung nicht direct liefert, sondern nur mit ihr kreisverwandt ist). Zufolge dieser Gestaltung des Fundamentalbereichs lässt sich die Gruppe $\Gamma^{(5)}$ aus *drei* Substitutionen erzeugen, die bez. elliptisch, parabolisch und hyperbolisch sind (cf. Fig. 3); diese Erzeugenden der $\Gamma^{(5)}$ sind:

$$(6) \qquad V_1(\omega) = \frac{2 + \sqrt{5}}{(2 - \sqrt{5})\,\omega}, \quad V_2(\omega) = \frac{(1 - \sqrt{5})\,\omega + (5 + 2\sqrt{5})}{(-5 + 2\sqrt{5})\,\omega + (1 + \sqrt{5})},$$

$$V_3(\omega) = \frac{\dfrac{-2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,\omega + \dfrac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{\dfrac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}\,\omega + \dfrac{2 + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}}.$$

§ 6.

Fundamentalbereiche der für $q = 7$ eintretenden Gruppen.

In der Gruppe $\Gamma^{(7)}$ finden sich Untergruppen endlicher Ordnung für die drei Werthe 2, 7, 14 von f_0, und zwar liefern dieselben *drei* Classen von Untergruppen G_2, G_4, G_2; Beispiele solcher Untergruppen aus elliptischen Substitutionen liefern die Fixpunkte (1, 2, 1), (1, 0, 0), (11, 28, 7). Des ferneren finden sich in $\bar{\Gamma}^{(7)}$ insgesammt *zwei* Classen von harmonischen Perspectivitäten, nämlich für $f_0 = -1$ und $f_0 = -2$; Beispiele für dieselben haben wir sofort zu betrachten.

Um einen Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}^{(7)}$ zu erhalten, ist es hier zweckmässig, die Perspectivitätscentra

(1) $\quad (0, 1, 0), \ (0, 1, -1), \ (1, -2, -2), \ (1, 0, -3)$

zu benutzen, denen bez. die Axen zugehören:

(2) $\quad y = 0, \quad y - z = 0, \quad 7x + 2y + 2z = 0, \quad 7x + 3z = 0.$

Dieselben bilden im Innern der Ellipse ein *ungleichseitiges Parallelogramm* mit den Ecken

(3) $\quad (1, 0, 0), \ (4, -7, -7), \ (6, -7, -14), \ (3, 0, -7),$

woselbst bez. die Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ stattfinden. Man zeigt in gewohnter Weise, dass keine weitere Perspectivitätsaxe in das Innere des gewonnenen Vierecks eindringt, und damit entspringt der Satz: *Zeichnen wir in der ω-Halbebene die Gesammtheit der Halbkreise:*

(4) $\quad (x_0\sqrt{7} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0X + (x_0\sqrt{7} + y_0) = 0$

für $f_0 = -1$ und $f_0 = -2$, so erscheint dieselbe in unendlich viele, als ungleichseitige Parallelogramme zu bezeichnende, Kreisbogenvierecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ getheilt, die alle aus einem unter ihnen nach dem Symmetrieprincip entstehen.

Nun aber ist besonders interessant, dass wir für den gegenwärtigen Fall im beschriebenen Viereck, welches übrigens in der ω-Halbebene die vier Ecken bekommt:

(5) $\quad \omega = i, \quad \frac{-\sqrt{7} + i\sqrt{2}}{4 + \sqrt{7}}, \quad \frac{-2\sqrt{7} + i}{6 + \sqrt{7}}, \quad \frac{-\sqrt{7} + i\sqrt{2}}{3},$

noch nicht einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\bar{\Gamma}^{(7)}$ besitzen. Man bemerke nämlich, dass von den vier Ecken (3) des Vierecks zwei die Gleichung $f_0 = 7$, die beiden anderen aber $f_0 = 14$ befriedigen. Die Gleichung $f_0 = 2$, welche doch auch Fixpunkte für Gruppen G_2 liefert, bleibt ausser Betracht. Da wird man nun sofort bemerken, *dass die Mittelpunkte unserer Kreisbogenparallelogramme die noch*

fehlenden Punkte mit $f_0 = 2$ liefern müssen. In der That sind die Diagonalen des Vierecks (2) durch

(6) $$2y - z = 0,\ 7x + y + 3z = 0$$

gegeben, und diese schneiden sich in dem Punkte (1, —1, —2), der $f_0 = 2$ befriedigt. Aber durch diesen Punkt zieht *keine* Perspectivitätsaxe hindurch, *und also liefert uns $q = 7$ das Beispiel einer nicht ausschliesslich aus Spiegelungen erzeugbaren* $\bar{\Gamma}^{(q)}$. Man ziehe demnach etwa die Diagonale $7x + y + 3z = 0$ und spalte dadurch von unserem Viereck ein Dreieck mit den Ecken

$$\omega = i,\ \frac{-\sqrt{7}+i\sqrt{2}}{4+\sqrt{7}},\ \frac{-\sqrt{7}+i\sqrt{2}}{3}$$

ab, wobei wir dann die eine Hälfte der Diagonale der anderen Hälfte durch die gleich zu nennende elliptische Substitution der Periode zwei V_2 zuzuordnen haben. Spiegeln wir alsdann dieses Dreieck an der von der Geraden $y - z = 0$ herrührenden Seite, so gewinnen wir durch Anfügung des entspringenden Spiegelbildes einen Fundamentalbereich für die Gruppe $\Gamma^{(7)}$. Diese letztere lässt sich demgemäss aus den drei Substitutionen erzeugen:

(7) $$V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}},\quad V_2(\omega) = \frac{-\sqrt{2}\,\omega + \frac{1-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\omega + \sqrt{2}},$$
$$V_3(\omega) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{2-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}{\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Uebrigens beachte man, dass ein einzelnes der beschriebenen Vierecke einen Fundamentalbereich für eine innerhalb der Gesammtgruppe $\bar{\Gamma}^{(7)}$ ausgezeichnete Untergruppe $\bar{\Gamma}_2^{(7)}$ vom Index zwei liefert. Dass die letztere dann wieder ausschliesslich aus Spiegelungen erzeugbar ist, macht ihre Einführung evident. (Vergl. hier überall Fig. 4).

§ 7.

Die Fundamentalbereiche der bei $q = 11$ eintretenden Gruppen.

Bei $q = 11$ kommen für elliptische Substitutionen die vier Gleichungen in Betracht: $f_0 = 1, 2, 11, 33$, für welche wir bez. die vier ganzzahligen Lösungen

(1) $$(1, 1, 3),\ (1, 0, 3),\ (1, 0, 0),\ (5, 11, 11)$$

als Beispiele anführen. Diese Gleichungen liefern uns *vier* Classen

von Untergruppen G_2, G_2, G_4, G_3. Demgegenüber finden sich in der $\Gamma^{(11)}$ *drei* Classen von Spiegelungen, welche bez. den Gleichungen $f_0 = -1, -2, -22$ zugehören.

Unter den Perspectivitätscentren fixire man etwa die vier:

$$(0, 1, -1), \quad (0, 1, 0), \quad (3, 0, 11), \quad (1, 2, 3). \tag{2}$$

von denen das erste und letzte der nämlichen Classe ($f_0 = -2$) angehört. Die zugehörigen Axen sind gegeben durch:

$$y - z = 0, \quad y = 0, \quad 3x - z = 0, \quad 11x - 2y - 3z = 0; \tag{3}$$

diese bilden ein Viereck mit den Ecken

$$(1, 0, 0), \quad (1, 0, 3), \quad (1, 1, 3), \quad (5, 11, 11), \tag{4}$$

woselbst bez. die Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ stattfinden. Hier haben wir also genau die Eckpunkte (1) wiedergewonnen. Da man wieder leicht zeigt, dass keine fernere Perspectivitätsaxe in das Innere des bezeichneten Vierecks eindringt, so folgt der Hauptsatz: *Die ω-Halbebene wird durch die gesammten Halbkreise:*

$$(x_0\sqrt{11} - y_0)(X^2 + Y^2) - 2z_0 X + (x_0\sqrt{11} + y_0) = 0$$

für $f_0 = -1, -2, -22$ mit einer Eintheilung in Kreisbogenvierecke der Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ versehen. Dabei entspricht dem geradlinigen Viereck (3) das Kreisbogenviereck mit den Ecken:

$$\omega = i, \quad = \frac{3 + i\sqrt{2}}{\sqrt{11}}, \quad = \frac{3 + i}{-1 + \sqrt{11}}, \quad = \frac{\sqrt{11} + i\sqrt{3}}{5 - \sqrt{11}}. \tag{5}$$

Letzteres können wir zum Fundamentalraum der $\Gamma^{(11)}$ wählen, welche Gruppe sich, wie man sieht, aus Spiegelungen allein erzeugen lässt. Indem wir dann wieder an dem von $y - z = 0$ herrührenden Kreise spiegeln, gewinnen wir in gewohnter Weise ein Fundamentalsechseck für die Gruppe $\Gamma^{(11)}$ (vergl. Fig. 5). Letztere Gruppe hat demzufolge die drei Erzeugenden:

$$\begin{gathered} V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_2(\omega) = \frac{\frac{1-\sqrt{11}}{2}\cdot\omega + \frac{5+\sqrt{11}}{2}}{\frac{-5+\sqrt{11}}{2}\cdot\omega + \frac{1+\sqrt{11}}{2}}, \\ V_3(\omega) = \frac{\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\omega + \frac{3+\sqrt{11}}{2}}{\frac{3-\sqrt{11}}{2}\omega + \frac{3+\sqrt{11}}{2}}. \end{gathered} \tag{6}$$

Von diesen Substitutionen sind die beiden ersten elliptisch, die letzte hyperbolisch.

Die Betrachtungen der voraufgehenden Paragraphen, die wir hiermit abbrechen, geben ihrer Qualität nach die Gedankenreihen an, welche auch in den weiterhin folgenden Fällen zu den entsprechenden Resultaten führen. Immer sind es nur wenige Zahlwerthe f_0, die für die Aufstellung der elliptischen Substitutionen und der Spiegelungen heranzuziehen sind, und es gelingt auch leicht, in diesem Betracht ein allgemeines Schema für beliebige Primzahlen q aufzustellen, wobei Fallunterscheidungen für q modulo 24 vorzunehmen sind. Demgegenüber ist zu betonen, dass die Rechnungen, welche über die nun behandelten Einzelfälle hinaus zur thatsächlichen Aufstellung der Fundamentalbereiche führen, alsbald recht umfängliche werden, und es ist dieserhalb nicht wahrscheinlich, dass man auf dem eingeschlagenen inductiven Wege zu allgemeinen Resultaten vordringen kann. In diesem Sinne lassen wir es bei den jetzt gegebenen Entwicklungen bewenden, ziehen dieselben aber nun noch zur weiteren Inbetrachtnahme heran.

Dritter Theil.

Zusammenstellung einiger ferneren Bemerkungen über die betrachteten Gruppen.

§ 1.

Satz über die Coefficienten der ω-Substitutionen der Gruppen $\Gamma^{(q)}$.*)

Bei den elliptischen und hyperbolischen Substitutionen (6) in I, § 6 der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ ist die Summe des ersten und vierten Coefficienten $\sqrt{u+2}$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl, bei einer parabolischen Substitution (7) I, § 6 ist die entsprechende Summe gleich zwei. Erstere Substitution können wir unzweideutig durch die vier Zahlen $\sqrt{u+2}$, x_0, y_0, z_0 charakterisiren und bezeichnen sie in diesem Sinne symbolisch durch $(\sqrt{u+2};\ x_0, y_0, z_0)$, letztere in analoger Weise durch $(a;\ x_0, y_0, z_0)$.

Jetzt wolle man die beiden Substitutionen $(\sqrt{u+2};\ x_0, y_0, z_0)$ und $(\sqrt{u'+2};\ x_0', y_0', z_0')$ combiniren, was auf die Operation

$$(\sqrt{u''+2};\ x_0'', y_0'', z_0'')$$

führen möge. Zufolge einer leichten Rechnung haben wir:

$$\begin{aligned}(1)\qquad \sqrt{u''+2} &= \tfrac{1}{2}\sqrt{u+2}\,\sqrt{u'+2}\\ &\quad - \tfrac{1}{2}(qx_0x_0' - y_0y_0' - z_0z_0')\sqrt{\frac{u-2}{-f_0}}\,\sqrt{\frac{u'-2}{-f_0'}}\,.\end{aligned}$$

---

*) Cf. Poincaré l. c., p. 431.

Combiniren wir $(\sqrt{u+2};\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ mit $(a';\ x_0',\ y_0',\ z_0')$, so wird die Summe des ersten und vierten Coefficienten in der entspringenden Substitution

$$(2)\qquad \sqrt{u'+2} = \sqrt{u+2} + \frac{a}{\sqrt{q}}(qx_0x_0' - y_0y_0' - z_0z_0')\sqrt{\frac{u-2}{-f_0}},$$

und endlich erhalten wir in entsprechender Weise von zwei parabolischen Substitutionen aus:

$$(3)\qquad 2 - \frac{2aa'}{q}(qx_0x_0' - y_0y_0' - z_0z_0')$$

als Summe des ersten und vierten Coefficienten der neuen Substitution.

Man wolle jetzt annehmen, dass weder $(\sqrt{u+2};\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ noch $(\sqrt{u'+2};\ x_0',\ y_0',\ z_0')$ die Periode zwei besitzt. Alsdann ist weder $\sqrt{u+2}$ noch $\sqrt{u'+2}$ gleich Null, und wir schreiben

$$(4)\qquad \sqrt{u+2} = r\sqrt{s}, \qquad \sqrt{u'+2} = r'\sqrt{s'},$$

wo r, s, r', s' ganze Zahlen sind und s, s' keinen quadratischen Theiler ausser 1 besitzen. Indem wir (1) mit $\sqrt{u+2}\,\sqrt{u'+2}$ multipliciren, kommt mit Rücksicht auf (5) in I, § 6:

$$\sqrt{u''+2}\cdot\sqrt{u+2}\cdot\sqrt{u'+2} = \frac{1}{2}(u+2)(u'+2)$$
$$-\frac{1}{2}(qx_0x_0' - y_0y_0' - z_0z_0')vv'q^{\nu},$$

wo $\nu = \pm 1$ oder 0 ist. Immer entnehmen wir aus einer leichten Interpretation dieser Gleichung den Satz: Die Quadratwurzel $\sqrt{u''+2}$ aus der ganzen Zahl $(u''+2)$ geht durch Multiplication mit $\sqrt{s\cdot s'}$ in eine *ganze* Zahl über; schreiben wir also (4) entsprechend

$$\sqrt{u''+2} = r''\sqrt{s''},$$

so ist $s'' = \frac{s\cdot s'}{\tau^2}$, wo τ der grösste gemeinsame Theiler von s und s' ist. Wenden wir eine gleiche Ueberlegung auf (2) an, so findet sich unter Anpassung der Bezeichnungsweise an diese Formel direct $s' = s$. Es würde nicht schwer halten, diesen Satz auch auf elliptische Substitutionen der Periode zwei auszudehnen; doch haben wir solches in der Folge nicht nöthig.

Jetzt wolle man sich für die einzelne Gruppe $\Gamma^{(q)}$ ein solches System von Erzeugenden aufstellen, dass sich unter den letzteren keine einzige Substitution der Periode zwei findet; (es hat das in den sogleich zu betrachtenden Fällen niemals Schwierigkeit). Die begrenzte Anzahl der verschiedenen Zahlen s, welche für diese Substitution in Betracht kommen, sei ν; diese selbst seien durch $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ be-

zeichnet. Für die gesammten Substitutionen der Gruppe kommen dann als Zahlen s nur die folgenden vor:

$$s_1, s_2, \ldots, \frac{s_1 s_2}{\tau_1}, \frac{s_1 s_3}{\tau_2}, \ldots, \frac{s_1 s_2 \cdots s_\nu}{\tau_i}.$$

Die Anzahl dieser Grössen ist eine begrenzte, und es mögen sich insbesondere $(\mu - 1)$ verschiedene unter ihnen finden. Wir überblicken dann sofort den Satz: *Es giebt in der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ eine ausgezeichnete Untergruppe $\Gamma_\mu^{(q)}$ des endlichen Index μ, welche alle diejenigen Substitutionen der $\Gamma^{(q)}$ umfasst, bei denen $\sqrt{u+2}$ eine ganze Zahl ist.* Diese Gruppe $\Gamma_\mu^{(q)}$ ist vom arithmetischen Standpunkt aus besonders interessant: *Ihre Substitutionen haben die Gestalt:*

$$\omega' = \frac{\frac{a + b\sqrt{q}}{2} \cdot \omega + \frac{c + d\sqrt{q}}{2}}{\frac{-c + d\sqrt{q}}{2} \cdot \omega + \frac{a - b\sqrt{q}}{2}}, \tag{5}$$

wo a, b, c, d solche ganze Zahlen sind, dass die Determinante von (5) *der Einheit gleich ist.* Hier könnten wir dann wieder alle diejenigen Substitutionen (5) in eine Untergruppe für sich sammeln, bei denen a, b, c, d gerade Zahlen sind.

§ 2.

Erläuterung des gewonnenen Satzes durch die Beispiele $q = 1, 3, 7$.

Besonders einfach gestalten sich die soeben durchlaufenen Entwicklungen für den ersten in Betracht kommenden Fall $q = 1$. Wir gebrauchen da an Stelle der unter (4) II, § 3 gegebenen Erzeugenden V_1, V_2 zweckmässig die folgenden:

$$V_2(\omega) = \omega + 2, \quad V_3 = V_2^{-1} V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}. \tag{1}$$

Die einzige hier eintretende Zahl s ist also $s=2$, und somit ist $\mu=2$. Das Polygon der zugehörigen ausgezeichneten $\Gamma_2^{(1)}$ ist in Fig. 1 durch stärker ausgezogene Randcurven angedeutet, und die Erzeugenden von $\Gamma_2^{(1)}$ sind, wie man sogleich sieht:

$$V_2(\omega) = \omega + 2, \quad (V_2 V_3 V_2)^2 (\omega) = -\frac{1}{\omega}.$$

Hier fallen die Coefficienten direct ganzzahlig aus, und wir erhalten in der $\Gamma_2^{(1)}$ eine in der Modulgruppe enthaltene wohlbekannte Unter-

gruppe Γ_3 vom Index drei*). Die in Rede stehende Gruppe ist innerhalb der Modulgruppe eine von drei gleichberechtigten, während sie auf der andern Seite innerhalb $\Gamma^{(1)}$ ausgezeichnet ist.

Für die $\Gamma^{(3)}$ brauchen wir an Stelle der unter (2) II, § 4 genannten Erzeugenden V_1, V_2 zweckmässig die folgenden:

$$(2)\qquad \begin{aligned} V_1(\omega) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \\ V_3(\omega) = V_2 V_1(\omega) &= \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\omega + \frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,\omega - \frac{1-\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

Als Zahlen $\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \ldots$ haben wir hier also die drei $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$, so dass die ausgezeichnete $\Gamma_\mu^{(q)}$ im gegenwärtigen Falle eine $\Gamma_4^{(3)}$ wird. Das Fundamentalpolygon derselben findet man in Fig. 2 angedeutet; es ist, wie alle bisher in Betracht gekommenen Polygone vom Geschlechte $p = 0$ und ergiebt für die $\Gamma_4^{(3)}$ die drei Erzeugenden:

$$(3)\qquad \begin{aligned} V_1^2(\omega) = \frac{-1}{\omega}, \quad V_3^2(\omega) &= \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\omega + \frac{3+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\cdot\omega + \frac{1-\sqrt{3}}{2}}, \\ (V_3 V_1^2)^2(\omega) &= \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\omega - \frac{3+\sqrt{3}}{2}}{-\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\cdot\omega + \frac{1-\sqrt{3}}{2}}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenlegung dieses Polygons zur geschlossenen Ebene kommt man übrigens auf die Vierertheilung derselben zurück.

Wir verfolgen endlich auch noch den Fall $q = 7$, wo wir an Stelle der drei in II, § 6 genannten Substitutionen V_1, V_2, V_3 als Erzeugende der $\Gamma^{(7)}$ die nachfolgenden gebrauchen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} V_1(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad V_4 = V_1 V_2(\omega) &= \frac{\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\,\omega - \frac{1+\sqrt{7}}{2}}{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\,\omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}, \\ V_5(\omega) = V_1 V_3(\omega) &= \frac{-\frac{3+\sqrt{7}}{2}\,\omega + \frac{1-\sqrt{7}}{2}}{\frac{1+\sqrt{7}}{2}\,\omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}. \end{aligned}$$

Hier haben wir demgemäss als Grössen $\sqrt{s}$ die drei $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \sqrt{14}$,

*) l. c. p. 289 u. f.

und wir gewinnen als $\Gamma_\mu^{(q)}$ wieder eine ausgezeichnete $\Gamma_4^{(7)}$ des Index vier. Den Fundamentalbereich derselben findet man in Fig. 4 angedeutet und sieht leicht, dass derselbe dem Geschlechte $p=1$ angehört. Die Erzeugenden der $\Gamma_4^{(7)}$ sind die folgenden vier:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\omega' = -\frac{1}{\omega}, & &\omega' = \frac{2\omega - 2 + \sqrt{7}}{(2+\sqrt{7})\,\omega + 2},\\ &\omega' = \frac{\frac{3+\sqrt{7}}{2}\cdot\omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}{\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\cdot\omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}, & &\omega' = \frac{\frac{3+\sqrt{7}}{2}\cdot\omega - \frac{3-\sqrt{7}}{2}}{\frac{3+\sqrt{7}}{2}\cdot\omega + \frac{3-\sqrt{7}}{2}}. \end{aligned}$$

Hieran schliesst sich eine äusserst interessante Fragestellung. Wir kommen allgemein auf die Substitutionen (5) des vorigen Paragraphen zurück, wobei wir indes für $q=4h+1$ noch die weitere Bedingung anfügen, dass von den vier Zahlen a, b, c, d der einzelnen Substitution stets die beiden ersten, wie auch die beiden letzten einander modulo 2 congruent sein sollen, eine Bedingung, die für $q=4h-1$ von selbst erfüllt ist. Im ersteren Falle sind die vier Coefficienten der einzelnen Substitution *ganze* Zahlen des aus der Basis $(1, \sqrt{q})$ zu bildenden Zahlkörpers, im zweiten Falle kommen auch die Hälften ganzer Zahlen vor; immer aber sind der erste und vierte Coefficient conjugirt, sowie auch der zweite und negativ genommene dritte. Es besteht nun der Satz, *dass die Gesammtheit der solchergestalt definirten Substitutionen für das einzelne q eine Gruppe $\gamma^{(q)}$ bildet;* bei $q=4h+1$ ist dies aus der Ganzzahligkeit der Coefficienten sofort evident, bei $q=4h-1$ hat man eine elementare arithmetische Ueberlegung anzustellen, der wir hier nicht nachgehen können. *In $\gamma^{(q)}$ ist nun offenbar $\Gamma_\mu^{(q)}$ als Untergruppe enthalten*, und es entspringt die Frage (die wir gleichfalls hier nicht verfolgen können), *wie sich des näheren das Verhältniss der Untergruppe zur umfassenden Gruppe gestaltet.*

§ 3.

Beziehung der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ bei $q=4h+1$ zur Modulgruppe.

Wir fanden soeben, dass die Gruppe $\Gamma^{(1)}$ mit der Modulgruppe eine Untergruppe von endlichem Index gemeinsam hat. Wie wir hier zum Schluss zeigen wollen, tritt das gleiche Sachverhältniss für alle Gruppen $\Gamma^{(q)}$ mit $q=4h+1$ ein (sowie ganz allgemein bei denjenigen ternären Formen, welche die Null darzustellen vermögen).

Für $q=4h+1$ hat $f=qx^2-y^2-z^2=0$ ganzzahlige Lösungen, die, wie wir sagen werden, ganzzahlige Punkte des Kegelschnitts $f=0$ ergeben. Zwei unter diesen Punkten wählen wir aus, nennen die beiden Tangenten in ihnen $\xi=0$, $\zeta=0$ und ihre Verbindungslinie $\eta=0$,

wo ξ, η, ζ lineare homogene Ausdrücke der x, y, z sind, die bis auf constante Factoren bestimmt sind. Die letzteren Factoren denken wir so gewählt, dass die neun Coefficienten dieser drei Ausdrücke ganze Zahlen sind, dass ferner f bis auf einen Factor in $(\xi\zeta-\eta^2)$ übergeht, dass endlich sonst überflüssige gemeinsame Factoren der neun Coefficienten nicht auftreten. So gewinnen wir eine ganzzahlige Substitution T der Gestalt (3) I, § 1, deren Determinante Δ sein möge.

Bevor wir die ternären Substitutionen S der Gruppe $\Gamma^{(q)}$ vermöge T transformiren, wolle man bemerken, dass sich das bekannte Princip aus der Theorie der Modulfunctionen, durch Congruenzen bezüglich eines festen Moduls n Untergruppen auszusondern, sofort auf die $\Gamma^{(q)}$ der ganzzahligen ternären Substitutionen anwenden lässt.*) Insbesondere werden diejenigen Substitutionen, deren Diagonalglieder $\equiv 1$ sind, während die übrigen sechs Glieder durch n theilbar sind, eine ausgezeichnete Congruenzgruppe bilden, die wir als Hauptcongruenzgruppe bezeichnen werden. Sie ist von endlichem Index und spielt eine ganz ähnliche Rolle, wie diejenige Untergruppe der Modulgruppe, welche als Hauptcongruenzgruppe n^{ter} Stufe bezeichnet wird.

Jetzt transformire man $\Gamma^{(q)}$ durch T, wobei die einzelne Substitution S in $U = T^{-1}ST$ übergeht. Die Substitution U hat die Gestalt (4) I, § 1, wobei die Coefficienten rationale Brüche $\frac{b_{ik}}{\Delta}$ mit dem Nenner Δ sein werden, während sich die Zähler b_{ik} linear und ganzzahlig aus den Coefficienten von S aufbauen. Soll U ganzzahlig sein, so müssen die neun Bedingungen $b_{ik} \equiv 0$, (mod. Δ) erfüllt sein. Die Identität $S = 1$ liefert $U = 1$, erfüllt also diese Bedingungen, damit aber offenbar auch jede mit 1 modulo Δ congruente Substitution S. Indem aber die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen U der Determinante 1 keine andere als die Modulgruppe Γ ist, entspringt offenbar der Satz, *dass diese letztere Gruppe Γ mit der transformirten Gruppe $T^{-1}\Gamma^{(q)}T$ eine Untergruppe von endlichem Index gemein hat.* Durch Umkehrung dieses Schlussverfahrens überblickt man ohne Mühe, *dass die in Rede stehende gemeinsame Untergruppe innerhalb der Modulgruppe eine Congruenzgruppe der Stufe Δ ist.*

Bei $q = 5$ ziehen wir etwa die beiden ganzzahligen Lösungen $(1, 2, \pm 1)$ von $5x^2 - y^2 - z^2 = 0$ heran und schreiben daraufhin als Substitution T:

$$\begin{aligned}\xi &= 5x - 2y - z,\\ \eta &= -10x + 5y,\\ \zeta &= 25x - 10y + 5z.\end{aligned}$$

Die Form f geht alsdann über in $\frac{1}{5}(\xi\zeta - \eta^2)$, während wir als Deter-

*) Cf. Poincaré, l. c., p. 422.

minante von T sofort $\Delta = 50$ erhalten. Setzen wir jetzt in Anlehnung an (1) I, § 6 von ξ, ζ, η aus $\omega' = \frac{\eta + i\sqrt{\xi\zeta - \eta^2}}{\xi}$, während ω seine im § 5 des vorigen Theiles zu Grunde gelegte Bedeutung beibehält, so ist auf Grund einer kurzen Rechnung:

$$\omega' = -\sqrt{5} \cdot \frac{\omega + 2 + \sqrt{5}}{\omega - 2 - \sqrt{5}}.$$

Die in Fig. 3 gegebene Viereckstheilung der $\Gamma^{(5)}$ ist nun sogleich in der Halbebene ω' gezeichnet. Indem man diese Figur also nach dem Princip der Symmetrie weiter fortsetzt, muss es möglich sein, durch eine ganze Anzahl solcher Kreisbogenvierecke ein gewisses Polygon einer Congruenzgruppe 50^{ster} Stufe gerade vollständig auszufüllen. Wir müssen es indessen unterlassen, dies mit Hülfe von Figuren wirklich durchzuführen.

Berlin, den 22. October 1890.

Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis.

Von

P. A. Nekrassoff in Moskau.

Die vorliegende Schrift enthält die ursprünglich in russischer Sprache veröffentlichten kritischen Bemerkungen zu der von Herrn Fuchs herrührenden Methode der analytischen Fortsetzung der Functionen, welche in dessen Arbeit „Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen"*) aufgestellt ist. Die Grundlage dieser Methode bildet ein Theorem vom sogenannten *Grenzkreis*. Dasselbe scheint mir indessen eine Lücke zu enthalten, vermöge deren die Methode sich nicht immer als gültig erweist. Ich habe darauf seiner Zeit Herrn Anissimoff aufmerksam gemacht, welcher das fragliche Theorem in seiner Arbeit „Die Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen"**) näher betrachtet hat.

Auf eine diesbezügliche Mittheilung des Herrn Anissimoff an Herrn Fuchs hat nun der letztere in seiner „Bemerkung zu der Arbeit in Band 75, Seite 177"***) einen Versuch gemacht, das fragliche Theorem zu modificiren. Es ist indessen auch diese Note des berühmten Gelehrten nicht ganz einwurfsfrei, wie ich in meiner Abhandlung „Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis"†) gezeigt habe. Hiernach glaube ich, dass die Fuchs'sche Methode noch gewisser Vervollständigungen bedarf.

1. Wir nehmen mit Herrn Fuchs an, dass

$$(1) \qquad F(w) = \frac{f(w)}{w g(w)}, \quad \psi(w, w_1) = \frac{F(w) - F(w_1)}{w - w_1},$$

wo $f(w)$, $g(w)$ ganze rationale Functionen und $f(0)$, $g(0)$ von Null

*) Crelle's Journal, Bd. 75.

**) „Wissenschaftliche Berichte der Universität Moskau". Mathem. Abtheilung, Ausgabe IX. 1889.

***) Crelle's Journal, Bd. 106, 1. Heft. 1890.

†) „Mathematische Sammlung" Zeitschrift der Moskauer Mathematischen Gesellschaft Bd. 14, 4. 1890.

verschieden sind, und bezeichnen die Werthe w und w_1 — in der Ebene einer complexen Variablen gedeutet — als *zusammengehörige* Punkte, wenn die Bedingung

$$\psi(w, w_1) = 0, \tag{2}$$

stattfindet.

Unter allen um den Nullpunkt der w beschriebenen concentrischen Kreisen, welche die Eigenschaft haben, dass jedem innerhalb eines solchen Kreises gelegenen Punkte w nur ausserhalb desselben gelegene Punkte w_1 entsprechen, bezeichnen wir den *grössten* nach Herrn Fuchs als den der Function $F(w)$ zugehörigen *Grenzkreis*. Er wird im Folgenden stets durch K und sein Radius durch R bezeichnet.

Es bedeute sodann $K(r)$ den Kreis, welcher um den Punkt $w = 0$ mit dem Radius r beschrieben ist. Bei der Bewegung des Punktes w im Kreise $K(r)$, beschreiben die Punkte w_1, welche die Wurzeln der Gleichung (2) darstellen, eine Curve $C(r)$. Wird r unendlich klein, so besteht die Curve $C(r)$ aus unendlich kleinen geschlossenen Curven, welche die Pole der Function $wF(w)$ umgeben und ausserdem für $F(\infty) = \infty$ aus einer geschlossenen Curve, deren Punkte sämmtlich unendlich weit entfernt sind. Wenn der Radius r des Kreises $K(r)$ vom Werthe Null an zunimmt, deformirt sich die Curve $C(r)$ und für $r < R$ müssen alle Punkte dieser Curve ausserhalb des Grenzkreises K liegen und können denselben auch nicht berühren. Hätte nämlich die Curve $C(r)$ bei $r < R$ mit der Peripherie des Kreises K einen Punkt $w_1 = v$ gemeinsam, welcher dem Punkte $w = v'$ des Kreises $K(r)$ entspricht, so entspräche dem Punkte w_1, der dem v unendlich benachbart ist und innerhalb des Kreises K liegt, der Punkt w, der dem v' unendlich benachbart ist, innerhalb desselben Kreises. Das aber widerspricht der Definition des Grenzkreises.

Wenn r, von Null zunehmend, die Grösse R erreicht, erreicht der Kreis $K(r)$ den Grenzkreis K und die Curve $C(r)$ geht in die Grenzcurve C über, welche den Kreis K in einigen Punkten berührt und im übrigen ausserhalb dieses Kreises verläuft.

Auf der Peripherie des Grenzkreises K muss sich also wenigstens ein Paar von zusammengehörigen Punkten w' und w'' befinden.

2. Herr Fuchs hat im Bd. 75 des Crelle'schen Journals folgenden allgemeinen Satz über den Grenzkreis gegeben:

Der Radius R des der gegebenen Function $F(w)$ zugehörigen Grenzkreises K ergiebt sich als der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$, welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul hat.

Dieser Satz ist indessen nicht richtig, wie man mit Hülfe des

folgenden einfachen Beispiels erkennt, welches Herr Anissimoff Herrn Fuchs mitgetheilt hatte:

$$(3) \qquad F(w) = \frac{(w+1)^n}{(w+1)^n - 1}, \quad n > 2.$$

Man findet nämlich in diesem Falle durch einfache Rechnung, dass die obengenannte Curve $C(r)$ aus $n-1$ Kreisen $K_1(r), K_2(r), \ldots, K_{n-1}(r)$ besteht, welche dem Kreise $K(r)$ gleich und um die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ resp. beschrieben sind; die Grössen a haben folgende Gestalt:

$$(4) \qquad a_s = e^{\frac{2\pi s i}{n}} - 1, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Wenn z, von Null zunehmend, den Werth

$$(5) \qquad R = \sin\frac{\pi}{n}$$

erreicht, so berührt der Kreis $K(r)$, für den Grenzwerth $r = R$, die Kreise $K_1(r)$ und $K_{n-1}(r)$ in Punkten w' und w'':

$$(6) \qquad \begin{cases} w' = \sin\frac{\pi}{n} e^{\frac{+\pi(2+n)i}{2n}}, \\ w'' = \sin\frac{\pi}{n} e^{\frac{-\pi(2+n)i}{2n}}. \end{cases}$$

Also lässt sich der Radius des Grenzkreises in diesem Beispiel mit Hülfe der Gleichung (5) bestimmen, wobei die zusammengehörigen auf der Peripherie des Grenzkreises K liegenden Punkte w' und w'' die Grössen darstellen, welche durch die Gleichungen (6) gegeben sind. Andererseits hat die Gleichung $F'(w) = 0$ in diesem Beispiel nur die einzige Wurzel $w = -1$, deren Modul grösser ist, als der genannte Radius des Grenzkreises, was dem Fuchs'schen Satze widerspricht.

Die Quelle des Fehlers bei Herrn Fuchs ist in den Erwägungen auf Seite 182 der oben citirten Schrift (Crelle's Journal Bd. 75) zu suchen. Herr Fuchs differenzirt die Gleichung (2) unter der Annahme $w = re^{\varphi i}$ und $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, und benutzt das erhaltene Resultat der Differentiation in jenem Momente, wo die Grössen φ und φ_1, bei der Aenderung des r von $R + \varepsilon$ bis $R - \varepsilon$, von reellen Werthen zu imaginären übergehen und die Ableitungen $\frac{d\varphi}{dr}$ und $\frac{d\varphi_1}{dr}$ eine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden, indem sie unendlich gross werden.

3. Herr Fuchs gelangt nun in seiner „Bemerkung zu der Arbeit im Bd. 75", in welcher er auf den eben bezeichneten Fall eingeht, zu dem Schlusse, dass hier ein *Ausnahmefall* vorliegt, von welchem die Bestimmbarkeit des Grenzkreises im *Allgemeinen*, nach der Seite 194

der ersten Abhandlung (Crelle, Bd. 75) zusammengestellten Forderungen nicht beeinflusst werde.

Bei dem Ausnahmefalle lässt sich der Radius des Grenzkreises, nach Herrn Fuchs, auf folgende Weise bestimmen:

Haben die beiden Gleichungen

$$\psi(w, w_1) = 0, \quad w F'(w) + w_1 F'(w_1) = 0 \tag{7}$$

Lösungen (w_1, w), *für welche die Moduln von* w_1 *und* w *einander gleich sind, und ist der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln der Gleichung* $F'(w) = 0$, *so ist derselbe der Radius des Grenzkreises.*

Setzen wir in die Gleichungen (7) $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$ und trennen die reellen und die imaginären Bestandtheile, so erhalten wir, nach Herrn Fuchs, zur Bestimmung von r, $\cos\varphi$, $\cos\varphi_1$ vier algebraische Gleichungen, deren Zusammenbestehen eine *Bedingungsgleichung* für die Coefficienten von $f(w)$ und $g(w)$ zur Folge hat.

Diesen Erwägungen nach, nennt Herr Fuchs den Fall, wo der in Nr. 2 citirte Satz nicht gilt, einen *Ausnahmefall* und sucht dessen Einfluss auf folgendem Wege zu eliminiren. Er giebt der im Satze gebrauchten Function $F(w)$ die folgende Gestalt:

$$F(w) = \frac{\varphi(w)[(m-1)w^{m+1} - (m+1)] + a(m-1)(w^{m+1}-1)}{w[(m-1)w^{m+1} - (m+1)]}, \tag{8}$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Diese Grösse a darf man so wählen, dass die genannte Bedingungsgleichung nicht erfüllt wird, und es bleibt somit der erste Satz (Crelle, Bd. 75), über den Grenzkreis, nach Herrn Fuchs, auch *für den vorliegenden Fall* noch gültig.

Wir wollen indessen die Unvollständigkeit dieser Ergänzung zunächst durch die Aufstellung solcher Beispiele darthun, bei welcher weder der frühere in Nr. 2 citirte Satz, noch auch die neue Regel des Herrn Fuchs gilt.

Mit dem eben erwähnten Falle zusammen betrachten wir nämlich die Function

$$F_a(w) = \frac{(w+1)^n}{(w+1)^n - 1} + \frac{a(m-1)(w^{m+1}-1)}{w[(m-1)w^{m+1} - (m+1)]}, \quad n > 2, \ m > 1. \tag{9}$$

wo a eine kleine *reelle* Grösse ist. Die Function $F_a(w)$ ist ihrer Gestalt nach der Function ähnlich, welche sich durch die Gleichung (8) bestimmen lässt, und geht bei $a = 0$ in die Function $F(w)$ über, welche durch Gleichung (3) gegeben ist. Wenn wir den Radius des der Function $F_a(w)$ zugehörigen Grenzkreises untersuchen und das Bestehen der Fuchs'schen *Bedingungsgleichung* zulassen, bei deren Erfüllung der in Nr. 2 citirte Fuchs'sche Satz seine Giltigkeit verliert und die neue Regel stattfindet, so bemerken wir, dass diese Bedingungsgleichung den

Parameter a algebraisch enthält. Wir deuten dies (ohne den Ausdruck weiter zu berechnen) an durch die Gleichung:

$$\xi(a) = 0, \tag{10}$$

wo also $\xi(a)$ eine algebraische Function von a bedeutet. Die Bedingungsgleichung (10) ist befriedigt für $a = 0$, weil die Function (9) in diesem Falle in die Function (3) übergeht, für welche die neue Fuchs'sche Regel erfüllt ist. Aber für einen hinlänglich kleinen von Null verschiedenen Werth von a wird die Bedingung (10) *nicht* erfüllt, weil die algebraische Gleichung mit endlichen Coefficienten keine unendlich benachbarten Wurzeln haben darf. Es müsste sich also, wenn die Fuchs'schen Schlüsse richtig sind, der Radius R_a des der Function $F_a(w)$ zugehörigen Grenzkreises K_a auf Grund des Fuchs'schen Satzes in Nr. 2 bestimmen lassen d. h. durch den kleinsten Modul der Wurzeln der Gleichung $F_a'(w) = 0$, welche die Gestalt

$$a(m-1)\left\{\frac{(w+1)^n-1}{w}\right\}^2\left\{(m-1)\,w^{2m+2}+2w^{m+1}+m+1\right\} \\ + n(w+1)^{n-1}\left\{(m-1)\,w^{m+1}-(m+1)\right\}^2 = 0 \tag{11}$$

hat. Diese Gleichung hat, bei unendlich kleinem a, $n-1$ unendlich grosse Wurzeln, ferner die $m+1$ Wurzeln, deren Moduln der Grösse

$$g = \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^{\frac{1}{m+1}} \quad \text{(wo also } g > 1\text{)}$$

unendlich benachbart sind, und endlich noch die $n-1$ Wurzeln, welche dem Werthe -1 unendlich benachbart sind. Also muss der Radius R_a, nach Herrn Fuchs, dem Werthe 1 unendlich benachbart sein; dieses Resultat ist aber unmöglich. Es besitzt nämlich, wie leicht zu sehen, die Gleichung

$$\psi_a(w'', w_1) = \frac{F_a(w'') - F_a(w_1)}{w'' - w_1} = 0, \tag{12}$$

(wo die Grösse w'' durch die zweite der Gleichungen (6) gegeben ist) bei unendlich kleinem a die Lösung $w_1 = w_1'$, welche der Grösse w' unendlich benachbart, die sich aus der ersten der Gleichungen (6) bestimmen lässt. Also befinden sich die zwei zusammengehörigen Punkte $w = w''$ und $w_1 = w_1'$, bei ziemlich kleinem a, *innerhalb* des Grenzkreises K_a (wenn nur der Radius dieses Kreises der Eins unendlich benachbart ist), was aber dem Begriffe des Grenzkreises widerspricht.

Somit giebt die Function (9) bei unendlich kleinem, von Null verschiedenem a ein Beispiel, in welchem nicht nur der frühere Satz von Herrn Fuchs (in Nr. 2), sondern auch die neue Regel, ihre Giltigkeit verliert.

Die Quelle dieser ungenauen Schlüsse ist, nach meiner Meinung, in folgenden Erwägungen zu suchen, welche wir aus der Fuchs'schen „Bemerkung zu der Arbeit im Bd. 75" (Crelle's Journal, Bd. 106) hierher setzen:

„Der Voraussetzung gemäss entsprechen den Werthen von w in der Umgebung von w'' Punkte w_1 in der Umgebung von w', die ausserhalb oder innerhalb K liegen, je nachdem w innerhalb oder ausserhalb K befindlich ist. Sind daher $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$ zusammengehörige Punkte des dem Kreise K unendlich benachbarten concentrischen und grösseren Kreises K', welche resp. den Punkten w'' und w' unendlich benachbart liegen, so müssen die geometrischen Quantitäten $\overline{w} - w''$ und $\overline{w}_1 - w'$ die Richtungen der Tangenten des Kreises K resp. in w'' und w' haben. Nun sind aber dieselben geometrischen Quantitäten Halbsehnen eines und desselben Kreises K'. Sind demnach $\varphi'' + d\varphi$, $\varphi' + d\varphi_1$ resp. die Argumente von $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$, so folgt daher zunächst

$$Rd\varphi = \pm Rd\varphi_1,$$

also

$$d\varphi = \pm d\varphi_1."$$

Diese Erwägungen sind aber nicht stichhaltig wegen der Annahme, dass die beiden zusammengehörigen Punkte $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$, welche den Punkten w'' und w' unendlich benachbart sind, Punkte *desselben Kreises K' sind*, welcher zu dem Kreise K concentrisch und von grösserem Radius als R ist. Diese Annahme ist nur dann möglich, wenn wir voraussetzen, dass eine der Grössen $F'(w')$ und $F'(w'')$ zu Null wird. Wenn aber keine dieser Grössen $F'(w')$ und $F'(w'')$ verschwindet, so ist diese Annahme durchaus unmöglich.

4. Wir wollen jetzt die genaue Regel für die Bestimmung des Radius des Grenzkreises geben; dabei wird sich zeigen, dass die Fälle, in welchen die Fuchs'schen Sätze nicht gelten, nicht als Ausnahmefälle bezeichnet werden können.

Bei der Bewegung des Punktes w auf der Peripherie des Grenzkreises K beschreiben die zusammengehörigen Punkte w_1, welche die Wurzeln der Gleichung (2) darstellen, eine Curve C, welche, nach Nr. 1, ausserhalb des Grenzkreises K liegt und diesen Kreis in einigen Punkten berührt. Es sei $w_1 = w'$ einer von diesen Berührungspunkten der Curve C und des Kreises K und es sei ferner $w = w''$ ein Punkt der Peripherie des Kreises K, welcher dem Punkte $w_1 = w'$ entspricht, so dass

$$\psi(w'', w') = 0, \tag{13}$$

wobei mod. w' = mod. w'' = R.

Wenn wir die Gleichungen (2) und (13) zusammenstellen und annehmen, dass die Grössen $F'(w'')$ und $F'(w')$ von Null verschieden sind, so bemerken wir, dass jedem Punkte w, der dem w'' benachbart ist, nur ein einziger Punkt entsprechen kann, welcher dem w' benachbart ist; derselbe wird durch die Reihenentwicklung

$$(14) \qquad w_1 = w' + b_1(w - w'') + b_2(w - w'')^2 + \cdots$$

dargestellt, in welcher die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots$ endliche, durch die Gleichungen

$$(15) \qquad b_1 = \left(\frac{dw_1}{dw}\right)_{w=w''} = \frac{F'(w'')}{F'(w')}, \quad b_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 w_1}{dw^2}\right)_{w=w''}, \ldots$$

definirte Grössen sind. Dabei ist b_1 von Null verschieden. Wenn wir in Gleichung (14) $w = w'' e^{\theta i}$ setzen, so beschreibt der Punkt w, bei der Aenderung θ von $-\delta$ bis $+\delta$, wo δ eine kleine positive Grösse ist, solchen Bogen des Grenzkreises K, welcher den Punkt w'' in der Mitte enthält; der zugehörige Punkt w_1, der durch Formel (14) definirt ist, beschreibt den Bogen der Curve C, welcher den Berührungspunkt w' enthält; der Modul r_1 der Grösse w_1 muss bei $\theta = 0$ ein Minimum werden und der Bedingung

$$(16) \qquad \left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)_{\theta=0} = 0$$

Genüge leisten, weil die Gleichung (14) erlaubt die Function r_1 in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von θ zu entwickeln. Die Bedingung (16) ist (wie leicht zu sehen) der Forderung äquivalent, dass *die Grösse A, welche sich durch die Gleichung*

$$(17) \qquad w'' F'(w'') + A w' F'(w') = 0$$

bestimmen lässt, reell sei.

Weiter bemerken wir, dass der Punkt w, welcher die Grösse

$$(18) \qquad w = w''(1 - h)$$

darstellt, bei kleinem positiven h innerhalb des Grenzkreises K liegen soll und dass der zugehörige Punkt w_1, dem Begriffe des Grenzkreises zufolge, sich ausserhalb des Kreises K dabei befinden soll, d. h. es findet die Ungleichheit

$$(19) \qquad \text{mod. } w_1 > R$$

statt. Mit Hülfe der Gleichungen (14) und (18) überzeugen wir uns, dass die Bedingung (19) der Bedingung

$$(20) \qquad A > 0$$

äquivalent ist, wo die Grösse A durch die Gleichung (17) gegeben ist. Also *muss die Grösse A nicht nur reell, sondern auch positiv sein.*

Bei der Erfüllung der Bedingung (20) müssen die zusammengehörigen Punkte w und w_1, welche resp. den Punkten w'' und w' un-

endlich benachbart sind, so liegen, dass einer von ihnen innerhalb des Grenzkreises K, der andere ausserhalb desselben sich befindet.

Die Gleichungen (13), (17), so wie auch die Gleichung

$$\text{mod. } w'' = \text{mod. } w' = R \tag{21}$$

und die Ungleichung (20) geben die gesuchten analytischen Bedingungen, mit deren Hülfe der Radius des Grenzkreises K sich in dem Falle bestimmen lässt, in welchem die Grössen $F'(w'')$ und $F'(w')$ von Null verschieden sind und der Fuchs'sche erste Satz (in Nr. 2) nicht gilt.

Um die vorhergehenden Schlüsse auch auf den Fall auszudehnen, wo der Fuchs'sche erste Satz der Nr. 2 gilt, ist es hinreichend die Gleichungen (13), (17) und (21) nicht nur unter der Bedingung (20), sondern auch bei der Bedingung

$$A = 0 \tag{22}$$

zu betrachten. Bei der letzten Bedingung werden die Gleichungen (13), (17) und (21) befriedigt, wenn wir

$$w'' = w' = v \tag{23}$$

annehmen, wo v eine Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$ ist, welche einem sich selbst entsprechenden Punkte zugehört. Derartige Fälle muss man bei der Bestimmung des Radius des Grenzkreises K berücksichtigen, weil die Wurzeln der Gleichung $F'(w) = 0$ innerhalb des Grenzkreises nicht liegen dürfen, sonst könnte man innerhalb des Grenzkreises ein Paar zusammengehöriger Punkte finden, welche der Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$ benachbart sind.

Also haben wir folgenden allgemeinen Satz für die Bestimmung des Radius des Grenzkreises, welcher für alle möglichen Fälle gilt:

Bestimmen wir alle möglichen zusammengehörigen Werthe (w, w_1, A) *der complexen Grössen* w, w_1 *und der reellen Grösse* A, *welche den Bedingungen*

$$\begin{cases} \text{mod. } w = \text{mod. } w_1, & \psi(w, w_1) = 0, \\ wF'(w) + Aw_1 F'(w_1) = 0, & A \geqq 0, \end{cases} \tag{24}$$

Genüge leisten und wählen wir aus diesen zusammengehörigen Werthen (w, w_1, A) *denjenigen, welchem der kleinste Modul der Grösse* w *entspricht, so ist dieser letzte Modul der Radius* R *des Grenzkreises* K.

Wenn wir annehmen

$$w = re^{\varphi i}, \quad w_1 = re^{\varphi_1 i},$$
$$\psi(w, w_1) = f_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1) + i f_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1),$$
$$wF'(w) = \Theta_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1) + i\Theta_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1),$$
$$w_1 F'(w_1) = \chi_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1) + i\chi_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1),$$

wo

$$f_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1), \quad f_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1),$$
$$\Theta_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1), \quad \Theta_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1),$$
$$\chi_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1), \quad \chi_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1)$$

reelle Grössen sind, so haben die Bedingungen (24), nach der Elimination von A, die Form:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1) = 0, \quad f_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1) = 0, \\ \dfrac{\Theta_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1)}{\chi_1(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1)} = \dfrac{\Theta_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1)}{\chi_2(r, \cos\varphi, \cos\varphi_1)} \geqq 0. \end{array} \right.$$

Wir haben also *drei unbekannte* Grössen r, $\cos\varphi$ und $\cos\varphi_1$, welche *drei Gleichungen* und einer Ungleichung Genüge leisten, wobei die Grösse r positiv ist und die Grössen $\cos\varphi$ und $\cos\varphi_1$ die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreiten.

Es folgt daraus, dass die in Nr. 2 und 3 citirten Fuchs'schen Sätze nur dann gelten, wenn die Grösse A, welche den Bedingungen (24) Genüge leistet, gleich Null oder Eins ist; wenn aber diese Grösse, welche jeden positiven Werth haben kann, von Null oder Eins verschieden ist, gilt keiner von den genannten Fuchs'schen Sätzen. *Man wird also die Fälle, in welchen die Fuchs'schen Sätze nicht gelten, keineswegs als Ausnahmefälle bezeichnen dürfen.*

Moskau, am 20. September 1890.

Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen.

Von

F. Junker in Schorndorf.

Hat man r Gruppen von je $n+1$ Elementen (Grössen), welche derart auf einander bezogen sind, dass zu jedem Element einer Gruppe ein entsprechendes (gleichwerthiges) Element jeder anderen Gruppe gehört, so lassen sich die $r(n+1)$ Elemente sämmtlicher Gruppen auch zu $n+1$ neuen Gruppen (Reihen) von je r gleichwerthigen Elementen anordnen.

Bezeichnet man die Elemente der Gruppen $P_1, P_2. P_3, \ldots, P_r$ mit

$$(1) \qquad \begin{cases} P_1 \cdots x_1 y_1 z_1 t_1 \cdots w_1, \\ P_2 \cdots x_2 y_2 z_2 t_2 \cdots w_2, \\ P_3 \cdots x_3 y_3 z_3 t_3 \cdots w_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_r \cdots x_r y_r z_r t_r \cdots w_r, \end{cases}$$

so wollen wir beispielsweise die Elemente $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_r$ als gleichwerthige betrachten.

Eine ganze Function der vorstehenden Elemente, welche sich nicht ändert, wenn man die Elemente irgend einer Gruppe mit den entsprechenden irgend einer andern vertauscht, ist eine symmetrische Function dieser Gruppen.

Die symmetrischen Functionen, welche sich aus den Elementen des Systems (1) bilden lassen, können nach der Zahl der in irgend einem Glied auftretenden Elemente verschiedener Gruppen eingetheilt werden. Demgemäss spricht man von einförmigen, zweiförmigen, dreiförmigen, ..., r-förmigen symmetrischen Functionen und versteht darunter solche, welche in irgend einem Glied nur die Elemente von einer, von zwei, von drei, ..., von r Gruppen enthalten.

So ist beispielsweise:

$$\Sigma x_1^m y_1^n = x_1^m y_1^n + x_2^m y_2^n + \cdots + x_r^m y_r^n$$

eine einförmige symmetrische Function der r Gruppen

$$x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3, \ldots. x_r y_r$$

von je zwei Elementen.

Treten in irgend einem Glied einer symmetrischen Function die Elemente jeder Gruppe höchstens im ersten Grad auf, so nenne ich die fragliche Function eine symmetrische Elementarfunction dieser Gruppen. Ich unterscheide also bei r Systemen von je $n+1$ Grössen einförmige, zweiförmige, dreiförmige, ..., r-förmige symmetrische Elementarfunctionen. Beispielsweise ist

$$\Sigma x_1 y_2 z_3 = x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 + \cdots$$

eine (dreiförmige symmetrische) Elementarfunction.

Um mit den Elementarfunctionen leichter operiren zu können, mögen dieselben durch einfache Zeichen bezeichnet und übersichtlich zusammengestellt werden:

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lllll}
\Sigma x_1 = a_1, & \Sigma y_1 = b_1, & \Sigma z_1 = c_1, & \Sigma t_1 = d_1, & \ldots \\
\Sigma x_1 x_2 = a_2, & \Sigma y_1 y_2 = b_2, & \Sigma z_1 z_2 = c_2, & \Sigma t_1 t_2 = d_2, & \ldots \\
\Sigma y_1 z_2 = A_2, & \Sigma z_1 x_2 = B_2, & \Sigma x_1 y_2 = C_2, & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma x_1 t_2 = D_2, & \Sigma y_1 t_2 = E_2, & \Sigma z_1 t_2 = F_2, & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma x_1 x_2 x_3 = a_3, & \Sigma y_1 y_2 y_3 = b_3, & \Sigma z_1 z_2 z_3 = c_3, & \Sigma t_1 t_2 t_3 = d_3, & \ldots \\
\Sigma y_1 y_2 z_3 = A_3, & \Sigma z_1 z_2 x_3 = B_3, & \Sigma x_1 x_2 y_3 = C_3, & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma y_1 z_2 z_3 = A_3', & \Sigma z_1 x_2 x_3 = B_3', & \Sigma x_1 y_2 y_3 = C_3', & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma x_1 x_2 t_3 = D_3, & \Sigma y_1 y_2 t_3 = E_3, & \Sigma z_1 z_2 t_3 = F_3, & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma x_1 t_2 t_3 = D_3', & \Sigma y_1 t_2 t_3 = E_3', & \Sigma z_1 t_2 t_3 = F_3', & \ldots\ldots & \ldots \\
\Sigma x_1 y_2 z_3 = G_3, & \Sigma x_1 y_2 t_3 = H_3, & \Sigma x_1 z_2 t_3 = J_3, & \Sigma y_1 z_2 t_3 = K_3, & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\
\Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_r = a_r, & \Sigma y_1 y_2 y_3 \ldots y_r = b_r, & \cdot & \cdot & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots
\end{array}\right.$$

In diesem System enthalten die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Functionen nur gleichwerthige Elemente (binäre symmetrische Functionen). Die übrigen durch grosse Buchstaben angegebenen sind aus verschiedenen Elementenreihen zusammengesetzt (ternäre, quaternäre, quinäre, ..., Functionen).

Die den Buchstaben $a, b, c, \ldots$; $A, B, C, \ldots$ angehängten Indices geben unmittelbar das Gewicht der betreffenden Function in den Elementen an, wenn man unter dem Gewicht einer symmetrischen

Function, z. B. von $\Sigma x_1^\alpha y_2^\beta$, die Summe der Exponenten, z. B. $\alpha + \beta$, versteht, welche die einzelnen Elemente irgend eines Gliedes besitzen.

Nun ist die Anzahl sämmtlicher Elemente des Systems (1) $r(n+1)$, während die Zahl der symmetrischen Elementarfunctionen, welche sich aus denselben zusammensetzen lassen, eine erheblich grössere ist. Wir schliessen deshalb, dass letztere nicht unabhängig von einander sein können, sondern durch gewisse identische Relationen zusammenhängen müssen. Die wirkliche Herstellung derselben ist die Aufgabe der folgenden Untersuchung, welche der Verfasser im Anschluss an seine Dissertation*) angestellt und bei welchen er von Herrn Brill in Tübingen lebhafte Anregung und Förderung erfahren hat.

Die Untersuchungen zerfallen in drei Abschnitte:

1. Entwicklung einer allgemeinen Methode zur Bildung der Relationen;
2. Anwendung derselben auf die speciellen Fälle des ternären und quaternären Gebiets;
3. Allgemeine Anwendungen der Relationen.

I. Abschnitt.

Allgemeine Herleitung der Relationen.

Um die Zahl der symmetrischen Elementarfunctionen des Systems (2) bestimmen zu können, theile man dieselben nach dem Gewicht ein, dann erhält man $\binom{n+1}{1}$ Elementarfunctionen vom Gewicht 1, $\binom{n+2}{2}$ vom Gewicht 2, $\binom{n+3}{3}$ vom Gewicht 3, ..., $\binom{n+r}{r}$ vom Gewicht r. Die Anzahl aller Elementarfunctionen ist demnach durch die Reihe dargestellt:

$$S = \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+r}{r},$$

welche mit Hülfe der Identität

$$\binom{m}{k} = \binom{m+1}{k} - \binom{m}{k-1}$$

übergeht in:

$$(3) \qquad S = \binom{n+r-1}{r} - 1.$$

Wir betrachten im folgenden zweigliedrige Determinanten von der Form $(xy_i) = xy_i - yx_i$, welche einfach verschwinden, wenn die gleichwerthigen Elemente zweier Gruppen, z. B. x, y, bezw. mit x_i, y_i

*) Ueber algebraische Correspondenzen, Inaug. Dissertation, vergl. Anhang: Ueber einige reducirte Resultanten.

zusammenfallen. Aus den $2(n+1)$ Elementen der beiden Gruppen $P(xyzt\dots w)$ und $P_i(x_iy_iz_it_i\dots w_i)$ lassen sich offenbar

$$\binom{n+1}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

derartige zweigliedrige Determinanten bilden. Addirt man dieselben mit gewissen constanten Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ versehen, so erhält man eine Form:

$$\varphi_i \equiv \alpha(xy_i)+\beta(xz_i)+\gamma(yz_i)+\cdots+\tau(uw_i),$$

welche identisch verschwindet, wenn die Elemente der Gruppen P und P_i zusammenfallen.

Entsprechend den r Gruppen P_i ergeben sich auch r Functionen φ_i

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_r,$$

welche die variable Gruppe P und die constanten Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ gemeinschaftlich haben.

Ich betrachte nun das Product

$$\Phi \equiv \varphi_1\varphi_2\varphi_3\dots\varphi_r \tag{4}$$

der r Functionen $\varphi_i (i=1,2,3,\dots,r)$ und entwickele dasselbe nach Potenzen und Producten der Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$:

$$\Phi \equiv \alpha^r\Pi_1+\alpha^{r-1}\beta\Pi_2+\alpha^{r-2}\beta^2\Pi_3+\cdots+\tau^r\Pi_\sigma. \tag{4'}$$

Die Zahl der in (4′) auftretenden Productcombinationen $\overline{(\alpha\beta\gamma\dots\tau)}^{\,r}$ und somit auch die der Functionen Π ist offenbar $\sigma=\binom{r+k}{k}$, wo $k=\binom{n+1}{2}-1$ ist.

Jede der Functionen Π ist eine homogene symmetrische Function r^{ten} Grades der zweigliedrigen Determinanten $(xy_i), (xz_i), (yz_i), \dots, (uw_i)$ und verschwindet daher identisch, wenn irgend eine Gruppe P_i mit P zusammenfällt.

Das Product Φ ist nach (4) eine lineare homogene Function hinsichtlich der Elemente jeder Gruppe P_i, und da es auch eine symmetrische Function derselben ist, so lässt es sich als lineare Function der Elementarfunctionen darstellen. Da dies unabhängig von den Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \tau$ der Fall ist, so gilt dasselbe auch von den Coefficienten Π der Productcombinationen $\overline{(\alpha\beta\gamma\dots\tau)}^{\,r}$. Eine derartige Function Π_i lässt sich demnach als homogene Form r^{ten} Grades der $n+1$ Variabeln $xyzt\dots w$ betrachten, deren Coefficienten symmetrische Functionen (vom Gewicht r) sind und welche von der Form ist

$$\Pi_i\left(\overline{(xyzt\dots w)}^{\,r};\ a_rb_rc_r\dots A_rB_rC_r\dots\right).$$

Weil nun Φ verschwindet, wenn P mit einer der Gruppen P_i zusam-

menfällt, so gilt dasselbe auch von den Functionen Π_i. Es bestehen also die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi_i(x_1 y_1 z_1 t_1 \ldots w_1;\ a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots) = 0 \\ \Pi_i(x_2 y_2 z_2 t_2 \ldots w_2;\ a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots) = 0 \\ \Pi_i(x_3 y_3 z_3 t_3 \ldots w_3;\ a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Pi_i(x_r y_r z_r t_r \ldots w_r;\ a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots) = 0 \end{array}\right\}.$$

Addiren wir dieselben:

(5) $$\Sigma \Pi_i(x_1 y_1 z_1 t_1 \ldots w_1;\ a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots) = 0,$$

so erhalten wir eine Gleichung, welche neben den Elementarfunctionen $a_r b_r c_r \ldots A_r B_r C_r \ldots$ die einförmigen symmetrischen Functionen vom Gewicht r

$$\Sigma x_1^r,\ \Sigma x_1^{r-1} y_1,\ \Sigma x_1^{r-2} y_1 z_1, \ldots, \Sigma w_1^r$$

linear enthält. Drückt man letztere nach dem Vorgang von Poisson durch die Elementarfunctionen aus, so stellt die Gleichung (5) offenbar eine wirkliche identische Relation zwischen den Elementarfunctionen dar. Da nach dem Obigen die Zahl der Functionen Π_i $\sigma = \binom{r+k}{k}$ ist, so ist damit auch die Zahl der einfachen Relationen*) gegeben.

Um nach Poisson die einförmigen symmetrischen Functionen vom Gewicht r zu erhalten, verbinde man die $n+1$ Elemente $xyzt\ldots w$ mit einer neuen Grösse s durch die lineare Gleichung:

$$s = \lambda x + \mu y + \nu z + \cdots + \varepsilon w,$$

Dann ergeben sich für die s die Elementarfunctionen

$$\begin{array}{l} \Sigma s_1 = \lambda\ \Sigma x_1 \ + \mu\ \Sigma y_1 \ + \nu\ \Sigma z_1 \ + \cdots + \varepsilon\ \Sigma w_1, \\ \Sigma s_1 s_2 = \lambda^2 \Sigma x_1 x_2 + \lambda\mu \Sigma x_1 y_2 + \mu^2 \Sigma y_1 y_2 + \cdots + \varepsilon^2 \Sigma w_1 w_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Sigma s_1 s_2 \cdots s_r = \lambda^r \Sigma x_1 x_2 \cdots x_r + \lambda^{r-1}\mu \Sigma x_1 x_2 \cdots x_{r-1} y_r + \cdots \end{array}$$

Bildet man hierauf mit Hülfe der Newton'schen Formeln die Summe der r^{ten} Potenzen der s:

$$\Sigma s_1^r = \Sigma(\lambda x_1 + \mu y_1 + \nu z_1 + \cdots + \varepsilon w_1)^r$$

---

*) Weitere Relationen von unbegrenzter Zahl kann man jederzeit erhalten, wenn man an Stelle des Products Φ das allgemeinere

$$\psi \equiv \varphi_1^{k_1} \varphi_2^{k_2} \varphi_3^{k_3} \cdots \varphi_r^{k_r}$$

setzt, wo $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_r$ beliebige ganze positive Zahlen sind. Auf diese Weise ergeben sich Relationen vom Gewicht $p = 2(k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$, woraus sich für $k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = k_r = 1$ wieder die niedrigsten vom Gewicht $2r$ ergeben.

und setzt die Coefficienten der gleichen Potenzen und Producte von $(\overline{\lambda\mu\nu\ldots\varepsilon}^{\,r})$ auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man sämmtliche $\binom{r+n}{n}$ einförmige symmetrische Functionen vom Gewicht r.

Zusatz: Setzt man an Stelle der $n+1$ homogenen Elemente $xyz\ldots w$ jeder Gruppe die Verhältnisse von n derselben zum $(n+1)^{\text{ten}}$, beispielsweise die folgenden $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, \cdots, \frac{u}{w}$ und legt denselben je das Gewicht 1 bei, oder einfacher, setzt man überall $w = w_i = 1$, so erniedrigen gewisse Relationen in dem Grade ihr Gewicht, als die Grösse w in denselben auftritt. Dasselbe ist zunächst bei den Elementarfunctionen der Fall. Eine solche Function sei

$$E = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\lambda y_{\lambda+1} y_{\lambda+2} \ldots y_\mu z_{\mu+1} z_{\mu+2} \ldots u_i w_{i+1} w_{i+2} \ldots w_k,$$

welche in den Elementen $xyz\ldots u$ vom Gewicht i und in w vom Gewicht k sein soll, so ist $i+k$ das Gewicht der Function selbst. Setzt man in derselben $w_i = w_{i+1} = \cdots = w_k = 1$, so geht sie offenbar über in

$$E = \binom{r-i}{k} \Sigma x_1 x_2 \ldots x_\lambda y_{\lambda+1} y_{\lambda+2} \ldots y_\mu z_{\mu+1} z_{\mu+2} \ldots u_i,$$

wo die letztere Function nur noch das Gewicht i besitzt. Dabei ist zu beachten, dass die Zahl $\binom{r-i}{k}$ der Bedingung unterliegt $k+i \leqq r$ oder $k \leqq r-i$.

Für $r=5$, $i=2$, $k=2$ geht beispielsweise die Function

$$\Sigma x_1 y_2 w_3 w_4$$

über in

$$\Sigma x_1 y_2 w_3 w_4 = 3\,\Sigma x_1 y_2.$$

Infolge dieser veränderten Elementarfunctionen erniedrigt sich das Gewicht gewisser Relationen und variirt innerhalb der Grenzen $2r$ und r. Bei der Ausführung zeigt sich jedoch die Thatsache, dass alle Relationen Null werden, deren Gewicht kleiner als $r+2$ ist, d. h. die Relationen vom Gewicht $r+1$ und r. Die Zahl derselben ist

$$\binom{n}{2}\binom{r+n-2}{n-1}, \quad \text{bezw.} \quad \binom{r+n-1}{n-1}.$$

Die niedrigsten möglichen Relationen sind also vom Gewicht $r+2$ und von der Zahl $\binom{\binom{n}{2}+1}{2}\binom{r+n-3}{n-1}$. Für $n=2$, $r=3$ giebt es z. B. 2 Relationen vom Gewicht 5, die im II. Theil aufgestellt werden sollen.

Die Zahl aller einfachen wirklichen Relationen ist nach diesen Erörterungen

$$Z=\sigma-s=\binom{r+k}{k}-\binom{r+n-1}{n-1}-\binom{n}{2}\binom{r+n-2}{n-1},\quad k=\binom{n+1}{2}-1,$$

und diese liefert für das

$$\left.\begin{array}{l}\text{binäre}\\ \text{ternäre}\\ \text{quaternäre}\end{array}\right\}\text{Gebiet}\;\begin{array}{l}n=1\\ n=2\\ n=3\end{array}\quad Z=\left\{\begin{array}{l}0\\ \binom{r}{2}\\ \binom{r+5}{5}-(r+1)(2r+1)\end{array}\right.\quad\text{Relationen.}$$

II. Abschnitt.

Anwendung auf specielle Fälle.

Um das vorige an Beispielen zu erläutern, mögen einige Fälle eingehender behandelt und die einfachsten Relationen wirklich aufgestellt werden.

1.

Die Relationen im ternären Gebiet.

Hat man r Gruppen von je 3 Elementen $P_1(x_1y_1z_1)$, $P_2(x_2y_2z_2)$ $\ldots$, $P_r(x_ry_rz_r)$, so bestehen $S=\binom{r+3}{3}-1$ symmetrische Elementarfunctionen, die wie oben bezeichnet werden mögen. Sie hängen durch $\binom{r+2}{2}$ einfache Relationen zusammen, die im folgenden gebildet werden sollen.

Eine Gruppe $P_i(x_iy_iz_i)$ liefert mit der Gruppe $P(xyz)$ drei zweigliedrige Determinanten (yz_i), (zx_i), (xy_i), welche für $x=x_i$, $y=y_i$, $z=z_i$ null werden. Eine Function φ_i wird daher von der Form sein:

$$\varphi_i\equiv\alpha(yz_i)+\beta(zx_i)+\gamma(xy_i)\equiv\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ x & y & z\\ x_i & y_i & z_i\end{vmatrix}.$$

Das Product

$$\Phi\equiv\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots\varphi_r\equiv\alpha^r\Pi_1+\alpha^{r-1}\beta\Pi_2+\cdots+\gamma^r\Pi_\sigma$$

nach Potenzen und Producten der α,β,γ geordnet liefert alsdann die Coefficienten Π als die $\binom{r+2}{2}$ r-förmigen Elementarfunctionen der $3r$ zweigliedrigen Determinanten (yz_i), (zx_i), (xy_i), welche demgemäss in folgender Weise symbolisch dargestellt werden können:

$$\left.\begin{array}{r}\Pi(yz_1)(yz_2)\cdots\cdots\cdots(yz_r)=0\\ \Sigma\Pi(yz_1)(yz_2)\cdots\;(yz_{r-1})(zx_r)=0\\ \Sigma\Pi(yz_1)(yz_2)\cdots\;(yz_{r-1})(xy_r)=0\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \Pi(zx_1)(zx_2)\cdots\cdots\cdots(zx_r)=0\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \Pi(xy_1)(xy_2)\cdots\cdots\cdots(xy_r)=0\end{array}\right\}.$$

Führt man in dieselben die Elementarfunctionen ein und bildet über jede die Summe (5) Abschnitt I, so erhält man sämmtliche $\binom{r+2}{2}$ einfache Relationen des ternären Gebiets.

Anmerkung: Setzt man an Stelle der homogenen Elemente $x_i\,y_i\,z_i$ einer Gruppe P_i die Verhältnisse von zweien derselben zur dritten, z. B. $\frac{x_i}{z_i}$, $\frac{y_i}{z_i}$, oder einfacher, setzt man $z=z_i=1$, so werden $2r+1$ Relationen null, und zwar diejenigen vom Gewicht r und $r+1$. Im Ganzen bleiben alsdann für das ternäre Gebiet noch $\frac{r(r-1)}{2}=\binom{r}{2}$ wirkliche Relationen übrig, von welchen die niedrigsten das Gewicht $r+2$ besitzen.

a. Für $r=2$ hat man 6 Relationen:

1. $\Pi(yz_1)(yz_2)=0$, 4. $\Sigma\Pi(yz_1)(zx_2)=0$,
2. $\Pi(zx_1)(zx_2)=0$, 5. $\Sigma\Pi(zx_1)(xy_2)=0$,
3*. $\Pi(xy_1)(xy_2)=0$, 6. $\Sigma\Pi(xy_1)(yz_2)=0$,

von denen beispielsweise 3* und 6 nach Einführung der elementaren Functionen übergehen in:

$$3^*.\; x^2b_2-xyC_2+y^2a_2=0,$$
$$6.\; xyA_2-2zxb_2-y^2B_2+yzC_2=0.$$

Bildet man alsdann die Summe

$$\Sigma x_1^2\,.\,b_2-\Sigma x_1y_1\,.\,C_2+\Sigma y_1^2\,.\,a_2=0,$$
$$\Sigma x_1y_1\,.\,A_2-2\,\Sigma z_1x_1\,.\,b_2-\Sigma y_1^2\,.\,B_2+\Sigma y_1z_1\,.\,C_2=0$$

und ersetzt die einförmigen Functionen

$$\Sigma x_1^2=a_1^2-2a_2,\qquad \Sigma x_1y_1=a_1b_1-C_2,$$

etc. durch ihre Ausdrücke in den Elementarfunctionen, so erhält man schliesslich die beiden Relationen:

*) Die mit * bezeichneten Relationen bleiben solche auch für $z=z_i=1$, während dies mit den übrigen nicht der Fall ist.

3*. $a_1^2 b_2 + b_1^2 a_2 - 4 a_2 b_2 - a_1 b_1 C_2 + C_2^2 = 0,$

6. $(a_1 b_1 - C_2) A_2 - (b_1^2 - 2b_2) B_2 - 2(c_1 a_1 - B_2) b_2 + (b_1 c_1 - A_2) C_2 = 0.$

Aus denselben lassen sich durch Vertauschung entsprechender Reihen von Elementen die übrigen Relationen ableiten:

1. $b_1^2 c_2 + c_1^2 b_2 - 4 b_2 c_2 - b_1 c_1 A_2 + A_2^2 = 0,$

2. $c_1^2 a_2 + a_1^2 c_2 - 4 c_2 a_2 - c_1 a_1 B_2 + B_2^2 = 0,$

4. $(b_1 c_1 - A_2) B_2 - (c_1^2 - 2 c_2) C_2 - 2(a_1 b_1 - C_2) c_2 + (c_1 a_1 - B_2) A_2 = 0,$

5. $(c_1 a_1 - B_2) C_2 - (a_1^2 - 2 a_2) A_2 - 2(b_1 c_1 - A_2) a_2 + (a_1 b_1 - C_2) B_2 = 0.$

b) Für $r = 3$ existiren 10 Relationen, welche symbolisch gegeben sind durch:

$$\begin{array}{ll}
1. & \Pi(yz_1)\,(yz_2)\,(yz_3) = 0,\\
2. & \Pi(zx_1)\,(zx_2)\,(zx_3) = 0,\\
3^*. & \Pi(xy_1)\,(xy_2)\,(xy_3) = 0,\\
4. \\ 5. & \Sigma\Pi(yz_1)\,(yz_2)\begin{cases}(zx_3) = 0,\\ (xy_3) = 0,\end{cases}\\
6. \\ 7. & \Sigma\Pi(zx_1)\,(zx_2)\begin{cases}(xy_3) = 0,\\ (yz_3) = 0,\end{cases}\\
8^*. \\ 9^*. & \Sigma\Pi(xy_1)\,(xy_2)\begin{cases}(yz_3) = 0,\\ (zx_3) = 0,\end{cases}\\
10. & \Sigma\Pi(yz_1)\,(zx_2)\,(xy_3) = 0.
\end{array}$$

und in Wirklichkeit folgende Gestalt annehmen:

1. $$b_3(c_1^3 - 3c_1 c_2) - c_3(b_1^3 - 3 b_1 b_2) \\ + A_3'(b_1^2 c_1 - b_1 A_2 - b_2 c_1) - A_3(c_1^2 b_1 - c_1 A_2 - c_2 b_1) = 0,$$

2. $$c_3(a_1^3 - 3 a_1 a_2) - a_3(c_1^3 - 3 c_1 c_2) \\ + B_3'(c_1^2 a_1 - c_1 B_2 - c_2 a_1) - B_3(a_1^2 c_1 - a_1 B_2 - a_2 c_1) = 0,$$

3*. $$a_3(b_1^3 - 3 b_1 b_2) - b_3(a_1^3 - 3 a_1 a_2) \\ + C_3'(a_1^2 b_1 - a_1 C_2 - a_2 b_1) - C_3(b_1^2 a_1 - b_1 C_2 - b_2 a_1) = 0,$$

4. $$B_3(b_1^2 c_1 - b_1 A_2 - b_2 c_1) - D_3(c_1^2 b_1 - c_1 A_2 - c_2 b_1) \\ + C_3'(c_1^3 - 3 c_1 c_2) + A_3'(2 a_1 b_1 c_1 - a_1 A_2 - b_1 B_2 - c_1 C_2) \\ - A_3(c_1^2 a_1 - c_1 B_2 - c_2 a_1) - 3 c_3(b_1^2 a_1 - b_1 C_2 - b_2 a_1) = 0,$$

5. $$C_3'(c_1^2 b_1 - c_1 A_2 - c_2 b_1) - D_3(b_1^2 c_1 - b_1 A_2 - b_2 c_1) \\ + B_3(b_1^3 - 3 b_1 b_2) + A_3(2 a_1 b_1 c_1 - a_1 A_2 - b_1 B_2 - c_1 C_2) \\ - A_3'(b_1^2 a_1 - b_1 C_2 - b_2 a_1) - 3 b_3(c_1^2 a_1 - c_1 B_2 - c_2 a_1) = 0,$$

6. $$C_3(c_1^2 a_1 - c_1 B_2 - c_2 a_1) - D_3(a_1^2 c_1 - a_1 B_2 - a_2 c_1) \\ + A_3'(a_1^3 - 3 a_1 a_2) + B_3'(2 a_1 b_1 c_1 - a_1 A_2 - b_1 B_2 - c_1 C_2) \\ - B_3(a_1^2 b_1 - a_1 C_2 - a_2 b_1) - 3 a_3(c_1^2 b_1 - c_1 A_2 - c_2 b_1) = 0,$$

$$7.\quad A_3'(a_1^2c_1-a_1B_2-a_2c_1)-D_3(c_1^2a_1-c_1B_2-c_2a_1)$$
$$+C_3(c_1^3-3c_1c_2)+B_3(2a_1b_1c_1-a_1A_2-b_1B_2-c_1C_2)$$
$$+B_3'(c_1^2b_1-c_1A_2-c_2b_1)-3c_3(a_1^2b_1-a_1C_2-a_2b_1)=0,$$

$$8^*.\quad A_3(a_1^2b_1-a_1C_2-a_2b_1)-D_3(b_1^2a_1-b_1C_2-b_2a_1)$$
$$+B_3'(b_1^3-3b_1b_2)+C_3'(2a_1b_1c_1-a_1A_2-b_1B_2-c_1C_2)$$
$$-C_3(b_1^2c_1-b_1A_2-b_2c_1)-3b_3(a_1^2c_1-a_1B_2-a_2c_1)=0,$$

$$9^*.\quad B_3'(b_1^2a_1-b_1C_2-b_2a_1)-D_3(a_1^2b_1-a_1C_2-a_2b_1)$$
$$+A_3(a_1^3-3a_1a_2)+C_3(2a_1b_1c_1-a_1A_2-b_1B_2-c_1C_2)$$
$$-C_3'(a_1^2c_1-a_1B_2-a_2c_1)-3a_3(b_1^2c_1-b_1A_2-b_2c_1)=0,$$

$$10.\quad A_3(a_1^2c_1-a_1B_2-a_2c_1)-A_3'(a_1^2b_1-a_1C_2-a_2b_1)$$
$$+B_3(b_1^2a_1-b_1C_2-b_2a_1)-B_3'(b_1^2c_1-b_1A_2-b_2c_1)$$
$$+C_3(c_1^2b_1-c_1A_2-c_2b_1)-C_3'(c_1^2a_1-c_1B_2-c_2a_1)=0.$$

Setzt man in den vorstehenden Relationen $z=z_i=1$, so bleiben von denselben nur 3*, 8* und 9* als wirkliche Relationen übrig. Die Relation 3* bleibt unverändert, da sie die Elemente z_i nicht enthält. Die Relationen 8* und 9* erniedrigen ihr Gewicht auf 5 und gehen über in:

$$8^*.\quad b_1P_4-3b_3(a_1^2-3a_2)+C_3'(2a_1b_1-3C_2)-C_3(b_1^2-3b_2)=0,$$
$$9^*.\quad a_1P_4-3a_3(b_1^2-2b_2)+C_3(2a_1b_1-3C_2)-C_3'(a_1^2-3a_2)=0,$$

wo

$$P_4\equiv a_1^2b_2+b_1^2a_2-4a_2b_2-a_1b_1C_2+C_2^2$$

die für $r=2$ gefundene Relation 3* bezeichnet.

2.

Geometrische Bedeutung der Functionen Π.

Da für $n=2$ einer Gruppe P_i drei Elemente $x_iy_iz_i$ zugeordnet sind, so lassen sich dieselben als die homogenen Coordinaten eines Punktes P_i der Ebene auffassen. Den r Gruppen entsprechen alsdann auch r Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ der Ebene mit den Coordinaten $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, x_3y_3z_3, \ldots, x_ry_rz_r$. Bezieht man dieselben auf ein beliebiges Coordinatendreieck mit den Axen $x=0$, $y=0$, $z=0$, so kann man auch von den symmetrischen Functionen der Coordinaten von r festen Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ sprechen, welche entweder frei in der Ebene liegen oder ein vollständiges oder partielles Schnittpunktssystem zweier ebenen algebraischen Curven bilden mögen.

Ordnet man einem weiteren Punkte Q die Coordinaten α, β, γ zu, so ist die Gleichung eines Strahles QP_i, welcher den Punkt P_i von Q aus projicirt:

$$\varphi_i \equiv \alpha(y z_i) + \beta(z x_i) + \gamma(x y_i) = 0,$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten sein sollen.

Ein Strahlenbüschel QP_i, welches sämmtliche r Punkte P_i von Q aus projicirt, lässt sich darstellen durch das Product:

$$\Phi \equiv \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \cdots \varphi_r \equiv \alpha^r \Pi_1 + \alpha^{r-1}\beta \Pi_2 + \cdots + \gamma^r \Pi_\sigma,$$

wo die Functionen Π die aus II.$_1$ bekannte Gestalt haben.

Betrachtet man α, β, γ als constant, so stellt die Gleichung $\Phi = 0$ eine Curve r^{ter} Ordnung dar, welche durch die Punkte P_i einfach hindurchgeht. Da die Functionen Π ebenfalls verschwinden, wenn irgend ein Punkt P_i mit P zusammenfällt, so sind dieselben für sich gleich Null gesetzt ebenfalls Gleichungen von Curven r^{ter} Ordnung, welche sämmtlich durch die r Punkte P_i einfach hindurchgehen. Es fragt sich alsdann, welches die geometrische Bedeutung des Verschwindens irgend einer Function Π ist.

Um dies zu erkennen, schneide man zwei der Seiten des Coordinatendreiecks, z. B. $x = 0$ und $y = 0$ durch die Gerade:

$$\varphi_i = a(y z_i) + b(z x_i) + c(x y_i) = 0,$$

welche die beiden Punkte $P_i(x_i y_i z_i)$ und $P(xyz)$ verbindet. Die Abstandsverhältnisse der Schnittpunkte sind angegeben durch:

$$\varkappa_i = \frac{(z x_i)}{(x y_i)}, \quad \lambda_i = \frac{(y z_i)}{(x y_i)}.$$

Setzt man der Reihe nach $i = 1, 2, 3, \ldots, r$ und bildet die Elementarfunctionen der $2r$ Verhältnisse $\varkappa_i$, λ_i, so liefern dieselben gleich Null gesetzt unmittelbar die Gleichungen der Curven Π. Eine solche Curve kann demnach als der geometrische Ort des Mittelpunkts P eines Strahlenbüschels betrachtet werden, welches die r Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ projicirt und dessen Strahlen mit zwei beliebigen Seiten des Coordinatendreiecks Abstandsverhältnisse von den zugehörigen Ecken liefern, für welche eine gewisse Elementarfunction derselben verschwindet. So ist beispielsweise für drei Punkte P_1, P_2, P_3 die Curve 3^{ter} Ordnung:

$$\Sigma (y z_1)(x y_2)(x y_3) = 0$$

durch die Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

definirt.

Umgekehrt gilt dann auch der

Satz: Projicirt man von einem beliebigen Punkte $P(xyz)$ einer Curve Π die r Punkte P_i, so schneiden die Strahlen PP_i je zwei der Seiten des Coordinatendreiecks in Punkten, für welche eine gewisse symmetrische Elementarfunction der Abstandsverhältnisse verschwindet.

3.

Die Relationen im quarternären Gebiet.

Im quarternären Gebiet beträgt die Zahl der elementaren symmetrischen Functionen $S = \binom{r+4}{r} - 1$, zwischen welchen $\binom{r+5}{5}$ einfache Relationen bestehen, von denen für $r = 2$ und $r = 3$ einige aufgestellt werden sollen.

Eine Gruppe $P_i(x_i y_i z_i t_i)$ liefert mit der variablen Gruppe $P(xyzt)$ sechs zweigliedrige Determinanten (yz_i), (zx_i), (xy_i), (xt_i), (yt_i), (zt_i), welche eine Function φ_i von der Form geben:

$$\varphi_i \equiv \alpha(yz_i) + \beta(zx_i) + \gamma(xy_i) + \delta(xt_i) + \varepsilon(yt_i) + \zeta(zt_i).$$

In dem Product

$$\Phi \equiv \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \ldots \varphi_r \equiv \alpha^r \Pi_1 + \alpha^{r-1}\beta \Pi_2 + \cdots + \zeta^r \Pi_\sigma$$

ist die Zahl der Functionen Π und damit auch die der Relationen $\binom{r+5}{5}$. Dieselben lassen sich wie im ternären Gebiet als die r-förmigen symmetrischen Elementarfunctionen der genannten $6r$ zweigliedrigen Determinanten darstellen. So ist beispielsweise

$$\Sigma(xy_1)(xy_2)(xy_3)\ldots(xy_r) = 0$$

eine solche Relation.

Für $r = 2$ erhalten wir 21 Relationen, welche dargestellt sind durch:

$$\Sigma(yz_1)\begin{cases}(yz_2)^*\\(zx_2)^*\\(xy_2)^*\\(xt_2)\\(yt_2)\\(zt_2)\end{cases} = 0, \quad \Sigma(zx_1)\begin{cases}(zx_2)^*\\(xy_2)^*\\(xt_2)\\(yt_2)\\(zt_2)\end{cases} = 0, \quad \Sigma(xy_1)\begin{cases}(xy_2)^*\\(xt)_2\\(yt_2)\\(zt_2)\end{cases} = 0,$$

$$\Sigma(xt_1)\begin{cases}(xt_2)\\(yt_2)\\(zt_2)\end{cases} = 0, \quad \Sigma(yt_1)\begin{cases}(yt_2)\\(zt_2)\end{cases} = 0, \quad \Sigma(zt_1)(zt_2) = 0.$$

Von denselben sind aus dem ternären Gebiet alle diejenigen als bekannt vorauszusetzen, welche nur zwei oder drei der Elementenreihen x, y, z, t enthalten. Es sei deshalb nur eine Relation angegeben, welche die Elemente $xyzt$ zugleich enthält. Die Function

$$\Sigma(yz_1)(xt_2) = 0$$

oder

$$xyF_2 - zxE_2 - ytB_2 + ztC_2 = 0$$

liefert als wirkliche Relation:

$$a_1 b_1 F_2 + c_1 d_1 C_2 - c_1 a_1 E_2 - b_1 d_1 B_2 - 2C_2 F_2 + 2B_2 E_2 = 0.$$

Für $t = t_i = 1$ reducirt sich die Zahl der Relationen auf 6, welche mit * bezeichnet und in Abschnitt II aufgestellt worden sind.

Für $r = 3$ erhalten wir 56 Relationen, von denen die meisten wenigstens ihrer Gestalt nach schon aus dem ternären Gebiet bekannt sind. Von denjenigen, welche für das quarternäre Gebiet charakteristisch sind, seien beispielsweise nur die beiden angegeben:

$$\Sigma(yz_1)\,(yz_2)\,(xt_3) = 0,$$
$$\Sigma(yz_1)\,(zx_2)\,(xt_3) = 0,$$

welche die Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned}
&F_3(b_1^2 a_1 - b_2 a_1 - b_1 C_2) - C_3'(c_1^2 d_1 - c_2 d_1 - c_1 F_2)\\
&+ E_3(c_1^2 a_1 - c_2 a_1 - c_1 B_2) - B_3(b_1^2 d_1 - b_2 d_1 - b_1 E_2)\\
&+ G_3\left\{b_1 c_1 d_1 - \tfrac{1}{2}(b_1 F_2 + c_1 E_2 + d_1 C_2)\right\}\\
&- K_3\left\{a_1 b_1 c_1 - \tfrac{1}{2}(a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2)\right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_3(a_1^2 c_1 - a_2 c_1 - a_1 B_2) - H_3(c_1^2 a_1 - c_2 a_1 - c_1 B_2)\\
&+ 2C_3(c_1^2 d_1 - c_2 d_1 - c_1 F_2) - 2F_3(a_1^2 b_1 - a_2 b_1 - a_1 C_2)\\
&+ J_3\left\{a_1 b_1 c_1 - \tfrac{1}{2}(a_1 A_2 + b_1 B_2 + c_1 C_2)\right\}\\
&- G_3\left\{a_1 c_1 d_1 - \tfrac{1}{2}(a_1 F_2 + c_1 D_2 + d_1 B_2)\right\} +\\
&+ B_3\left\{2a_1 b_1 d_1 - (a_1 E_2 + b_1 D_2 + d_1 C_2)\right\}\\
&- B_3'\left\{2b_1 c_1 d_1 - (b_1 F_2 + c_1 E_2 + d_1 A_2)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Betrachtet man die Elemente $x_i y_i z_i t_i$ einer Gruppe P_i als die homogenen Coordinaten eines Punktes im Raum und bezieht denselben auf ein beliebiges Coordinatentetraeder mit den Seiten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, so lassen sich die Functionen Π ähnlich wie im ternären Gebiet geometrisch deuten.

Eine Function

$$\varphi_i \equiv \alpha(yz_i) + \beta(zx_i) + \gamma(xy_i) + \delta(xt_i) + \varepsilon(yt_i) + \zeta(zt_i)$$

stellt eine Ebene dar, welche den Punkt P_i enthält. Dieselbe lässt sich in Form einer Determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_i & y_i & z_i & t_i \\ a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix} = 0$$

schreiben, in welcher a, b, c, d; a', b', c', d' die Coordinaten zweier Punkte der Ebene sein mögen.

Ein Beispiel soll betrachtet werden. Lässt man die Ebene $\varphi_i = 0$ durch eine Ecke des Coordinatentetraeders gehen, setzt man also etwa $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, so geht die Function über in:

$$\varphi_i \equiv a(yz_i) + b(zx_i) + c(xy_i) = 0,$$

welche eine Ebene durch die Ecke $\{x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$ und den Punkt $P_i(x_i y_i z_i)$ darstellt. Dieselbe schneidet die Kanten $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\}$ in Punkten, deren Abstandsverhältnisse von den zugehörigen Ecken angegeben sind durch:

$$\varkappa_i = \frac{(zx_i)}{(xy_i)}, \quad \lambda_i = \frac{(yz_i)}{(xy_i)}.$$

Bildet man nun die symmetrischen Elementarfunctionen der $\varkappa_i$, λ_i, so geben dieselben gleich Null gesetzt eine Anzahl Functionen Π des quarternären Gebiets. Bewegt sich also ein Büschel von r Ebenen, welche die Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_r$ projiciren und durch die Ecke $(a = 0,\ b = 0,\ c = 0)$ des Coordinatentetraeders gehen so, dass seine Ebenen mit den Kanten $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ t = 0 \end{matrix}\right\}$ Abstandsverhältnisse $\varkappa_i$, λ_i von den zugehörigen Ecken bestimmen, für welche eine elementare symmetrische Function derselben verschwindet, so beschreibt die Axe des Büschels eine Kegelfläche mit der Spitze $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, welche durch die betreffende Elementarfunction dargestellt ist. — So entspricht z. B. bei drei Punkten der Elementarfunction $\Sigma \varkappa_1 \lambda_2 = 0$ die Kegelfläche

$$\Sigma (yz_1)(zx_2)(xy_3) = 0$$

und dieser wiederum die Relation:

$$\begin{aligned} & A_3(a_1^2 c_1 - a_1 B_2 - a_2 c_1) - A_3'(a_1^2 b_1 - a_1 C_2 - a_2 b_1) \\ + & B_3(b_1^2 a_1 - b_1 C_2 - b_2 a_1) - B_3'(b_1^2 c_1 - b_1 A_2 - b_2 c_1) \\ + & C_3(c_1^2 b_1 - c_1 A_2 - c_2 b_1) - C_3'(c_1^2 a_1 - c_1 B_2 - c_2 a_1) = 0. \end{aligned}$$

III. Abschnitt.

Allgemeine Anwendungen.

1.

Ueber die Darstellung mehrförmiger symmetrischer Functionen durch die Elementarfunctionen.

In seiner schönen Abhandlung über die Resultante eines Systems mehrerer algebraischen Gleichungen (Denkschriften der kaiserl. Academie der Wissenschaften, math. naturw. Classe, Bd. IV, Wien 1852) hat

Herr **Schläfli** gezeigt, wie man jede mehrförmige (vielaccentige) symmetrische Function durch nur einförmige (einaccentige) ausdrücken kann. Setzt man

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \ldots; \ldots)$$
$$= \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} z_1^{\gamma_1} \ldots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} z_2^{\gamma_2} \ldots \times x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3} z_3^{\gamma_3} \ldots; \ldots,$$

so ist nach **Schläfli** beispielsweise jede dreiförmige symmetrische Function dargestellt durch:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \beta_1, \ldots; \alpha_2, \beta_2, \ldots; \alpha_3, \beta_3, \ldots) &= (\alpha_1, \beta_1, \ldots)(\alpha_2, \beta_2, \ldots)(\alpha_3, \beta_3, \ldots)\\ &- (\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 + \beta_3, \ldots)(\alpha_1, \beta_1, \ldots)\\ &- (\alpha_3 + \alpha_1, \beta_3 + \beta_1, \ldots)(\alpha_2, \beta_2, \ldots)\\ &- (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \ldots)(\alpha_3, \beta_3, \ldots)\\ &+ 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \ldots).\end{aligned}$$

Da man nach dem Verfahren von **Poisson** im Stande ist, jede einförmige Function als ganze Function der Elementar(primitiven)-Functionen auszudrücken, so wird man auch jede mehrförmige Function in Form eines Aggregates von Producten elementarer Functionen (auf eine einzige Art) erhalten können. Um den Umweg dieses Verfahrens zu vermeiden, der zuweilen grosse Rechnungen und umständliche Reductionen erfordert, sollte man, wie **Schläfli** weiter ausführt, die mehrförmigen Functionen direct durch die Elementarfunctionen ausdrücken können. — Die Methode der unbestimmten Coefficienten gestattet zwar, jede symmetrische Function ihrer äusseren Gestalt nach direct durch die Elementarfunctionen anzugeben, allein ihre Anwendung ist häufig mit Schwierigkeiten hinsichtlich der Ermittlung gewisser unbestimmter Coefficienten verbunden. Ich beabsichtige nun zu zeigen, wie man mit Hülfe der Relationen eine beträchtliche Anzahl derselben bestimmen kann und wie sich die übrigen durch Annahme specieller Gruppen von Elementen ermitteln lassen.

Angenommen, die i-förmige symmetrische Function

$$(1)\qquad F \equiv \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} z_1^{\gamma_1} \ldots \times x_1^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} z_2^{\gamma_2} \ldots \times \ldots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} z_i^{\gamma_i} \ldots$$

sei durch die Elementarfunctionen auszudrücken, so wollen wir unter

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i = \Sigma\alpha_i \\ p_2 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i = \Sigma\beta_i \\ p_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_i = \Sigma\gamma_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Zahlen verstehen, welche das Gewicht derselben hinsichtlich der gleichwerthigen Elemente $x_1 x_2 \ldots x_i$, $y_1 y_2 \ldots y_i$, $z_1 z_2 \ldots z_i, \ldots, \ldots$ angeben. Dann ist durch die Summe

(3) $$P = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = \Sigma p_1$$

das Gewicht der Function F selbst ausgedrückt.

Denken wir uns die Entwicklung derselben als ganze Function der Elementarfunctionen ausgeführt, so erhellt, dass auch jedes Glied der letzteren den Bedingungen (2) und (3) genügen muss. Um also sämmtliche Glieder der geforderten Darstellung zu erhalten, bilde man alle möglichen Producte der Elementarfunctionen, welche hinsichtlich der gleichwerthigen Elemente $x_1 x_2 \ldots x_i$, $y_1 y_2 \ldots y_i$, $z_1, z_2, \ldots z_i, \ldots$ bezw. das Gewicht $p_1, p_2, p_3, \ldots$ und hinsichtlich der Elemente aller Gruppen das Gewicht $P = \Sigma p_1$ besitzen. — Multiplicirt man die so erhaltenen Producte mit gewissen constanten Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \tau$ und setzt hernach ihre Summe gleich der gegebenen Function F, so kann man letztere wenigstens der äusseren Form nach als bekannt voraussetzen (Methode der unbestimmten Coefficienten).

Die genannte Darstellung der i-förmigen Function F wird nun möglich sein für jede beliebige Anzahl r_1 der Gruppen $P_i(x_i y_i z_i \ldots)$ die gleich oder grösser als i ist. Nimmt man jedoch $r_1 < i$, so wird die Function selbst mit allen höheren Elementarfunctionen in identischer Weise verschwinden. Alsdann bleibt aber (für jeden Werth von $r_1 < i$) eine identische Beziehung der Elementarfunctionen vom Gewicht $1, 2, 3, \ldots r_1$ übrig, in welcher nur gewisse lineare Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$ unbekannt sind. Soll nun eine derartige Beziehung (der Elementarfunctionen) möglich sein, so muss sie offenbar eine wirkliche Relation derselben darstellen. Sucht man daher unter den für r_1 Gruppen von je $n + 1$ Elementen gebildeten Relationen, bezw. deren Combinationen diejenige aus, welche hinsichtlich des Gewichts der gleichwerthigen Elemente $x_1 x_2 \ldots x_i$, $y_1 y_2 \ldots y_i$, $z_1 z_2 \ldots z_i, \ldots$ mit der erhaltenen Beziehung übereinstimmt, so lassen sich durch Vergleichen der Coefficienten gleicher Glieder die in derselben vorkommenden unbekannten Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ermitteln. Die übrigen Coefficienten aller Glieder, welche $i, i+1, i+2, \ldots r$-förmige Elementarfunctionen enthalten, lassen sich durch Annahme von $i, i+1, i+2, \ldots r$ speciellen Gruppen finden.

Das folgende Beispiel soll das Verfahren erläutern.

Für die 3-förmige symmetrische Function $\Sigma x_1^2 y_2 y_3$, welche das Gewicht $P = p_1 + p_2 = 2 + 2$ besitzt, ergiebt sich die Darstellung:

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3 = \alpha a_1^2 b_1^2 + \beta a_1^2 b_2 + \gamma a_2 b_1^2 + \delta a_2 b_2 + \varepsilon C_2^2 + \varkappa a_1 b_1 C_2 + \varrho a_1 C_3' + \sigma b_1 C_3 + \lambda C_4.$$

Für $r_1 = 1$ verschwindet die 3-förmige Function selbst und mit Ausnahme von a_1 und b_1 auch sämmtliche Elementarfunctionen. Daher ist $\alpha = 0$.

Für $r_1 = 2$ verschwindet $\Sigma x_1^2 y_2 y_3$ ebenfalls sowie auch C_3, C_3', C_4, sodass die Beziehung übrig bleibt:

$$0 = \beta a_1^2 b_2 + \gamma a_2 b_1^2 + \delta a_2 b_2 + \varepsilon C_2^2 + \varkappa a_1 b_1 C_2,$$

welche hinsichtlich des Gewichts der einzelnen Elemente mit der für $r = 2$ gefundenen Relation

$$P_4 \equiv a_1^2 b_2 + b_1^2 a_2 - 4 a_2 b_2 - a_1 b_1 C_2 + C_2^2 = 0$$

übereinstimmt und daher nur bestehen kann, wenn ihre Coefficienten proportional den entsprechenden der Relation P_4 sind. Somit ist:

$$\beta = \pi, \quad \gamma = \pi, \quad \delta = -4\pi, \quad \varepsilon = \pi, \quad \varkappa = -\pi$$

und daher

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3 = \pi P_4 + \sigma b_1 C_3 + \varrho a_1 C_3' + \lambda C_4.$$

Macht man hierauf drei Annahmen von je drei speciellen Gruppen, so findet man

1. für die Gruppen $(0, 1), (1, 0), (-1, 1) \ldots \pi = \frac{1}{3}$,
2. „ „ „ $(1, 0), (1, 1), (1, -1) \ldots \varrho = \frac{2}{3}$,
3. „ „ „ $(0, 1), (1, 1), (-1, 1) \ldots \sigma = -\frac{1}{3}$.

Eine einzige weitere Annahme von 4 Gruppen, z. B. von $(1, 1), (1, 1), (1, 1), (1, 1)$ liefert $\lambda = -1$, so dass die Function dargestellt ist durch:

$$\Sigma x_1^2 y_2 y_3 = \frac{1}{3}\{a_1^2 b_2 + b_1^2 a_2 - 4 a_2 b_2 - a_1 b_1 C_2 + C_2^2 - b_1 C_3 \\ + 2 a_1 C_3' - 3 C_4\}.$$

2.

Directe Darstellung der symmetrischen Functionen durch die Elementarfunctionen.

Eine weitere Methode jede beliebige symmetrische Function direct durch die Elementarfunctionen auszudrücken, besteht in Folgendem: Denken wir uns wiederum sämmtliche Producte der Elementarfunctionen gebildet, welche den Bedingungen (2) und (3) genügen und die Function F wie oben durch die unbestimmten Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$, deren Anzahl gleich s sein möge, dargestellt, so wird die Gleichung

$$F \equiv \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 + \cdots + \tau Q_s$$

zu einer identischen, sobald man in den Producten $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_s$ die Elementarfunctionen durch ihre Ausdrücke in den Elementen selbst ersetzt. Hierbei treten auf der rechten Seite dieser Gleichung s symmetrische Functionen auf, welche hinsichtlich ihres Gewichts mit der

Function F übereinstimmen und deren Coefficienten lineare Combinationen der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$ sind. Da die Gleichung

$$F = \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \cdots + \tau Q_s$$

auf diese Weise eine identische geworden ist, so wird sie nur bestehen können, wenn die Coefficienten gleicher Functionen auf beiden Seiten einander gleich sind. Wir erhalten somit zwischen den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \tau$ s lineare Gleichungen, aus welchen dieselben ermittelt werden können.

Diese Methode hat den Vortheil, dass man gleichzeitig die ganze Gruppe von symmetrischen Functionen erhalten kann, welche den Bedingungen (2) genügen.

Für die symmetrischen Functionen vom Gewicht (2, 2) erhält man bei 3 Gruppen die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\sum\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) &= \alpha a_1^2 b_1^2 + \beta a_1^2 b_2 + \gamma b_1^2 a_2 + \delta \cdot a_2 b_2 + \varepsilon C_2^2 + \varkappa a_1 b_1 C_2 \\
&\quad + \varrho a_1 C_3' + \sigma b_1 C_3 \\
&= \alpha \Sigma x_1^2 y_1^2 + (\alpha + \varepsilon + \varkappa) \Sigma x_1^2 y_2^2 + (2\alpha + \beta + \varkappa) \Sigma x_1^2 y_1 y_2 \\
&\quad + (2\alpha + \gamma + \varkappa) \Sigma y_1^2 x_1 x_2 \\
&\quad + (2\alpha + 2\varepsilon + 2\varkappa + \beta + \varrho) \Sigma x_1^2 y_2 y_3 \\
&\quad + (2\alpha + 2\varepsilon + 2\varkappa + \gamma + \sigma) \Sigma y_1^2 x_2 x_3 \\
&\quad + (4\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\varepsilon + 2\varkappa + \delta) \Sigma x_1 y_1 x_2 y_2 \\
&\quad + (4\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\varepsilon + 3\varkappa + \delta + \sigma + \varrho) \Sigma x_1 y_1 x_2 y_3.
\end{aligned}$$

Setzt man hierin der Reihe nach die Coefficienten jeder symmetrischen Function gleich 1 und gleichzeitig die Coefficienten aller übrigen gleich Null, so erhält man 8 Systeme von je 8 linearen Gleichungen, welche aufgelöst unmittelbar die Darstellungen der 8 Functionen

$$\Sigma x_1^2 y_1^2, \quad \Sigma x_1^2 y_2^2, \quad \Sigma x_1^2 y_2 y_3, \quad \Sigma x_1^2 y_1 y_2, \quad \Sigma x_1 y_1 x_2 y_2, \quad \Sigma x_1 y_1 x_2 y_3,$$
$$\Sigma y_1^2 x_1 x_2, \quad \Sigma y_1^2 x_2 x_3$$

geben.

Beispielsweise erhält man zur Ermittlung der Function $\Sigma x_1 y_1 x_2 y_3$ das System:

1. $0 = \alpha,$
2. $0 = \varepsilon + \varkappa,$
3. $0 = \beta + \varkappa,$
4. $0 = \gamma + \varkappa,$
5. $0 = 2\varepsilon + 2\varkappa + \beta + \varrho,$
6. $0 = 2\beta + 2\gamma + 2\varepsilon + 2\varkappa + \delta,$
7. $0 = 2\varepsilon + 2\varkappa + \gamma + \sigma,$
8. $1 = 2\beta + 2\gamma + 2\varepsilon + 3\varkappa + \delta + \sigma + \varrho,$

woraus sich ergiebt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\frac{1}{3}, \quad \gamma = -\frac{1}{3}, \quad \delta = \frac{4}{3}, \quad \varepsilon = -\frac{1}{3}, \quad \varkappa = \frac{1}{3},$$

$$\varrho = \frac{1}{3}, \quad \sigma = \frac{1}{3}.$$

Daher ist:

$$\Sigma x_1 y_1 x_2 y_3 = \frac{1}{3}\left\{-a_1^2 b_2 - b_1^2 a_2 + 4 a_2 b_2 - C_2^2 + a_1 b_1 C_2 + a_1 C_3' + b_1 C_3\right\}.$$

Diese Methode lässt sich auch zur Bildung der Relationen selbst verwenden, denn jede derselben wird in identischer Weise Null werden, sobald man an Stelle der Elementarfunctionen ihre Ausdrücke in den Elementen selbst setzt. Da jede Relation hinsichtlich der gleichwerthigen Elemente $x_1 x_2 \dots x_r$, $y_1 y_2 \dots y_r$, ... eine homogene Function ist, so wird man bei der Bildung der Producte der elementaren Functionen die Bedingungen (2) beachten müssen. Von Wichtigkeit ist hierbei, das Gewicht der zu bildenden Relation zu kennen. Weiss man, dass z. B. für $r = 2$ eine Relation vom Gewicht $P = 2 + 2$ existirt, so bilde man alle möglichen Producte der Elementarfunctionen vom Gewicht (2, 2) und erhält als Relation:

$$0 = \alpha a_1^2 b_1^2 + \beta a_1^2 b_2 + \gamma a_2 b_1^2 + \delta a_2 b_2 + \varepsilon a_1 b_1 C_2 + \varkappa C_2^2$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = \alpha \Sigma x_1^2 y_1^2 &+ (2\alpha + \gamma + \varepsilon)\, \Sigma y_1^2 x_1 x_2 + (\alpha + \varepsilon + \varkappa)\, \Sigma y_1^2 x_2^2 \\ &+ (2\alpha + \beta + \varepsilon)\, \Sigma x_1^2 y_1 y_2 \\ &+ (4\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta + 2\varepsilon + 2\varkappa)\, \Sigma x_1 y_1 x_2 y_2, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn gleichzeitig:

1. $0 = \alpha,$
2. $0 = 2\alpha + \gamma + \varepsilon,$
3. $0 = \alpha + \varepsilon + \varkappa,$
4. $0 = 2\alpha + \beta + \varepsilon,$
5. $0 = 4\alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta + 2\varepsilon + 2\varkappa,$

woraus sich ergiebt:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -\varepsilon, \quad \gamma = -\varepsilon, \quad \delta = 4\varepsilon, \quad \varkappa = -\varepsilon.$$

Somit erhält man die Relation

$$P_4 \equiv a_1^2 b_2 + b_1^2 a_2 - 4 a_2 b_2 - a_1 b_1 C_2 + C_2^2 = 0,$$

die mit der in Theil II für $r = 2$ gefundenen übereinstimmt.

3.

Besondere Darstellung einer gewissen Gattung von symmetrischen Functionen.

Satz: Jede symmetrische Function von r Gruppen $P_i(x_i y_i z_i \ldots : v_i w_i)$ $i = 1, 2, 3, \ldots r$ —

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} z_1^{\gamma_1} \ldots w_1^{\varkappa_1} \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} z_2^{\gamma_2} \ldots w_2^{\varkappa_2} \times \ldots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} z_r^{\gamma_r} \ldots w_r^{\varkappa_r},$$

welche der Bedingung genügt:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \cdots + \varkappa_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots + \varkappa_2 = \cdots$$
$$= \alpha_r + \beta_r + \gamma_r + \cdots + \varkappa_r = p,$$

lässt sich in Form eines Aggregates von Producten der r-förmigen Elementarfunctionen $a_r, A_r, B_r, \ldots$ von der Dimension p darstellen.

Um dies zu beweisen, setze man an Stelle der Verhältnisse von n Elementen einer Gruppe zum $n+1^{\text{ten}}$ neue Elemente, beispielsweise an Stelle von $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, \ldots, \frac{v}{w}$ die Elemente $x', y', z', \ldots, v'$, deren Elementarfunctionen durch entsprechende deutsche Buchstaben bezeichnet werden mögen. Die letzteren lassen sich, wie leicht einzusehen ist, als Quotient zweier r-förmiger Elementarfunctionen der Gruppen $x_i y_i z_i \ldots v_i w_i$ angeben; beispielsweise ist

$$\Sigma x_1' y_2' = \frac{\Sigma x_1 y_2 w_3 w_4 \ldots w_r}{w_1 w_2 \ldots w_r} = \frac{P_r}{s_r}.$$

Infolge der Substitutionen $x = x'w$, $y = y'w$, $z = z'w, \ldots$, $v = v'w$ geht die Function J über in

$$J = (w_1 w_2 \cdots w_r)^p \, \Sigma x_1'^{\alpha_1} y_1'^{\beta_1} \cdots \times x_2'^{\alpha_2} y_2'^{\beta_2} \cdots = s_r^p J',$$

wo J' die Elemente w nicht mehr enthält.

Drückt man die Function J' nach irgend einer Methode durch die Elementarfunctionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2$, etc. aus und ersetzt dieselben nachträglich durch die betreffenden Quotienten je zweier r-förmiger Elementarfunctionen der Gruppen $x_i y_i z_i \ldots v_i w_i$, so ist die Function J in der That durch lauter r-förmige Elementarfunctionen dargestellt.

Ein Beispiel soll das Verfahren erläutern.

Die 3-förmige symmetrische Function

$$J = \Sigma x_1 z_1 x_2 z_2 y_3^2$$

genügt der Bedingung $1 + 1 = 1 + 1 = 2 = p$ und wird daher durch lauter 3-förmige Elementarfunctionen dargestellt werden können.

Setzt man

$$x = x'z, \quad y = y'z,$$

so geht dieselbe über in

$$J = (z_1 z_2 z_3)^2 \, \Sigma x_1' x_2' y_3'^2 = c_3^2 J',$$

wo die Function J' angegeben ist durch:

$$\Sigma x_1' x_2' y_3'^2 = \frac{1}{3}\{\mathfrak{P}_4 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{C}_3' + 2\mathfrak{b}_1 \mathfrak{C}_3\}$$

und

$$\mathfrak{P}_4 \equiv \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1^2 \mathfrak{a}_2 - 4\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_2^2$$

ist. Ersetzt man hierin die Elementarfunctionen durch die entsprechenden Quotienten:

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{B_3}{c_3},\quad \mathfrak{b}_1 = \frac{A_3'}{c_3},\quad \mathfrak{a}_2 = \frac{B_3'}{c_3},\quad \mathfrak{C}_2 = \frac{R_3}{c_3},\quad \mathfrak{b}_2 = \frac{A_3}{c_3},\quad \mathfrak{a}_3 = \frac{a_3}{c_3},$$

$$\mathfrak{C}_3 = \frac{C_3}{c_3},\quad \mathfrak{C}_3' = \frac{C_3'}{c_3},\quad \mathfrak{b}_3 = \frac{b_3}{c_3},$$

so geht die Function J über in

$$J = \frac{1}{3}\left\{\frac{B_3^2 A_3 + A_3'^2 B_3' - B_3 A_3' R_3}{c_3} - 4A_3 B_3' + R_3^2 - B_3 C_3' + 2A_3' C_3\right\},$$

wo in der That in jedem Glied die 3-förmigen Elementarfunctionen in der Dimension 2 auftreten.

In seiner schönen Abhandlung über die Resultante eines Systems von drei quadratischen Gleichungen (Crelle XXVIII, S. 71) hat Hesse sich über ein Eliminationsverfahren ausgesprochen, welches später von Herrn Schläfli in dem eben genannten Aufsatz genauer auseinander gesetzt worden ist. Schläfli hat insbesondere auch die Vorschrift über die Darstellung gewisser symmetrischer Functionen durch die Coefficienten eines Systems von Gleichungen untersucht und gezeigt, dass das von Hesse angegebene Verfahren keineswegs zur Kenntniss aller symmetrischen Functionen führt, welche zur Bildung der Resultante nöthig wären.

Bei Gelegenheit dieser Untersuchungen hat Schläfli ein anderes Verfahren entwickelt, das die Darstellung dieser Functionen umgeht, aber die Zerfällung einer gewissen m-förmigen Function in lauter m-förmige Elementarfunctionen verlangt, eine Aufgabe, auf die Schläfl nicht eingegangen ist. Da jene Function die Eigenschaften der oben genannten Function J besitzt und daher in der gewünschten Form dargestellt werden kann, so soll das Verfahren kurz angegeben werden.

Bestehen zwischen den $n+1$ homogenen Variabeln $x, y, z, \ldots v, w$ die $n+1$ Gleichungen

$$\varrho = ax + by + cz + \cdots + \varkappa w = 0,\quad \varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = 0, \cdots, \varphi_n = 0,$$

so kann man die Resultante u derselben durch das Product

$$u = \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \ldots \varrho_r$$

darstellen, in welchem r die Anzahl der gemeinschaftlichen Werthsysteme $x_i y_i z_i \ldots w_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$ der n Gleichungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ angiebt und ϱ_i von der Form ist

$$\varrho_i = ax_i + by_i + \cdots + \varkappa w_i.$$

Denkt man sich das Product $\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_r$ nach den Productcombinationen der $(\overbrace{abc\ldots\varkappa}^{r})$ geordnet, so erhält man als Coefficienten derselben die sämmtlichen r-förmigen Elementarfunctionen a_r, A_r, B_r, C_r, ..., s_r der r Gruppen $x_i y_i z_i \ldots w_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$, welche nach Hesse (S. 71) in einfacher Weise durch die Coefficienten der Gleichungen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ ausgedrückt werden können. Die Resultante u lässt sich daher auch auf folgende Gestalt bringen:

$$u = a^r a_r + a^{r-1} b A_r + a^{r-2} b^2 B_r + \cdots + \varkappa^r s_r.$$

Um hieraus die Resultante U eines neuen Systems von $n+1$ Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$$

zu erhalten, in welchem die lineare Gleichung $\varrho = 0$ nur durch eine $\varphi = 0$ vom m^{ten} Grad ersetzt ist, bilde man mit Schläfli das Product

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_m = \varrho_1^{\,1} \varrho_2^{\,1} \ldots \varrho_r^{\,1} \times \varrho_1^{\,2} \varrho_2^{\,2} \ldots \varrho_r^{\,2} \times \ldots \times \varrho_1^{\,m} \varrho_2^{\,m} \ldots \varrho_r^{\,m},$$

wo

$$\varrho_i^{\,\varkappa} = a_\varkappa x_i + b_\varkappa y_i + c_\varkappa z_i + \cdots + \varkappa_\varkappa w_i$$

ist und ordne dasselbe nach Potenzen und Producten der Elementarfunctionen a_r, A_r, B_r, ..., s_r. Die Coefficienten dieser letzteren sind alsdann gewisse m-förmige Functionen der m Gruppen $a_i b_i c_i \ldots \varkappa$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$ von der Form

$$J = \Sigma a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \ldots \varkappa_1^{\varkappa_1} \times a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \ldots \varkappa_2^{\varkappa_2} \times \ldots \times a_m^{\alpha_m} b_m^{\beta_m} \ldots \varkappa_m^{\varkappa_m},$$

wo die Zahlen α, β, γ, ..., $\varkappa$ der Bedingung unterliegen

$$\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \varkappa_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \varkappa_2 = \cdots = \alpha_m + \beta_m + \cdots + \varkappa_m = p.$$

Dieselben lassen sich somit in der beschriebenen Weise durch die m-förmigen Elementarfunctionen der $a_i b_i c_i \ldots \varkappa_i$ ausdrücken. Das vorausgesetzt, erhält man nach Schläfli die Resultante U, indem man an Stelle der m-förmigen Elementarfunctionen der m Gruppen $a_i b_i c_i \ldots \varkappa_i$ die entsprechenden Coefficienten der Gleichung $\varphi(\overbrace{xyz\ldots w}^{m}) = 0$ setzt.

Der oben bewiesene Satz über die Zerfällung der Function J in lauter r-förmige Elementarfunctionen lässt die folgende Verallgemeinerung zu, welche Herr Brill in Tübingen in seinen Vorlesungen über algebraische Functionen ausgesprochen hat:

Satz: Hat man eine symmetrische Function der r Gruppen $P_i(x_i y_i \ldots w_i)$

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \ldots w_1^{\varkappa_1} \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots w_2^{\varkappa_2} \times \ldots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \ldots w_r^{\varkappa_r},$$

in welcher die Summen

$$\alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \varkappa_1 = p_1, \quad \alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \varkappa_2 = p_2, \cdots$$

alle grösser als Null und beispielsweise $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \varkappa_i = p_i$ die kleinste derselben sein soll, so lässt sich die Function J derart durch

ein Aggregat von Elementarfunctionen darstellen, dass jedes Glied hinsichtlich der r-förmigen Elementarfunctionen von der Dimension p_i ist.

Führt man die Substitutionen ein

$$x = x'w, \quad y = y'w, \quad z = z'w, \cdots, v = v'w,$$

so tritt aus der Function J der Factor $(w_1 w_2 \ldots w_r)$ i-fach heraus, so dass dieselbe übergeht in

$$J = (w_1 w_2 \ldots w_r)^i J',$$

wo J' noch Elemente w enthält. — Nach den vorhergehenden Ausführungen lassen sich die elementaren Functionen der Elemente $x', y', z', \ldots, v'$ unmittelbar durch den Quotienten zweier r-förmiger Elementarfunctionen mit dem gemeinsamen Nenner $w_1 w_2 \ldots w_r$ angeben. Gelingt es nun zu beweisen, dass auch alle andern Elementarfunctionen, welche ausser $x'y'z' \ldots v'$ noch das Element w enthalten, sich durch einen Quotienten darstellen lassen, welcher den Nenner s_r und eine lineare Combination der r-förmigen Elementarfunctionen zum Zähler besitzt, so ist in der That der Satz bewiesen. — Die letztere Behauptung habe ich zwar nicht allgemein beweisen können, ihre Richtigkeit lässt sich jedoch für $r = 2$, $r = 3$, $r = 4$, etc. unter Anwendung der hierfür aufgestellten Relationen zeigen, sie wird daher auch allgemeine Giltigkeit haben.

Ist uns beispielsweise bei drei Gruppen von je zwei Elementen xy die 3-förmige Function gegeben:

$$J = \Sigma\, x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3},$$

wo

$$p_1 = \alpha_1 + \beta_1 \overline{\overline{<}} \alpha_2 + \beta_2 \overline{\overline{<}} \alpha_3 + \beta_3,$$

so geht dieselbe mit der Substitution $x = x'y$ über in

$$J = b_3^{p_1} \Sigma\, x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} y_2^{\alpha_2+\beta_2-p_1} x_3'^{\alpha_3} y_3^{\alpha_3+\beta_3-p_1} = b_3^{p_1} J'.$$

Die Elementarfunctionen der x' und y nehmen die Werthe an:

$$\Sigma x_1' = \frac{C_3'}{b_3}, \quad \Sigma x_1' x_2' = \frac{C_3}{b_3}, \quad \Sigma x_1' y_2 = \frac{C_3' b_1 - b_3 a_1}{b_3}, \quad \Sigma x_1' x_2' x_3' = \frac{a_3}{c_3},$$

$$\Sigma x_1' y_2 y_3 = \frac{C_3' b_2 - b_3 C_2}{b_3}, \quad \Sigma x_1' x_2' y_3 = \frac{\Sigma x_1 x_2 y_3^2}{b_3},$$

von denen nur noch der Zähler der Function $\Sigma x_1' x_2' y_3$ linear durch die 3-förmigen Elementarfunctionen auszudrücken ist. Derselbe ist dargestellt durch den Ausdruck:

$$\Sigma x_1 x_2 y_3^2 = \frac{1}{3}\{P_4 - a_1 C_3' + 2 b_1 C_3\},$$

welcher mit Hülfe der für $r = 3$ in Theil II, Nr. 1b. gebildeten Relationen 8* oder 9* übergeht in:

$$\Sigma x_1 x_2 y_3^2 = \frac{1}{b_1}\{b_3 a_1^2 - 3b_3 a_2 - C_3 a_1 b_1 + C_3' C_2 + C_3 b_1^2 - C_3 b_2\}$$

oder

$$= \frac{1}{a_1}\{a_3 b_1^2 - 3a_3 b_2 + C_3 C_2 - C_3' a_2\}.$$

Mit Benützung der Relationen gelingt es also sämmtliche Elementarfunctionen der x' und y durch Quotienten auszudrücken, deren Nenner b_3 und deren Zähler eine lineare Combination der 3-förmigen Elementarfunctionen a_3, C_3, C_3', b_3 ist. Es kann somit auch jede 3-förmige Function von der Form J durch einen Ausdruck dargestellt werden, in welchem jedes Glied hinsichtlich der 3-förmigen Elementarfunctionen a_3, C_3, C_3', b_3 von der Dimension $\alpha_i + \beta_i = p_i$ ist, wo p_i die kleinste der Zahlen $\alpha_1 + \beta_1$, $\alpha_2 + \beta_2$, $\alpha_3 + \beta_3$ sein soll.

Schorndorf, im November 1890.

Ueber die reellen Züge algebraischer Curven.

Von

DAVID HILBERT in Königsberg i. Pr.

A. Harnack*) hat bewiesen, dass die Anzahl der reellen Züge einer ebenen algebraischen Curve n^{ter} Ordnung höchstens gleich $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ist und er hat zugleich ein Verfahren angegeben, mittelst dessen man in der That ebene Curven n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ reellen Zügen construiren kann. Da eine solche Curve mit der Maximalzahl reeller Züge keinenfalls einen Doppelpunkt besitzt, so darf kein Zug der Curve sich selber oder einen anderen Zug durchschneiden und die Curve besteht daher, wenn die Ordnung n gerade ist, nur aus paaren Zügen. Ist die Ordnung n ungerade, so besitzt die Curve einen unpaaren Zug; die übrigen Züge sind sämmtlich paar.

Um die wesentlichen Eigenschaften eines paaren und eines unpaaren Zuges klar hervortreten zu lassen**), deuten wir die ternären homogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 als Coordinaten eines Punktes im Raume, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, so dass jedem Punkte der ursprünglichen Ebene eine durch den Anfangspunkt O gehende gerade Linie und jedem Zuge der ebenen Curve ein Kegel entspricht, dessen Spitze im Anfangspunkte O liegt. Ein solcher Kegel theilt nun den Raum entweder in zwei oder in drei Gebiete. Im ersteren Falle ist es möglich, eine jede durch den Anfangspunkt O gehende Gerade durch Drehung um O in jede andere durch O gehende Gerade überzuführen, ohne den Kegel zu überschreiten d. h. ohne dass die Gerade inzwischen einmal mit einer Erzeugenden des Kegels zusammenfällt. Es wird dann der Kegel und der entsprechende Curvenzug ein unpaarer genannt. Im zweiten Falle gehören zwei Raumgebiete als

---

*) Mathematische Annalen Bd. 10; S. 189.

**) Vgl. Möbius, Ueber die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, Gesammelte Werke, Bd. 2 und v. Staudt, Geometrie der Lage S. 81.

Scheitelräume zusammen, insofern alle geraden Linien, welche das eine erfüllen, nach ihrer Verlängerung in das andere Gebiet hineinragen. Der Kegel und der entsprechende Curvenzug heissen dann paar. Die beiden zusammengehörigen Raumgebiete und das entsprechende Gebiet der Ebene bilden das Innere des Kegels oder der Curve. Alle übrigen durch O hindurchlaufenden Geraden erfüllen das dritte Raumgebiet. Dieses und das entsprechende Gebiet der Ebene heisst das äussere Gebiet. Zwei unpaare Züge schneiden sich in einer ungeraden Anzahl von Punkten; zwei paare Züge, sowie ein unpaarer und ein paarer Zug schneiden sich in einer geraden Anzahl von Punkten. Jeder durch das Innere eines paaren Zuges gelegte unpaare Zug schneidet den paaren Zug wenigstens in zwei Punkten.

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist das Innere und das Aeussere eines paaren Curvenzuges in bestimmter Weise unterschieden und wenn daher eine Curve mit mehreren Zügen gegeben ist, so können wir für jeden einzelnen paaren Zug angeben, welche Züge ausserhalb oder innerhalb desselben liegen und welche denselben umschliessen. Was hierbei die verschiedenen Möglichkeiten anbetrifft, so erscheint es vor allem nöthig, die äussersten Vorkommnisse bei der Gruppirung der Züge in Betracht zu ziehen und wir untersuchen daher im Folgenden die Frage, wie viele von den Zügen einer Curve mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens in einander eingeschachtelt sein können d. h. wie viele Züge derart liegen können, dass der erste Zug vollständig im Inneren des zweiten, der zweite im Inneren des dritten Zuges verläuft u. s. f.

Man erkennt leicht, *dass bei einer geraden Ordnung n höchstens $\frac{n}{2}-1$ Züge in der eben beschriebenen Weise eingeschachtelt sind.* Denn gäbe es $\frac{n}{2}$ eingeschachtelte Züge, so nehme man auf einem der übrigen Züge einen beliebigen Punkt A an und verbinde diesen Punkt A mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Curvenzuges durch eine Gerade. Da die so gelegte Gerade den Zug, auf welchem A liegt, und ausserdem jeden der $\frac{n}{2}$ eingeschachtelten Züge mindestens in 2 Punkten trifft, so hätte sie mit der Curve im Ganzen wenigstens $n+2$ Punkte gemein, was unmöglich ist.

Wenn wir die Existenz einer Curve der geraden Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge annehmen, von denen in der That $\frac{n}{2}-1$ auf die vorhin beschriebene Weise in einander eingeschachtelt liegen, so ist leicht ersichtlich, dass die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ Züge sämmtlich unter einander getrennt verlaufen. Denn würde auch nur einer dieser Züge einen anderen umschliessen, so hätte die Verbindungs-

linie eines Punktes des letzteren Zuges mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Zuges der Curve mindestens $n+2$ Punkte gemein und dieser Fall ist unmöglich. Dagegen hindert nichts, dass die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ Züge auf verschiedene Weise in den ringförmigen Gebieten vertheilt sind, welche durch die $\frac{n}{2}-1$ eingeschachtelten Züge gebildet werden.

Ist die Ordnung n ungerade, so besitzt die Curve einen unpaaren Zug und *es sind höchstens $\frac{1}{2}(n-3)$ paare Züge der Curve in einander eingeschachtelt.* Denn gäbe es $\frac{1}{2}(n-1)$ eingeschachtelte Züge, so nehme man auf einem der übrigen Züge einen beliebigen Punkt an und verbinde diesen Punkt mit einem Punkte des zu innerst gelegenen Curvenzuges durch eine Gerade. Da die so gelegte Gerade ausserdem den unpaaren Zug der Curve wenigstens in einem Punkte schneiden muss, so hätte sie mit der Curve im Ganzen wenigstens $n+2$ Punkte gemein, was unmöglich ist. Die übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+7)$ Züge liegen wie vorhin untereinander getrennt.

Wir wollen jetzt zeigen, *dass Curven von der in Rede stehenden Art in der That existiren.* Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei $f=0$ die Gleichung einer Curve von der Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen, jenachdem n gerade oder ungerade ist, die $\frac{n}{2}-1$ Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise die $\frac{1}{2}(n-3)$ Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ auf die verlangte Weise in einander eingeschachtelt sind. Ausserdem möge es eine Ellipse $k=0$ geben, welche entweder den äussersten Zug $Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise $Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ umschliesst oder ganz im innersten Zuge Z_1 liegt oder allgemein den Zug Z_ν umschliesst und zugleich im Innern des Zuges $Z_{\nu+1}$ liegt, wobei ν eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{n}{2}-2$ beziehungsweise eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \frac{1}{2}(n-5)$ bedeutet. Diese Ellipse $k=0$ schneide einen der übrigen $\frac{1}{2}(n^2-4n+6)$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n^2-4n+7)$ Züge in $2n$ Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ und zwar derart, dass letztere als Punkte der Ellipse in der nämlichen Reihe aufeinanderfolgen, wie wenn wir den Curvenzug durchlaufen. Wir nehmen nun auf der Ellipse zwischen zweien dieser Punkte, etwa zwischen A_1 und A_2 $2n+4$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+4}$ beliebig an und verbinden B_1 mit B_2, B_3 mit $B_4, \ldots, B_{2n+3}$ mit B_{2n+4} durch gerade Linien. Die linken Seiten der Gleichungen dieser geraden Linien

multipliciren wir miteinander und bezeichnen das entstehende Product, welches eine ternäre Form von der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung ist, mit g. Wird dann eine Grösse δ genügend klein bestimmt, so ist bei geeignet gewähltem Vorzeichen

$$fk \pm \delta g = 0$$

die Gleichung einer Curve der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung, welche

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1+(2n-1)=\frac{1}{2}(n+1)n+1$$

d. h. die Maximalzahl von Zügen besitzt, unter denen in der That $\frac{n}{2}$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n-1)$ Züge in einander eingeschachtelt sind. Denn jeder der eingeschachtelten Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{\frac{1}{2}(n-3)}$ giebt zu einem nahebei gelegenen Zug der neuen Curve Anlass. Wir bezeichnen die so entstehenden Züge der neuen Curve mit $Z_1', Z_2', \ldots, Z'_{\frac{n}{2}-1}$ beziehungsweise mit $Z_1', Z_2', \ldots, Z'_{\frac{1}{2}(n-3)}$. Zugleich entsteht aus der Ellipse $k=0$ ein besonderer Zug Z', welcher die Ellipse entweder aussen umschliesst oder sich derselben von innen anschmiegt, so dass die Ellipse entweder zwischen den Zügen Z_ν' und Z' oder zwischen den Zügen Z' und $Z'_{\nu+1}$ eingeschachtelt ist. Die Ellipse $k=0$ schneidet einen der neu entstandenen Züge in den $2n+4$ Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{2n+4}$ und zwar derart, dass die Reihenfolge dieser Schnittpunkte auf der Ellipse und auf dem Curvenzuge die nämliche ist. Wir erkennen somit, dass die Ellipse $k=0$ gegenüber der neu gebildeten Curve $n+2^{\text{ter}}$ Ordnung genau die entsprechende Lage einnimmt, wie gegenüber der ursprünglichen Curve n^{ter} Ordnung. Das beschriebene Verfahren ist daher von neuem anwendbar und bei jedem weiteren Schritte gelangen wir zu einer neuen Curve von der verlangten Beschaffenheit, deren Ordnung um zwei Einheiten grösser ist. Da für die niedrigsten Ordnungen die Existenz der Curven von der verlangten Beschaffenheit leicht erkannt wird, so folgt dieselbe allgemein.

Durch das angegebene Verfahren gelangen wir in den Fällen $n=6$, $n=7$, $n=8$ zu folgenden Curven der in Rede stehenden Beschaffenheit.

$n=6$.*) 1) Ein Zug Z, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z 9 untereinander getrennt liegende Züge.

*) Diesen Fall $n=6$ habe ich einer weiteren eingehenden Untersuchung unterworfen, wobei ich — freilich auf einem ausserordentlich umständlichen Wege — fand, dass die 11 Züge einer Curve 6^{ter} Ordnung keinesfalls sämmtlich ausserhalb und von einander getrennt verlaufen können. Dieses Resultat erscheint

2) Ein Zug Z, innerhalb desselben 9 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z ein einzelner Zug.

$n = 7$. 1) Ein Zug Z, innerhalb desselben 2 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z 12 getrennte paare Züge und ein unpaarer Zug.

2) Ein Zug Z, innerhalb desselben 12 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z 2 paare Züge und ein unpaarer Zug.

3) Ein Zug Z, innerhalb desselben 3 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z 11 paare Züge und ein unpaarer Zug.

4) Ein Zug Z, innerhalb desselben 13 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z ein paarer und ein unpaarer Zug.

$n = 8$. 1) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z_1 2 getrennt liegende Züge; diese beiden letzteren Züge sowie der Zug Z_1 werden gleichzeitig umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 17 getrennt liegende Züge.

2) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben 17 getrennte Züge, ausserhalb des Zuges Z_1 2 getrennt liegende Züge, die beiden letzteren Züge, sowie der Zug Z_1 werden umschlossen von einem Zuge Z_2; ausserhalb des Zuges Z_2 ein einzelner Zug.

3) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben ein einzelner Zug, ausserhalb des Zuges Z_1 14 getrennt liegende Züge, diese letzteren 14 Züge sowie der Zug Z_1 werden umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 5 getrennte Züge.

4) Ein Zug Z_1, innerhalb desselben 5 getrennt liegende Züge, ausserhalb des Zuges Z_1 14 Züge, diese 14 Züge sowie der Zug Z_1 werden zugleich umschlossen von einem Zuge Z_2, ausserhalb des Zuges Z_2 ein einzelner Zug.

Die Frage nach der Maximalzahl der reellen Züge gestattet auch für die algebraischen Raumcurven eine vollständige Erledigung.

Wir untersuchen zunächst, aus wie vielen Zügen eine irreducible Raumcurve n^{ter} Ordnung höchstens bestehen kann. Halphen*) und M. Noether**) haben gezeigt, dass eine irreducible nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung vom Maximalgeschlecht nothwendig auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt. Dieses Maximalgeschlecht wird $\frac{1}{4}(n-2)^2$

mir desshalb von Interesse, weil es zeigt, dass für Curven mit der Maximalzahl von Zügen der topologisch einfachste Fall nicht immer möglich ist. Zugleich folgt aus dem erwähnten Umstande, dass eine Fläche 4^{ter} Ordnung mit 12 Mänteln nicht existiren kann; vgl. die Preisschrift von K. Rohn: „Die Flächen 4^{ter} Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung“ S. 42, wo die Zahl 12 als obere Grenze für die Anzahl der Flächenmäntel angegeben wird.

*) Bull. de la Soc. Math. de France Bd. 2, S. 42.

**) Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, Crelle's Journal Bd. 93, S. 293.

beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist. Es sei nun eine nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge gegeben; projiciren wir dieselbe von irgend einem Punkte aus auf eine Ebene, so entspricht einem jeden Zuge der Raumcurve ein Zug der ebenen Curve und das Geschlecht der Raumcurve stimmt überein mit dem Geschlechte der ebenen Curve. Die Anzahl der reellen Züge einer jeden ebenen Curve ist, wie A. Harnack in der zu Anfang citirten Arbeit ebenfalls bewiesen hat, höchstens gleich dem um Eins vermehrten Geschlechte der Curve und es ist daher die Zahl der Züge der Projectionscurve und folglich auch die Zahl der Züge der ursprünglichen Raumcurve höchstens gleich $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Zugleich folgt, dass eine jede nicht ebene Curve n^{ter} Ordnung, welche genau $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Züge besitzt, nothwendig auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen muss.

Wir wollen nunmehr zeigen, das die eben gefundene obere Grenze für die Anzahl der Züge auch wirklich erreicht wird. Zu dem Zwecke nehmen wir an, es sei eine Curve C_n von der geraden Ordnung n als Schnitt eines einschaligen Hyperboloides $H=0$ und einer Fläche $F=0$, von der Ordnung $\frac{n}{2}$ gegeben und diese Curve C_n habe die Maximalzahl $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ von reellen Zügen. Ausserdem möge auf dem Hyperboloide $H=0$ mittels der Ebene $E=0$ eine Ellipse ausgeschnitten sein, welche einen von den Zügen der Curve C_n in n aufeinanderfolgenden Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ schneidet. Wir nehmen auf dieser Ellipse zwischen den Punkten A_1 und A_2 $n+2$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ beliebig an und construiren $\frac{1}{2}(n+2)$ Ebenen, von denen die erste durch B_1 und B_2, die zweite durch B_3 und $B_4, \ldots$ und die $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{te}}$ durch B_{n+1} und B_{n+2} hindurchgeht; es soll keine dieser Ebenen mit der Ebene $E=0$ zusammenfallen. Das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser $\frac{1}{2}(n+2)$ Ebenen ist eine quaternäre Form G von der $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Wird dann eine Grösse δ genügend klein bestimmt, so ist bei geeignet gewähltem Vorzeichen

$$FE \pm \delta G = 0$$

die Gleichung einer Fläche von der $\frac{1}{2}(n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H=0$ eine Raumcurve C_{n+2} der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung mit

$$\frac{1}{4}(n-2)^2+1+(n-1)=\frac{1}{4}n^2+1$$

reellen Zügen ausschneidet; denn bei jenem Verfahren entsteht aus jedem Zuge von C_n ein Zug der Curve C_{n+2} und die Ellipse zusammen mit dem in n Punkten geschnittenen Zuge von C_n giebt zu n neuen Zügen der Curve C_{n+2} Anlass. Die erhaltene Anzahl von Zügen ist die Maximalzahl. Ausserdem schneidet einer der n neu entstandenen Züge die Ellipse $E=0$ in den $n+2$ aufeinanderfolgenden Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$, so dass das eben auf C_n angewandte Verfahren in entsprechender Weise auf die neu entstandene Curve C_{n+2} anwendbar wird. Da für $n=2$ jene Maximalzahl gleich Eins wird, so kann für das eben beschriebene Verfahren eine beliebige Ellipse auf dem Hyperboloide $H=0$ als Ausgang dienen und wir erkennen dann durch den Schluss von n auf $n+2$ allgemein für jede gerade Ordnung n die Existenz von Raumcurven mit $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ reellen Zügen.

Um die entsprechende Thatsache für Curven von der ungeraden Ordnung n nachzuweisen, nehmen wir an, die Fläche $F=0$ von der $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung schneide das einschalige Hyperboloid $H=0$ in einer Hülfsgeraden L und in einer Curve n^{ter} Ordnung C_n, welche $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Züge besitzt. Ausserdem möge auf dem Hyperboloide $H=0$ mittelst der Ebene $E=0$ eine Ellipse ausgeschnitten sein, welche einen von den Zügen der Curve C_n in den n Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ schneidet. Die Punkte mögen sämmtlich auf einem ganz im Endlichen sich erstreckenden Theile des Curvenzuges liegen und zwar sei beim Durchlaufen dieses endlichen Curventheiles die Reihenfolge der Punkte genau die angegebene. Die Hülfsgerade L treffe die Ellipse im Punkte A und die Lage des Punktes A auf der Ellipse sei derart, dass beim Durchlaufen der Ellipse der Reihe nach die Punkte $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ aufeinanderfolgen. Wir nehmen nun auf der Ellipse zwischen den Punkten A und A_1 $n+2$ Punkte $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ beliebig an und construiren eine Ebene, welche durch die Gerade L und durch den Punkt B_1 geht und hierauf noch $\frac{1}{2}(n+1)$ Ebenen, von denen die erste durch B_2 und B_3, die zweite durch B_4 und B_5 und die $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{te}}$ durch B_{n+1} und B_{n+2} hindurchgeht. Das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser $\frac{1}{2}(n+3)$ Ebenen werde mit G bezeichnet. Bestimmen wir dann eine Grösse δ genügend klein, so ist bei geeigneter Wahl des Vorzeichens

$$FE\pm\delta G=0$$

die Gleichung einer Fläche von der $\frac{1}{2}(n+3)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H=0$ die Gerade L und überdies eine Raumcurve C_{n+2} von der $n+2^{\text{ten}}$ Ordnung mit

$$\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1+(n-1)=\frac{1}{4}(n+1)(n-1)+1$$

Zügen d. h. mit der Maximalzahl von Zügen ausschneidet. Ueberdies schneidet einer dieser Züge die Ellipse $E=0$ in den $n+2$ Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$. Die letzteren Punkte liegen wiederum sämmtlich auf einem ganz im Endlichen sich erstreckenden Curvenstücke und wenn $B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$ die Reihenfolge der Punkte beim Durchlaufen dieses endlichen Curvenstückes angiebt, so herrscht auf der Ellipse die Reihenfolge $A, B_1, B_2, \ldots, B_{n+2}$. Das eben auf C_n angewandte Verfahren wird daher in entsprechender Weise auf die neu entstandene Curve C_{n+2} anwendbar. Da für $n=1$ jene Maximalzahl gleich Eins wird, so kann für das eben beschriebene Verfahren eine beliebige Gerade des Hyperboloides $H=0$ als Ausgang dienen und wenn wir dann irgend eine Gerade aus der anderen Schaar der Erzeugenden des Hyperboloides als Hülfslinie L hinzunehmen, so folgt durch den Schluss von n auf $n+2$ allgemein, dass es Raumcurven von der ungeraden Ordnung n mit $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$ Zügen giebt. Wir sprechen daher den Satz aus:

Die Zahl der reellen Züge einer irreduciblen Raumcurve n^{ter} Ordnung ist höchstens $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist und es giebt in beiden Fällen Raumcurven, welche wirklich aus so vielen Zügen gebildet sind.

Wir untersuchen nunmehr Lage und Gestalt der Raumcurven mit der Maximalzahl reeller Züge. Da nach den obigen Ausführungen diese Curven auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, so ist es nicht möglich, dass ein Zug derselben sich in einen der übrigen Züge hineinschlingt. Die Züge der Raumcurve liegen vielmehr sämmtlich getrennt im Raume derart, dass jeder Zug durch stetige Aenderung auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne dass er währenddessen einen der anderen Züge durchschneidet. Doch ist damit sehr wohl verträglich, dass einer der Curvenzüge auf der Fläche zweiter Ordnung einen der anderen Züge umschliesst und es sind sogar im allgemeinen für die nämliche Curvenordnung n verschiedene Gruppirungen der Züge auf der Fläche zweiter Ordnung möglich.

Wir sehen ferner leicht ein, dass eine Raumcurve mit der Maximalzahl reeller Züge keinen wirklichen Doppelpunkt besitzen darf. Wenn wir nämlich das Gegentheil annehmen und dann ausserhalb der Raumcurve auf der die Raumcurve tragenden Fläche zweiter Ordnung einen

Punkt P so bestimmen, dass keine der beiden in diesem Punkte P sich schneidenden Geraden der Fläche den Doppelpunkt der Curve trifft, so liefert die Projection der Raumcurve von diesem Punkte aus eine ebene Curve von der n^{ten} Ordnung, welche einen gewöhnlichen Doppelpunkt und ausserdem einen n_1-fachen und einen n_2-fachen Punkt besitzt, wobei $n_1 + n_2 = n$ ist. Das Geschlecht der ebenen Curve wäre folglich kleiner als $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$. Da aber die Zahl der Züge einer Curve höchstens um eine Einheit grösser sein kann als ihr Geschlecht, so könnte die ebene Curve hiernach höchstens $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ Züge haben und das Nämliche wäre daher auch für die Raumcurve der Fall. Dieser Umstand widerspricht unserer Annahme, zufolge derer die Raumcurve die Maximalzahl reeller Züge besitzt. Die Betrachtung lehrt zugleich die Werthe der Zahlen n_1 und n_2 erkennen. Denn da die durch Projection entstandene ebene Curve nothwendig das Geschlecht $\frac{1}{4}(n-2)^2$ beziehungsweise $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$ besitzt, so ergeben sich die Werthe $n_1 = \frac{n}{2}$, $n_2 = \frac{n}{2}$ beziehungsweise $n_1 = \frac{1}{2}(n+1)$, $n_2 = \frac{1}{2}(n-1)$, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist.

Die vorhin construirten Raumcurven mit der Maximalzahl reeller Züge besitzen, wie man sieht, keinen oder einen einzigen unpaaren Zug, jenachdem ihre Ordnung n gerade oder ungerade ist. Es entsteht so die weitere Frage, ob — ebenso wie für ebene Curven — die Forderung der Maximalzahl reeller Züge das Auftreten mehrerer unpaarer Züge ausschliesst oder ob ausser den vorhin construirten Raumcurven noch andere Arten von Raumcurven mit der Maximalzahl von Zügen vorhanden sind.

Um zunächst eine obere Grenze für die Anzahl der unpaaren Züge einer Raumcurve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge zu bestimmen, projiciren wir wie vorhin die Raumcurve von einem Punkte P der quadratischen Fläche auf eine Ebene; der Punkt P soll nicht auf der Raumcurve selbst liegen. Die entstandene ebene Curve n^{ter} Ordnung besitzt zwei $\frac{n}{2}$-fache oder einen $\frac{1}{2}(n+1)$-fachen und einen $\frac{1}{2}(n-1)$-fachen Punkt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Wir bezeichnen diese beiden Punkte mit A und B. Ausser diesen beiden Singularitäten besitzt die ebene Curve — wie vorhin gezeigt worden ist — keinen mehrfachen Punkt. Jedem unpaaren Zuge der Raumcurve entspricht auch ein unpaarer Zug der ebenen Curve und umgekehrt. Denn wenn wir durch den Projectionsmittelpunkt P eine Ebene legen und wenn diese Ebene einen Zug der Raumcurve in einer

ungeraden Zahl von Punkten schneidet, so trifft die durch die Ebene bestimmte Gerade den entsprechenden Zug der ebenen Curve in der nämlichen ungeraden Anzahl von Punkten. Somit kommen wir auf die Untersuchung der durch Projection entstandenen ebenen Curve zurück.

Wir beweisen leicht, dass die ebene Curve höchstens einen unpaaren Zug besitzen kann, welcher durch jeden der beiden Punkte A und B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. In der That nehmen wir an, es gäbe zwei solche Züge und berücksichtigen wir, dass diese Züge ausserhalb der Punkte A und B einander nicht durchschneiden dürfen, so würde folgen, dass die beiden unpaaren Züge im Ganzen eine gerade Anzahl von Malen einander durchschneiden und dies ist nicht möglich. In der entsprechenden Weise erkennt man, dass beim Vorhandensein mehrerer unpaarer Züge kein einziger von diesen sowohl durch A wie durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Wenn also die ebene Curve mehrere unpaare Züge besitzt, so giebt es unter diesen stets einen unpaaren Zug Z, welcher durch einen der beiden singulären Punkte etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen und durch den anderen singulären Punkt B eine gerade Anzahl von Malen hindurchgeht. Es müssen dann aber nothwendig auch die übrigen unpaaren Züge der Curve den nämlichen Punkt A eine ungerade Anzahl von Malen und den Punkt B eine gerade Anzahl von Malen schneiden — abgesehen von dem einen etwa vorhandenen unpaaren Zuge, welcher durch jeden der beiden Punkte A und B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. In der That, wenn es einen unpaaren Zug gäbe, welcher A eine gerade und B eine ungerade Anzahl von Malen schnitte, so müsste dieser unpaare Zug den unpaaren Zug Z in einer geraden Anzahl von Punkten durchschneiden und diess ist unmöglich.

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass jeder unpaare Zug durch einen der singulären Punkte etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen also mindestens einmal hindurchgeht. Da nun A ein $\frac{n}{2}$-facher beziehungsweise ein $\frac{1}{2}(n \pm 1)$-facher Punkt ist, jenachdem die Ordnung n gerade oder ungerade ist, so kann die Curve jedenfalls höchstens $\frac{n}{2}$ beziehungsweise $\frac{1}{2}(n+1)$ unpaare Züge besitzen. Diese obere Grenze für die Zahl der unpaaren Züge wird jedoch nicht erreicht, wie man in folgender Weise zeigt.

Wir setzen erstens $n = 4\nu$, wo ν eine ganze Zahl bedeutet und nehmen an, es existire eine Curve von der Ordnung n mit der Maximalzahl von Zügen, welche in A und in B je einen 2ν-fachen Punkt besitzt; 2ν Züge der Curve seien unpaar und jeder dieser 2ν

Züge gehe einmal durch den Punkt A. Nach den obigen Ausführungen könnte es dann höchstens einen unter den 2ν unpaaren Zügen geben, welcher durch den Punkt B eine ungerade Anzahl von Malen hindurch geht. Da Punkt B ein 2ν-facher Punkt der Curve ist, so müssten, abgesehen von jenen unpaaren Zügen, noch eine ungerade Anzahl reeller Zweige der Curve durch B hindurch laufen. Die übrigen unpaaren Züge der Curve laufen aber sämmtlich durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurch und es müsste daher mindestens einen paaren Zug der Curve geben, welcher durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgeht. Dieser paare Zug kann nicht auch durch A laufen, weil sich in A bereits 2ν unpaare Züge schneiden. Da der paare Zug ausserhalb der Punkte A und B nirgends einen anderen Zug schneiden kann, so würde er jenen unpaaren durch B eine ungerade Zahl von Malen hindurchlaufenden Zug in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneiden müssen und dies ist nicht möglich. Damit ist gezeigt, dass jeder der 2ν unpaaren Züge durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Wir nehmen jetzt $n > 4$ an; es existirt dann ausser den 2ν unpaaren Zügen jedenfalls noch ein paarer Zug. Wir ziehen von einem beliebigen Punkte eines paaren Zuges der Curve eine Gerade nach dem Punkte B. Da diese gerade Linie in B mit jedem der unpaaren Züge eine gerade Anzahl von Punkten gemein hat, so folgt, dass dieselbe noch jeden der unpaaren Züge in einer ungeraden Zahl von Punkten also mindestens in je einem Punkte ausserhalb B treffen muss. Nun ist B ein 2ν-facher Punkt der Curve und es würde also die gerade Linie mit der Curve mindestens $4\nu + 1$ Punkte gemein haben. Diese Folgerung steht im Widerspruch mit der angenommenen Irreducibilität der Curve. Die Curve kann daher nicht 2ν unpaare Züge besitzen und da eine Curve gerader Ordnung auch eine gerade Anzahl unpaarer Züge besitzen muss, so folgt, dass unsere ebene Curve und daher auch die anfänglich betrachtete Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 2$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve 4[ter] Ordnung, für welche die Annahme zweier unpaarer Züge freisteht.

Wir setzen zweitens die Ordnung $n = 4\nu + 2$ und zeigen, dass in diesem Falle unsere Curve gar keinen unpaaren Zug besitzen darf. Nach den früheren Ueberlegungen müsste nämlich jeder der vorhandenen unpaaren Züge durch einen der beiden singulären Punkte, etwa durch A eine ungerade Anzahl von Malen hindurchlaufen. Nun ist die Zahl der sämmtlichen unpaaren Züge nothwendig gerade und da A ein $2\nu + 1$-facher Punkt der Curve ist, so müsste mindestens ein paarer Zug Z existiren, welcher den Punkt A eine ungerade Anzahl von Malen schneidet. Andererseits darf höchstens ein unpaarer

Zug zugleich auch durch B eine ungerade Anzahl von Malen laufen und in Folge dessen müsste es jedenfalls einen unpaaren Zug geben, welcher durch B eine gerade Anzahl von Malen läuft. Dieser unpaare Zug würde jenen paaren Zug Z eine ungerade Anzahl von Malen schneiden und diess ist unmöglich.

Es sei drittens die Ordnung $n = 4\nu + 1$; die vorhin für die Anzahl der unpaaren Züge gefundene obere Grenze ist in diesem Falle gleich $2\nu + 1$. Diese Grenze wird wiederum nicht erreicht. Wir nehmen, um dies einzusehen, an, es gäbe eine Curve mit der Maximalzahl von Zügen; $2\nu + 1$ von diesen Zügen seien unpaar und liefen je einmal durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt A. Höchstens einer von diesen $2\nu + 1$ unpaaren Zügen darf zugleich auch durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgehen. Da aber B ein 2ν-facher Punkt der Curve ist, so müsste in diesem Falle mindestens ein paarer Zug vorhanden sein, welcher durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Dieser paare Zug kann nicht durch A laufen, weil sich im Punkte A bereits $2\nu + 1$ Zweige der Curve schneiden; er würde folglich jenen unpaaren eine ungerade Zahl von Malen durch B laufenden Zug eine ungerade Anzahl von Malen schneiden. Dies ist unmöglich und es ist damit gezeigt, dass keiner der $2\nu + 1$ unpaaren Züge durch B eine ungerade Anzahl von Malen hindurchgehen darf. Ausser den $2\nu + 1$ unpaaren Zügen existirt, falls die Ordnung der Curve $n > 5$ ist, noch ein paarer Zug und wir sehen, wie im ersten Falle, leicht ein, dass ein durch B und einen beliebigen Punkt des paaren Zuges gelegte Gerade mit der Curve mehr als n Punkte gemein haben würde. Die Curve kann also nicht $2\nu + 1$ unpaare Züge besitzen und da eine Curve von ungerader Ordnung nothwendig eine ungerade Anzahl von unpaaren Zügen besitzt, so folgt, dass eine Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 1$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve 5ter Ordnung, für welche die Annahme von 3 unpaaren Zügen freisteht.

Wir setzen endlich viertens die Ordnung $n = 4\nu + 3$. Die Curve könnte dann den früheren Betrachtungen zufolge höchstens $2\nu + 2$ oder vielmehr, da sie von ungerader Ordnung ist, höchstens $2\nu + 1$ unpaare Züge besitzen. Auch diese Anzahl wird nicht erreicht. Wir nehmen an, es existire eine Curve der verlangten Art mit $2\nu + 1$ unpaaren Zügen und haben dann zu unterscheiden, ob jeder von diesen unpaaren Zügen durch den $2\nu + 2$-fachen Punkt A oder durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt B einmal hindurchläuft. Im ersteren Falle müsste es ausserdem noch einen paaren Zug Z der Curve geben, welcher den Punkt A einmal schneidet. Für $n > 3$ wird $2\nu + 1 > 1$ und es giebt daher unter dieser Voraussetzung jeden-

falls einen unpaaren Zug, welcher durch B eine gerade Anzahl von Malen hindurchläuft. Dieser unpaare Zug würde jenen paaren Zug Z eine ungerade Zahl von Malen schneiden, was unmöglich ist. Nehmen wir zweitens an, es liefen die $2\nu + 1$ unpaaren Züge der Curve sämmtlich durch den $2\nu + 1$-fachen Punkt B einmal hindurch, so ist zunächst, wie man leicht einsieht, ausgeschlossen, dass einer dieser unpaaren Züge auch durch A eine ungerade Zahl von Malen hindurchläuft. Wird dann wiederum $n > 3$ angenommen, so besitzt unsere Curve jedenfalls noch einen paaren Zug und wir erkennen dann wie oben bei Behandlung der Fälle $n = 4\nu$ und $n = 4\nu + 1$, dass eine durch A und einen beliebigen Punkt des paaren Zuges gelegte gerade Linie mit der Curve mehr als n Punkte gemein haben würde und diess ist unmöglich. Es folgt also, dass eine Raumcurve von der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit der Maximalzahl reeller Züge höchstens $2\nu - 1$ unpaare Züge besitzen kann. Ausgenommen ist die Curve dritter Ordnung; diese besteht aus einem unpaaren Zuge.

Wir fassen die erhaltenen Resultate wie folgt zusammen:

Eine irreducible Raumcurve n^{ter} Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge besitzt unter diesen beziehungsweise höchstens $2\nu - 2$, $2\nu - 1$, $2\nu - 1$ *unpaare Züge, jenachdem* $n = 4\nu$, $4\nu + 1$, $4\nu + 3$ *ist. In dem Falle* $n = 4\nu + 2$ *sind sämmtliche Züge nothwendig paar. Ausgenommen sind die Curven* 3^{ter}, 4^{ter} *und* 5^{ter} *Ordnung, für welche beziehungsweise die Annahme von* 1, 2, 3 *unpaaren Zügen freisteht.*

Es wird im Folgenden gezeigt, dass die in diesem Satze ausgesprochenen Einschränkungen für die Zahl der unpaaren Züge auch hinreichend sind d. h. wenn man eine die gefundenen Grenzen nicht überschreitende gerade oder ungerade Zahl wählt, so existiren stets Raumcurven von gerader beziehungsweise ungerader Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge und mit soviel unpaaren Zügen als jene Zahl angiebt. Dieser Nachweis bildet den schwierigsten Theil unserer Aufgabe.

Es ist zunächst nothwendig, die Construction einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung mit 2 unpaaren Zügen auszuführen. Zu dem Zwecke nehmen wir auf einem einschaaligen Hyperboloide $H = 0$ 2 Paare von geraden Linien an, von denen das eine Paar L, M der einen Schaar und das zweite Paar L', M' der anderen Schaar von Erzeugenden angehört. Wir legen dann durch die beiden Geraden L und L', sowie durch die beiden Geraden L und M' je eine Ebene und bezeichnen das Product der linken Seiten der Gleichungen dieser beiden Ebenen mit P. Es wird dann die quadratische Form P in einem durch L' und M' begrenzten Theile der Oberfläche des Hyperboloides überall null oder positiv und in dem anderen Theile der Oberfläche null oder negativ. Hierauf legen wir durch die beiden Geraden M

und L' sowie durch die beiden Geraden M und M' je eine Ebene und bilden das Product Q der linken Seiten der Gleichungen der beiden Ebenen. Da auch die so erhaltene quadratische Form Q auf dem Hyperboloide nur beim Ueberschreiten der Linien L' und M' ihr Vorzeichen ändern kann, so ist bei geeigneter Wahl des Vorzeichens $P \pm Q$ eine quadratische Form, welche in den Punkten von L' und M' verschwindet und in allen anderen Punkten des Hyperboloides einen von null verschiedenen Werth hat. Bezeichnen wir daher mit G eine beliebige quaternäre quadratische Form, so stellt die Gleichung

$$F = P \pm Q + \delta G = 0$$

für genügend kleine Werthe δ eine quadratische Fläche dar, welche aus dem Hyperboloide eine irreducible Curve C_4 von der 4^{ten} Ordnung mit 2 unpaaren Zügen ausschneidet. Zugleich ist klar, dass die beiden Schaaren von Erzeugenden des Hyperboloides sich gegenüber den Zügen der Curve verschieden verhalten: die Geraden der einen Schaar schneiden entweder einen der beiden Curvenzüge in 2 reellen Punkten oder sie schneiden die Curve überhaupt nicht und die Geraden der anderen Schaar schneiden jeden der beiden unpaaren Züge in einem Punkte.

Die eben construirte Curve C_4 von der 4^{ten} Ordnung ist vom Geschlechte 1 und es lassen sich daher die Coordinaten ihrer Punkte als elliptische Functionen eines Parameters t darstellen derart, dass die Parameterwerthe $t = 0$ bis $t = \omega$ alle Punkte des einen Zuges und die Parameterwerthe $t = \frac{i\omega'}{2} + 0$ bis $t = \frac{i\omega'}{2} + \omega$ alle Punkte des anderen Zuges liefern. Dabei bedeuten ω, ω' zwei reelle Grössen, und ω, $i\omega'$ sind die beiden Perioden der Curve*). Der Parameter t sei so normirt, dass die Summe der Parameterwerthe für die 4 Schnittpunkte der Curve mit irgend einer Ebene gleich $\frac{i\omega'}{2}$ wird. Nach dem Abelschen Theoreme ist dann die Congruenz

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m} \equiv \frac{m i\omega'}{2} \quad (\omega,\ i\omega')$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die $4m$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m}$ durch eine Fläche m^{ter} Ordnung aus der Raumcurve C_4 ausgeschnitten werden können. Es sei L eine gerade Linie des Hyperboloides $H = 0$, welche die beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in je einem reellen Punkte trifft. Die Parameter dieser beiden Punkte seien λ_1 und $\frac{i\omega'}{2} + \lambda_2$, wo λ_1 und λ_2 reelle Grössen bedeuten. Ferner sei L' eine Erzeugende des Hyperboloides, welche der anderen Schaar angehört und einen der unpaaren Züge in den beiden Punkten

*) Vgl. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie Bd. I, S. 610.

$t = \lambda_1'$ und $t = \lambda_2'$ schneidet, wo λ_1' und λ_2' ebenfalls reelle Grössen bedeuten. Zur Abkürzung setzen wir

$$\tau = -\lambda_1 - \lambda_2 \equiv \lambda_1' + \lambda_2'. \qquad (\omega)$$

Wenn wir nun durch die Gerade L eine Fläche von der ungeraden Ordnung m legen, so schneidet dieselbe unsere Curve C_4 noch in $4m - 2$ weiteren Punkten und nach dem angeführten Satze gilt für die Parameter $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ dieser Punkte die Relation

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv \tau \quad (\omega,\ i\omega').$$

Ist umgekehrt bei ungerader Zahl m die letztere Bedingung erfüllt, so giebt es stets eine Fläche m^{ter} Ordnung, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 jene $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet. Denn stellt die Gleichung $G = 0$ eine Fläche m^{ter} Ordnung dar, welche aus der Curve C_4 die $4m$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$, λ_1, $\frac{i\omega'}{2} + \lambda_2$ ausschneidet, so ist es stets möglich, eine quaternäre Form K von der $m - 2^{\text{ten}}$ Ordnung derart zu bestimmen, dass die Fläche $G + KF = 0$ noch $m - 1$ weitere Punkte mit der Geraden L gemein hat und folglich die Gerade ganz enthält.

Ist m eine gerade Zahl, so erkennt man in derselben Weise die Bedingung

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv -\tau \quad (\omega,\ i\omega')$$

als nothwendig und hinreichend dafür, dass eine Fläche von der m^{ten} Ordnung existirt, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die weiteren $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet.

Die Constante τ ist, wie man leicht erkennt, unabhängig von der besonderen Wahl der geraden Linien L und L' in den bezüglichen Schaaren von Erzeugenden. Die aufgestellte Bedingung

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_{4m-2} \equiv \pm\tau \quad (\omega,\ i\omega')$$

ist daher allgemein nothwendig und hinreichend für die Existenz einer Fläche m^{ter} Ordnung, welche aus der Curve C_4 die $4m - 2$ Punkte $t_1, t_2, \ldots, t_{4m-2}$ ausschneidet und ausserdem eine beliebig gegebene Gerade der einen beziehungsweise der anderen Schaar enthält.

Dagegen ändert die Constante τ ihren Werth, wenn wir statt des Hyperboloides $H = 0$ etwa das Hyperboloid $H + F = 0$ zu Grunde legen, welches ebenfalls die Curve C_4 enthält, aber mit dem Hyperboloide $H = 0$ keine Erzeugende gemein hat. In Folge dieses Umstandes können wir annehmen, dass die Constante τ weder gleich null noch gleich einem Vielfachen der Periode ω ausfällt.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir den Nachweis für die Existenz der möglichen Arten von Raumcurven.

Wir setzen **erstens** die Ordnung $n = 4\nu$ und bestimmen 8 reelle Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$, welche den Bedingungen

$$t_1^{(1)} < 0 < t_2^{(1)} < t_3^{(1)} < \cdots < t_8^{(1)},$$
$$t_1^{(1)} + \quad t_2^{(1)} + t_3^{(1)} + \cdots + t_8^{(1)} = 0$$

genügen. Ausserdem sei $t = 0$ ein im Endlichen liegender Punkt der Raumcurve C_4 und der grösseren Anschaulichkeit wegen nehmen wir die Grössen $t_1^{(1)}$ und $t_8^{(1)}$ dem absoluten Betrage nach so klein an, dass, während der Parameter t von $t_1^{(1)}$ bis $t_8^{(1)}$ wächst, der entsprechende Punkt eine ganz im Endlichen gelegene Strecke der Curve C_4 durchläuft. Darauf bestimmen wir 16 reelle Grössen $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$, welche den Bedingungen

$$t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < 0 < t_2^{(2)} < t_3^{(2)} < \cdots < t_{16}^{(2)} < t_2^{(1)},$$
$$t_1^{(2)} \quad + t_2^{(2)} + t_3^{(2)} + \cdots + t_{16}^{(2)} = 0$$

genügen, dann 24 reelle Grössen $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$ mit den Bedingungen

$$t_1^{(2)} < t_1^{(3)} < 0 < t_2^{(3)} < t_3^{(3)} < \cdots < t_{24}^{(3)} < t_2^{(2)},$$
$$t_1^{(3)} \quad + t_2^{(3)} + t_3^{(3)} + \cdots + t_{24}^{(3)} = 0$$

u. s. f., bis wir zu einem System von $8(\nu - 1)$ Grössen

$$t_1^{(\nu-1)}, \; t_2^{(\nu-1)}, \; \ldots, \; t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)}$$

gelangen, für welche die Bedingungen

$$t_1^{(\nu-2)} < t_1^{(\nu-1)} < 0 < t_2^{(\nu-1)} < t_3^{(\nu-1)} < \cdots < t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)} < t_2^{(\nu-2)},$$
$$t_1^{(\nu-1)} \quad + t_2^{(\nu-1)} + t_3^{(\nu-1)} + \cdots + t_{8(\nu-1)}^{(\nu-1)} = 0$$

erfüllt sind.

Nach den obigen Ausführungen sind durch die Parameterwerthe $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ auf einem der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 8 Punkte bestimmt, welche durch eine Fläche 2ter Ordnung aus derselben ausgeschnitten werden können. Die Gleichung dieser Fläche 2ter Ordnung sei $G^{(1)} = 0$. Für genügend kleine Werthe $\delta^{(1)}$ stellt dann die Gleichung

$$F^{(1)} = F + \delta^{(1)} G^{(1)} = 0$$

eine quadratische Fläche dar, deren Schnitt mit dem Hyperboloide $H = 0$ ebenfalls eine Curve 4ter Ordnung mit 2 unpaaren Zügen ist. Der eine von diesen beiden unpaaren Zügen schneidet den entsprechenden Zug der ursprünglichen Curve C_4 in den 8 Punkten $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ und zwar in der Weise, dass beim Durchlaufen des unpaaren Zuges der neuen Curve jene 8 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_8^{(1)}$ in der nämlichen Reihenfolge auftreten, wie beim Durchlaufen der Curve C_4. Der zweite Zug der neuentstandenen Curve läuft neben dem entsprechenden Zuge der ursprünglichen Curve C_4 entlang, ohne ihn zu schneiden. Es sei nun $G^{(2)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 4ter Ordnung, welche aus

der ursprünglichen Curve C_4 die 16 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = FF^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 4^{ter} Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 8^{ter} Ordnung mit 2 unpaaren und 8 paaren Zügen ausschneidet. Denn von den 4 unpaaren durch $F = 0$ und $F^{(1)} = 0$ bestimmten Zügen bleiben lediglich die beiden sich gegenseitig nicht schneidenden unpaaren Züge auch nach der angegebenen Variation unpaar, während die unendlichen Theile der beiden anderen unpaaren Züge einen einzigen in's Unendliche sich erstreckenden paaren Zug liefern. Die übrigen neu entstehenden 7 paaren Züge verlaufen sämmtlich im Endlichen. Unter ihnen ist einer vorhanden, welcher einen der unpaaren Züge der Curve C_4 in den 16 Punkten $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ schneidet und zwar derart, dass beim Durchlaufen jenes paaren Zuges die 16 Punkte in der nämlichen Reihenfolge $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{16}^{(2)}$ erscheinen, wie beim Durchlaufen des unpaaren Zuges der Curve C_4. Wenn ferner $G^{(3)} = 0$ die Gleichung einer Fläche der 6^{ten} Ordnung darstellt, welche aus der ursprünglichen Curve C_4 die 24 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$ ausschneidet, so ist

$$F^{(3)} = FF^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung einer Fläche 6^{ter} Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 12^{ter} Ordnung mit 4 unpaaren und mit $8 + 14 = 22$ paaren Zügen ausschneidet. Denn einer von den unpaaren Zügen der Curve C_4 und der von diesem in 16 Punkten geschnittene paare Zug liefern zusammen einen unpaaren Zug und 15 paare Züge. Einer dieser 15 paaren Züge schneidet einen der unpaaren Züge der ursprünglichen Curve C_4 in den 24 aufeinanderfolgenden Punkten $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{24}^{(3)}$. Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir bei dem nächsten Schritte eine Fläche $F^{(4)}$ von der 8^{ten} Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der 16^{ten} Ordnung mit 6 unpaaren und mit $8 + 14 + 22 = 44$ paaren Zügen ausschneidet. Wie man sieht, kommen mit jedem weiteren Schritte noch 2 unpaare Züge zu den vorhandenen hinzu, während der Zuwachs zur Anzahl der paaren Züge mit jedem weiteren Schritte um 8 Einheiten grösser ist, als bei dem vorhergehenden Schritte. Wir gelangen daher nach $\mu - 1$ Schritten zu einer Fläche

$$F^{(\mu)} = FF^{(\mu-1)} \pm \delta^{(\mu)} G^{(\mu)} = 0$$

von der $2\mu^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der $4\mu^{\text{ten}}$ Ordnung mit $2\mu - 2$ unpaaren und mit

$$8 + 14 + 22 + 30 + \cdots + (8\mu - 10) = 4\mu^2 - 6\mu + 4$$

paaren Zügen ausschneidet. Dabei ist μ eine Zahl, welche die Zahl ν nicht überschreitet.

Die Fläche $G^{(\mu)} = 0$ von der $2\mu^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet einen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in den 8μ Punkten $t_1^{(\mu)}, t_2^{(\mu)}, \ldots, t_{8\mu}^{(\mu)}$. Es sei jetzt $G'^{(\mu)} = 0$ die Gleichung einer Fläche von der nämlichen Ordnung 2μ, welche aus dem anderen unpaaren Zuge der Curve C_4 irgend 8μ reelle Punkte ausschneidet. Dann wird bei geeigneter Wahl des Vorzeichens und für genügend kleine Werthe $\delta'^{(\mu)}$ die Gleichung

$$F'^{(\mu)} = FF^{(\mu-1)} \pm \delta'^{(\mu)} G'^{(\mu)} = 0$$

eine Fläche darstellen, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve $4\mu^{\text{ter}}$ Ordnung von der nämlichen Gestalt ausschneidet, wie die Fläche $F^{(\mu)} = 0$. Auch trifft diese Schnittcurve $4\mu^{\text{ter}}$ Ordnung die ursprüngliche Curve C_4 in 8μ aufeinanderfolgenden Punkten; aber es ist jetzt ein unpaarer Zug, welcher die 8μ Punkte aus der Curve C_4 ausschneidet. Nunmehr sei $G^{(\mu+1)} = 0$ die Gleichung einer Fläche von der Ordnung $2\mu + 2$, welche aus dem ersteren unpaaren Zuge der Curve C_4 irgend $8\mu + 8$ reelle Punkte ausschneidet; dann stellt die Gleichung

$$F^{(\mu+1)} = FF'^{(\mu)} \pm \delta^{(\mu+1)} G^{(\mu+1)} = 0$$

bei geeigneter Wahl des Vorzeichens und für genügend kleine Werthe $\delta^{(\mu+1)}$ eine Fläche dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der $4\mu + 4^{\text{ten}}$ Ordnung mit $2\mu - 2$ unpaaren Zügen und mit $(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu$ paaren Zügen ausschneidet. Denn die sich in's Unendliche erstreckenden Theile der beiden sich schneidenden unpaaren Züge liefern nach der Variation einen einzigen paaren Zug, so dass die Gesammtzahl der unpaaren Züge bei dem Verfahren ungeändert bleibt. Einer von den unpaaren Zügen der eben construirten Curve der $4\mu + 4^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet einen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 in $8\mu + 8$ aufeinanderfolgenden Punkten und es wird daher der nächste Schritt auf eine Fläche $F^{(\mu+2)} = 0$ führen, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve mit der nämlichen Anzahl $2\mu - 2$ von unpaaren Zügen und mit $(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu + (8\mu + 8)$ paaren Zügen ausschneidet. Die Schnittpunkte mit der Curve C_4 nehmen wir bei jedem weiteren Schritte abwechselnd auf dem einen und dann auf dem anderen unpaaren Zuge der Curve C_4 an, so dass es stets ein unpaarer Zug der neu construirten Curve ist, welcher einen von den unpaaren Zügen der Curve C_4 schneidet und in Folge dessen die Zahl der unpaaren Züge bei allen weiteren Schritten ungeändert bleibt. Andererseits wird der Zuwachs für die Anzahl der paaren Züge bei jedem Schritte, ebenso wie früher, um 8 Einheiten

vergrössert. Nach $\nu - \mu$ Schritten gelangen wir so zu einer Curve von der Ordnung $n = 4\nu$ mit $2\mu - 2$ unpaaren und mit

$$(4\mu^2 - 6\mu + 4) + 8\mu + (8\mu + 8) + \cdots + \{8(\nu - 1)\}$$
$$= 4\nu^2 - 4\nu - 2\mu + 4$$

paaren Zügen; dieselbe besitzt also insgesammt

$$4\nu^2 - 4\nu + 2 = \frac{1}{4}(n-2)^2 + 1$$

Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl. Setzen wir der Reihe nach $\mu = 2, 3, \ldots, \nu$, so erhalten wir Raumcurven $4\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen beziehungsweise $2, 4, \ldots, 2\nu - 2$ Züge unpaar sind. Da die Existenz von Raumcurven mit der Maximalzahl von Zügen ohne einen unpaaren Zug bereits oben nachgewiesen worden ist, so ist damit die gestellte Aufgabe im ersten Falle $n = 4\nu$ erledigt.

Im zweiten Falle $n = 4\nu + 2$ darf eine Curve mit der Maximalzahl reeller Züge unseren früheren Entwickelungen zu Folge überhaupt gar keinen unpaaren Zug besitzen und wir wenden uns daher sofort zu der Untersuchung des dritten Falles $n = 4\nu + 1$. Zu dem Zwecke erinnern wir uns der vorhin aufgestellten Bedingung für die Existenz einer Fläche m^{ter} Ordnung, welche $4m - 2$ gegebene Punkte aus der Curve C_4 ausschneidet und zugleich eine gegebene Gerade des Hyperboloides enthält. Die dort bis auf ein Vielfaches der Periode ω definirte Constante τ werde nun so gewählt, dass ihr Werth zwischen 0 und ω fällt. Durch eine lineare Transformation des Hyperboloides $H = 0$ können wir leicht bewirken, dass diejenige Strecke der Curve C_4 ganz in's Endliche fällt, welche der Punkt beschreibt, während der Parameter t von 0 bis τ wächst. Ferner sei ε eine positive Grösse, welche kleiner ist als jede der beiden Zahlen $\frac{9}{17}$ und $\frac{\tau}{2}$, so dass die Ungleichungen

$$0 < \frac{\varepsilon^{\nu-1}}{9} < \frac{\varepsilon^{\nu-2}}{17} < \cdots < \frac{\varepsilon}{8\nu - 7}$$

$$\frac{\varepsilon}{8\nu - 7} < \tau - \varepsilon < \tau - \varepsilon^2 < \cdots < \tau - \varepsilon^{\nu-1} < \tau$$

erfüllt sind. Wir bestimmen jetzt 9 reelle Grössen

$$t_1^{(1)},\ t_2^{(1)}, \ldots, t_9^{(1)},$$

ferner 17 Grössen

$$t_1^{(2)},\ t_2^{(2)}, \ldots\ t_{17}^{(2)}$$

und schliesslich $8\nu - 7$ Grössen

$$t_1^{(\nu-1)},\ t_2^{(\nu-1)}, \ldots, t_{8\nu-7}^{(\nu-1)},$$

welche den Bedingungen

$$\begin{array}{lllllll} 0 < t_1^{(1)} & < t_2^{(1)} & < \cdots < t_9^{(1)} & < t_1^{(2)}, \\ t_1^{(2)} & < t_2^{(2)} & < \cdots < t_{17}^{(2)} & < t_1^{(3)}, \\ t_1^{(3)} & < t_2^{(3)} & < \cdots < t_{25}^{(3)} & < t_1^{(4)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{(\nu-1)} & < t_2^{(\nu-1)} & < \cdots < t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & < \tau - \varepsilon; \\ t_1^{(1)} & + t_2^{(1)} & + \cdots + t_9^{(1)} & = \varepsilon^{\nu-1}, \\ t_1^{(2)} & + t_2^{(2)} & + \cdots + t_{17}^{(2)} & = \varepsilon^{\nu-2}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^{(\nu-1)} & + t_2^{(\nu-1)} & + \cdots + t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & = \varepsilon \end{array}$$

genügen. Es lassen sich solche Grössen offenbar leicht finden, indem man jede der Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_9^{(1)}$ genügend wenig verschieden von dem Werthe $\frac{\varepsilon^{\nu-1}}{9}$ annimmt, ferner jede der Grössen

$$t_1^{(2)},\ t_2^{(2)},\ \ldots,\ t_{17}^{(2)}$$

genügend wenig von $\frac{\varepsilon^{\nu-2}}{17}$ verschieden und schliesslich jede der Grössen

$$t_1^{(\nu-1)},\ t_2^{(\nu-1)},\ \ldots,\ t_{8\nu-7}^{(\nu-1)}$$

genügend nahe dem Werthe $\frac{\varepsilon}{8\nu-7}$ annimmt. Setzen wir noch

$$t_{10}^{(1)} = \tau - \varepsilon^{\nu-1},\quad t_{18}^{(2)} = \tau - \varepsilon^{\nu-2},\ \ldots,\ t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} = \tau - \varepsilon,$$

so gelten die Bedingungen

$$\begin{array}{lllllll} 0 & < t_1^{(1)} & < t_2^{(1)} & < \cdots < t_9^{(1)} & < t_{10}^{(1)} & < \tau, \\ t_9^{(1)} & < t_1^{(2)} & < t_2^{(2)} & < \cdots < t_{17}^{(2)} & < t_{18}^{(2)} & < t_{10}^{(1)}, \\ t_{17}^{(2)} & < t_1^{(3)} & < t_2^{(3)} & < \cdots < t_{25}^{(3)} & < t_{26}^{(3)} & < t_{18}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{8\nu-15}^{(\nu-2)} & < t_1^{(\nu-1)} & < t_2^{(\nu-1)} & < \cdots < t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & < t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} & < t_{8\nu-14}^{(\nu-2)}; \\ & t_1^{(1)} & + t_2^{(1)} & + \cdots + t_9^{(1)} & + t_{10}^{(1)} & = \tau, \\ & t_1^{(2)} & + t_2^{(2)} & + \cdots + t_{17}^{(2)} & + t_{18}^{(2)} & = \tau, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & t_1^{(\nu-1)} & + t_2^{(\nu-1)} & + \cdots + t_{8\nu-7}^{(\nu-1)} & + t_{8\nu-6}^{(\nu-1)} & = \tau. \end{array}$$

Es sei jetzt L eine gerade Linie auf dem Hyperboloide, welche jeden der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 schneidet. Ausserdem sei diese Gerade L so gewählt, dass von ihr diejenige Strecke der Curve C_4 gar nicht getroffen wird, welche ein Punkt beschreibt, dessen Parameter von 0 bis τ wächst. Wir wählen dann aus der anderen Schaar der Erzeugenden eine solche Gerade L' aus, welche die Curve C_4

überhaupt nicht schneidet. Die Ebene, welche die Geraden L und L' enthält, sei durch die Gleichung $E = 0$ dargestellt. Den früheren Ausführungen zu Folge giebt es eine Fläche 3ter Ordnung, welche die 10 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{10}^{(1)}$ aus einem der Züge der Curve C_4 ausschneidet und zugleich die Gerade L enthält. Die Gleichung dieser Fläche sei $G^{(1)} = 0$. Für genügend kleine Werthe $\delta^{(1)}$ stellt dann die Gleichung

$$F^{(1)} = FE + \delta^{(1)} G^{(1)} = 0$$

eine Fläche 3ter Ordnung dar, welche die Gerade L enthält und überdiess aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 5ter Ordnung mit 3 unpaaren Zügen ausschneidet. Der eine dieser unpaaren Züge schneidet den bezüglichen unpaaren Zug der Curve C_4 in den 10 Punkten $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_{10}^{(1)}$ und zwar in der Weise, dass beim Durchlaufen des unpaaren Zuges jener Curve 5ter Ordnung die 10 Punkte in der nämlichen Reihenfolge auftreten, wie beim Durchlaufen der Curve C_4. Es sei nun $G^{(2)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 5ter Ordnung, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 die 18 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{18}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = FF^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 5ter Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und ausserdem eine Curve 9ter Ordnung mit 3 unpaaren und mit 10 paaren Zügen ausschneidet. Denn nur die 3 sich gegenseitig nicht schneidenden Züge bleiben auch nach der Variation unpaar, während die unendlichen Theile der beiden anderen unpaaren Züge einen einzigen sich in's Unendliche erstreckenden paaren Zug liefern. Die übrigen 9 neu entstehenden paaren Züge verlaufen sämmtlich im Endlichen. Unter ihnen ist einer vorhanden, welcher den bezüglichen unpaaren Zug der Curve C_4 in den 18 aufeinanderfolgenden Punkten $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{18}^{(2)}$ schneidet. Stellt jetzt $G^{(3)} = 0$ eine Fläche 7ter Ordnung dar, welche die Gerade L enthält und aus der Curve C_4 die 26 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{26}^{(3)}$ ausschneidet, so ist

$$F^{(3)} = FF^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung einer Fläche 7ter Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und ausserdem eine Curve 13ter Ordnung mit 5 unpaaren und $10 + 16 = 26$ paaren Zügen ausschneidet. Fahren wir in derselben Weise fort, so erhalten wir bei dem nächsten Schritte eine Fläche $F^{(4)} = 0$ von der 9ten Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L und eine Curve von der 17ten Ordnung mit 7 unpaaren und $10 + 16 + 24 = 50$ paaren Zügen ausschneidet.

Wie man sieht, kommen mit jedem weiteren Schritte noch 2 unpaare Züge zu den vorhandenen hinzu, während der Zuwachs zur Anzahl der paaren Züge mit jedem weiteren Schritte um 8 Einheiten grösser ist, als bei dem vorhergehenden Schritte. Wir gelangen daher nach $\nu - 1$ Schritten zu einer Fläche $F^{(\nu)} = 0$ von der $2\nu + 1^{\text{ten}}$ Ordnung, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade $L = 0$ und eine Curve von der $4\nu + 1^{\text{sten}}$ Ordnung mit $2\nu - 1$ unpaaren und mit

$$10 + 16 + 24 + 32 + \cdots + 8(\nu - 1) = 4\nu^2 - 4\nu + 2$$

paaren Zügen ausschneidet. Diese schliesslich entstandene Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ besitzt also insgesammt

$$4\nu^2 - 2\nu + 1 = \frac{1}{4}(n-1)(n-3) + 1$$

reelle Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl.

Es bietet nunmehr keine Schwierigkeit, auch die Existenz der Curven $4\nu + 1^{\text{ster}}$ Ordnung mit der Maximalzahl von Zügen nachzuweisen, unter denen weniger als $2\nu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind. Wir bezeichnen mit μ eine Zahl, welche kleiner ist als ν. Das eben beschriebene Verfahren führt dann nach $\mu - 1$ Schritten zu einer Curve von der $4\mu + 1^{\text{sten}}$ Ordnung mit $2\mu - 1$ unpaaren Zügen. Diese Curve behandeln wir mittelst der vorhin im ersten Falle $n = 4\nu$ angewandten Methode, indem wir durch abwechselnde Benutzung beider unpaaren Züge der Curve C_4 bewirken, dass allemal ein unpaarer Zug der neu construirten Curve einen der unpaaren Züge der Curve C_4 in lauter aufeinanderfolgenden Punkten trifft und in Folge dessen bei allen weiteren Schritten die Zahl der unpaaren Züge ungeändert bleibt. Die Lage der Punkte auf den beiden Zügen der Curve C_4 ist so zu wählen, dass nach der Variation die grösstmögliche Anzahl neuer Züge entsteht. Nach $\nu - \mu$ Schritten entsteht eine Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen $2\mu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind. Hierbei ist $\mu > 1$ angenommen. Doch ist bereits früher nachgewiesen worden, dass es auch Curven von der Ordnung $n = 4\nu + 1$ mit der Maximalzahl reeller Züge giebt, unter denen nur ein unpaarer Zug vorhanden ist.

Um schliesslich den letzten Fall $n = 4\nu + 3$ zu erledigen, setzen wir $\tau' = \omega - \tau$ und bewirken durch lineare Transformation der Coordinaten, dass diejenige Strecke der Curve C_4 ganz in's Endliche fällt, welche der Punkt beschreibt, während der Parameter t von 0 bis τ' wächst. Ferner bezeichne ε' eine positive Grösse, welche kleiner ist, als jede der beiden Zahlen $\frac{5}{13}$ und $\frac{\tau'}{2}$, so dass die Ungleichungen

$$0 < \frac{\varepsilon'^{\nu}}{5} < \frac{\varepsilon'^{\nu-1}}{13} < \cdots < \frac{\varepsilon'}{8\nu - 3}$$

$$\frac{\varepsilon'}{8\nu - 3} < \tau' - \varepsilon' < \tau' - \varepsilon'^2 < \cdots < \tau' - \varepsilon'^{\nu} < \tau'$$

erfüllt sind. Mit Berücksichtigung dieser Ungleichungen ist es in entsprechender Weise wie vorhin im Falle $n = 4\nu + 1$ leicht, 6 reelle Grössen $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_6^{(1)}$, ferner 14 Grössen $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{14}^{(2)}$ und schliesslich $8\nu - 2$ Grössen $t_1^{(\nu)}, t_2^{(\nu)}, \ldots, t_{8\nu-2}^{(\nu)}$ zu finden, welche den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{array}{llllll}
0 & < t_1^{(1)} < t_2^{(1)} < \cdots < t_5^{(1)} & < t_6^{(1)} & < \tau', \\
t_5^{(1)} & < t_1^{(2)} < t_2^{(2)} < \cdots < t_{13}^{(2)} & < t_{14}^{(2)} & < t_6^{(1)}, \\
t_{13}^{(2)} & < t_1^{(3)} < t_2^{(3)} < \cdots < t_{21}^{(3)} & < t_{22}^{(3)} & < t_{14}^{(2)}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
t_{8\nu-11}^{(\nu-1)} & < t_1^{(\nu)} < t_2^{(\nu)} < \cdots < t_{8\nu-3}^{(\nu)} & < t_{8\nu-2}^{(\nu)} & < t_{8\nu-10}^{(\nu-1)},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
t_1^{(1)} + t_2^{(1)} + \cdots & + t_6^{(1)} = \tau', \\
t_1^{(2)} + t_2^{(2)} + \cdots & + t_{14}^{(2)} = \tau', \\
\cdots & \cdots \\
t_1^{(\nu)} + t_2^{(\nu)} + \cdots & + t_{8\nu-2}^{(\nu)} = \tau'.
\end{array}$$

Es sei L' eine Erzeugende des Hyperboloides $H = 0$, welche keinen der beiden unpaaren Züge der Curve C_4 trifft. Den früheren Ausführungen zufolge giebt es dann eine Fläche 2^{ter} Ordnung, welche die Linie L' enthält und aus dem einen der Züge der Curve C_4 die 6 Punkte $t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \ldots, t_6^{(1)}$ ausschneidet. Die Gleichung dieser Fläche sei $F^{(1)} = 0$. Es werde ferner durch die Gleichung $G^{(2)} = 0$ eine Fläche 4^{ter} Ordnung dargestellt, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die 14 Punkte $t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \ldots, t_{14}^{(2)}$ ausschneidet. Dann stellt die Gleichung

$$F^{(2)} = F F^{(1)} \pm \delta^{(2)} G^{(2)} = 0$$

bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(2)}$ eine Fläche 4^{ter} Ordnung dar, welche aus dem Hyperboloide $H = 0$ die Gerade L' und eine Curve 7^{ter} Ordnung mit einem unpaaren und 6 paaren Zügen ausschneidet. Einer von diesen paaren Zügen schneidet einen unpaaren Zug der Curve C_4 in 14 aufeinanderfolgenden Punkten. Ist ferner $G^{(3)} = 0$ die Gleichung einer Fläche 6^{ter} Ordnung, welche die Gerade L' enthält und aus der Curve C_4 die 22 Punkte $t_1^{(3)}, t_2^{(3)}, \ldots, t_{22}^{(3)}$ ausschneidet, so stellt bei geeignet gewähltem Vorzeichen und für genügend kleine Werthe $\delta^{(3)}$ die Gleichung

$$F^{(3)} = F F^{(2)} \pm \delta^{(3)} G^{(3)} = 0$$

eine Fläche 6^{ter} Ordnung dar, welche die Gerade L' enthält und aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve 11^{ter} Ordnung mit 3 unpaaren und mit 18 paaren Zügen ausschneidet. Wir gelangen so schliesslich zu einer Fläche $F^{(\nu+1)} = 0$ von der $2\nu + 2^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Gerade L' enthält und aus dem Hyperboloide $H = 0$ eine Curve von der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit $2\nu - 1$ unpaaren und mit $4\nu^2 + 2$ paaren Zügen ausschneidet. Diese Curve besitzt folglich insgesammt

$$4\nu^2 + 2\nu + 1 = \frac{1}{4}(n-1)(n-3) + 1$$

reelle Züge und dies ist, wie früher gezeigt worden, die Maximalzahl.

Der Nachweis für die Existenz von Curven der Ordnung $n = 4\nu + 3$ mit der Maximalzahl reeller Züge, unter denen weniger als $2\nu - 1$ unpaare Züge vorhanden sind, wird in entsprechender Weise geführt, wie oben in den Fällen $n = 4\nu$ und $n = 4\nu + 1$ geschehen ist.

Die eben ausgeführten Constructionen liefern, wie man sieht, alle diejenigen Arten von irreducibeln Raumcurven, welche in dem früher abgeleiteten Satze nicht als unmöglich ausgeschlossen worden sind. *Es ist daher im Vorstehenden die Frage nach den gestaltlich verschiedenen Arten der Raumcurven von einer beliebigen Ordnung n mit der Maximalzahl reeller Züge vollkommen erledigt.*

Königsberg i. Pr., den 19. November 1890.

Ueber eine Normalform gewisser Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung.

Von

Georg Pick in Prag.

Bei der Untersuchung der Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung, welche die Verallgemeinerung der Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe, bezw. jener der Schwarz'schen s-Functionen auf den Fall beliebig vieler singulärer Punkte darstellen, macht sich häufig das Bedürfniss nach einer passenden Normalform geltend. Ich glaube daher eine solche im Folgenden mittheilen zu dürfen, welche ich in mancher Beziehung bewährt gefunden habe.*)

1. Es sei zunächst

$$[u]_x = \frac{u'''}{u'} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2 = R(x)$$

eine Differentialgleichung dritter Ordnung von der oben bezeichneten Art, $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien die singulären Punkte derselben, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ bezüglich die zugehörigen Exponenten. Dann ist, wie man weiss:

$$R(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-\lambda_i^2}{2} \cdot \frac{1}{(x-a_i)^2} + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

wo

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i),$$

und $\varphi(x)$ ein ganzes Polynom bedeutet, welches noch insoweit einer näheren Bestimmung unterworfen ist, als $R(x)$ für $x = \infty$ von der 4^{ten} Ordnung verschwinden muss. Hat man also irgend zwei zu den-

---

*) Ich bediene mich dieser Normirung seit dem Jahre 1888, und habe vor mehr als einem Jahre über dieselbe in der Prager deutschen mathematischen Gesellschaft Bericht erstattet.

selben Verzweigungswerthen und Exponenten gehörige Functionen $R(x)$, so können dieselben sich um einen Bruch von der Form

$$\frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-4} x^{n-4}}{f(x)}$$

unterscheiden, und aus irgend einer speciell gewählten Function $R(x)$ erhält man die allgemeinste durch Hinzufügung einer beliebigen rationalen Function der eben festgestellten Form.

Eine passende Wahl einer solchen speciellen Function $R(x) = H(x)$ wird vorbereitet durch die Schreibweise

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1-\lambda_i^2}{2} \frac{1}{(x-a_i)^2} - \sum_{i,k} \frac{N_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)},$$

letztere Summe erstreckt über alle *Combinationen* verschiedener i, k aus der Reihe der Zahlen 1 bis n. Der Nachtheil, der aus dem Umstand entspringt, dass die N_{ik} hier im Allgemeinen weniger Grössen repräsentiren, als ihre Zahl beträgt, wird durch Vortheile der Symmetrie und leichten Berechenbarkeit aufgewogen.

Setzt man nun fest, dass die N_{ik} von den a_i unabhängig sein sollen, so zerfällt die Bedingung, dass

$$[x^3 H(x)]_{x=\infty} = 0,$$

in folgende n Relationen:

$$1 - \lambda_i^2 = \sum_{k=1}^{n}{}' N_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

wo durch den Accent angedeutet ist, dass der Index $k = i$ bei der Summation wegzulassen ist. Die Invarianteneigenschaft unseres Ausdrucks tritt nun sofort explicite hervor. Am besten erkennt man dies, indem man vermittelst der Substitutionen

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad a_i = \frac{a_{i2}}{a_{i1}}$$

$H(x)\,dx^2$ in homogene Gestalt setzt, wo dieser Ausdruck zunächst die Form annimmt

$$H(x).dx^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k} N_{ik} \left\{ \frac{a_{i1}^2 (x\,dx)^2}{x_1^2 (xa_i)^2} + \frac{a_{k1}^2 (x\,dx)^2}{x_1^2 (xa_k)^2} - 2\,\frac{a_{i1}\, a_{k1} (x\,dx)^2}{x_1^2 (xa_i)(xa_k)} \right\}$$

also endlich

$$H(x)\cdot dx^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k} N_{ik} \frac{(a_i a_k)^2 (x\,dx)^2}{(xa_i)^2 (xa_k)^2}.$$

Den Relationen

$$\sum_k N_{ik} = 1 - \lambda_i^2$$

gemäss können die N_{ik} noch auf unendlich viele Weisen gewählt werden. Es dürfte sich aber empfehlen, diese Wahl in der Art vorzunehmen, dass die bisher ausführlicher bekannten besonderen Fälle sich bequem unterordnen. Dies wird durch folgende Festsetzungen erreicht. Es soll N_{ik} als ganzer Ausdruck zweiten Grades der λ_i bestimmt werden, und zwar einerseits symmetrisch in λ_i und λ_k, anderseits symmetrisch in den übrigen λ. Ferner soll für den Fall, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i) = 2$$

ist,

$$N_{ik} = (1-\lambda_i)(1-\lambda_k)$$

sein. Aus diesen Bedingungen ergeben sich bestimmte Werthe der N_{ik}. Setzt man zur Abkürzung

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\lambda_i) - 2 = \sigma,$$

so erhält man

$$N_{ik} = \frac{1}{(n-1)(n-2)}\left\{\sigma^2 - [2(n-2)-(n-1)(\lambda_i+\lambda_k)]\sigma \right.$$
$$\left. + (n-1)(n-2)(1-\lambda_i)(1-\lambda_k)\right\}.$$

Für $n = 3$ verwandelt sich die so bestimmte $H(x)$ selbstverständlich in die rechte Seite der Differentialgleichung der Schwarz'schen s-Functionen; für beliebiges n, aber $\sigma = 0$ und reelle Verzweigungswerthe, geht $H(x)$ ohne weiteren Zusatz in die rechte Seite jener Differentialgleichung über, deren Integral die Abbildung der positiven Halbebene der x auf ein geradliniges n-Eck vermittelt.

2. Von der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[u]_x = R(x)$$

geht man in bekannter Weise leicht zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0$$

über, deren Particularintegrale y_1, y_2 der Relation

$$\frac{y_2}{y_1} = u$$

genügen. Denkt man sich p beliebig gegeben, so bestimmt sich q vermöge

$$R(x) = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx}.$$

Setzt man etwa

$$p = \sum_i \frac{1-\lambda_i}{x-a_i},$$

so ergiebt sich leicht

$$q = \sum_{i,k} \frac{L_{ik}}{(x-a_i)(x-a_k)} + \frac{1}{2} \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-4} x^{n-4}}{f(x)},$$

wo

$$L_{ik} = \frac{1}{2(n-1)(n-2)} \cdot \sigma \cdot \{\sigma - 2(n-2) + (n-1)(\lambda_i + \lambda_k)\}.$$

Ferner ist vermittelst des Abel'schen Satzes

$$y_1^2 = \frac{dx}{du} e^{-\int p\,dx},$$

also unter obiger Annahme bezüglich p

$$y_1^2 = \frac{dx}{du \cdot \prod_i (x-a_i)^{1-\lambda_i}}.$$

Man denke sich nun x in

$$\xi = \frac{\gamma + \delta x}{\alpha + \beta x}$$

transformirt, und bezeichne gleichzeitig mit α_i die Grösse

$$\alpha_i = \frac{\gamma + \delta a_i}{\alpha + \beta a_i}.$$

Geht y_1 in η_1 über, so ist

$$\eta_1^2 = \frac{d\xi}{du \cdot \prod_i (\xi - \alpha_i)^{1-\lambda_i}}.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$\frac{\eta_1}{y_1} = (\alpha + \beta x)^{\frac{\sigma}{2}},$$

wo σ dieselbe Bedeutung wie oben besitzt. Hiedurch ist klargestellt, in wie fern man auch der Differentialgleichung zweiter Ordnung Invarianteneigenschaft zuzuschreiben hat.

Will man hier homogene Schreibweise einführen, so wird man zu setzen haben

$$x = \frac{x_2}{x_1}, \quad a_i = \frac{a_{i2}}{a_{i1}},$$

und an Stelle von y wird dem eben Gefundenen zufolge eine Form φ vom Grade $\left(-\frac{\sigma}{2}\right)$ durch die Gleichung

$$\varphi = y \cdot x_1^{-\frac{\sigma}{2}}$$

zu setzen sein. Es ergiebt sich dann die Gleichung

$$\sum_{i,k} L_{ik} \cdot \frac{D_{a_i} D_{a_k}(\varphi)}{(xa_i)(xa_k)} = \frac{1}{2} \frac{c_0 x_1^{n-4} + c_1 x_1^{n-3} x_2 + \cdots + c_{n-4} x_2^{n-4}}{f} \cdot \varphi.$$

Hierin ist

$$f = \prod_i (x a_i)$$

gesetzt, und durch D sind in bekannter Weise Polarisationen angezeigt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass im Falle der Gleichheit sämmtlicher $\lambda_i (= \lambda)$ die Differentialgleichung dritter Ordnung übergeht in

$$[u]_x = \frac{1-\lambda^2}{2} \cdot \frac{H(x)}{f(x)^2} + \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-4} x^{n-4}}{f(x)},$$

wo $H(x)$ die Hesse'sche Covariante von $f(x)$ bedeutet;*) wogegen sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung dann so schreiben lässt:**)

$$(f, \varphi)^2 = \frac{1}{2}\left(c_0 x_1^{n-4} + \cdots + c_{n-4} x_2^{n-4}\right) . \varphi,$$

wo $(f, \varphi)^2$ die zweite Ueberschiebung von φ über f bedeutet.

Prag, November 1890.

---

*) Man vgl. Weber „Zu Poincarés Theorie der Fuchs'schen Functionen", Göttinger Nachrichten 1886, pag. 363, Gl. (13) u. (14).

**) Man vgl. die Schreibweise der Lamé'schen Differentialgleichung in der Abhandlung des Verf., Wiener Berichte 1887.

Ueber Normirung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Anschliessend an die vorangehende Mittheilung des Hrn. Pick möchte ich hier verwandte Betrachtungen zum Abdruck bringen, welche ich in den Göttinger Nachrichten vom März dieses Jahres in einer der Theorie der Lamé'schen Functionen gewidmeten Arbeit publicirte.*) Es heisst dort u. a.:

„Wir fragen zunächst nach der zweckmässigsten Definition der zu einem n-fach ausgedehnten Raume (R_n) gehörigen Lamé'schen Differentialgleichung. In dieser Hinsicht beginnt man herkömmlicher Weise mit dem System der confocalen Flächen zweiten Grades

$$\frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \cdots + \frac{x_n^2}{\lambda - e_n} = 1 \tag{1}$$

und findet durch bekannte Umformungen der Potentialgleichung die Lamé'sche Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = (A\lambda^{n-2} + B\lambda^{n-3} + \cdots + N)E, \tag{2}$$

wo

$$t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \quad f(\lambda) = (\lambda - e_1)\cdots(\lambda - e_n); \tag{3}$$

ich habe schon bei früherer Gelegenheit hervorgehoben**), dass es zweckmässig ist, die hier auftretenden Constanten $A, B, \ldots, N$ zunächst als unbeschränkt veränderlich zu betrachten und dadurch der gewöhnlichen

*) Diese Arbeit reproducirt verschiedene Resultate, welche ich während des Wintersemesters 1889—1890 in einer Vorlesung über Lamé'sche Functionen abgeleitet habe. Es handelt sich dabei insbesondere auch um die *Oscillationen*, welche die Lösungen der Lamé'schen Differentialgleichung in gegebenen Intervallen ausführen; ich hoffe hierauf in diesen Annalen bei anderer Gelegenheit ausführlich eingehen zu können.

**) Math. Ann. Bd. 18 (1881): Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begränzt sind.

Begriffsbestimmung der Lamé'schen Functionen gegenüber eine Erweiterung eintreten zu lassen*). Nun kann man aber den durch (1) gegebenen Ausgangspunkt beanstanden. In der Potentialtheorie, wo fortgesetzt Transformationen durch reciproke Radien in Betracht zu ziehen sind, ist das System der confocalen Flächen zweiten Grades kein wirklich allgemeines Orthogonalsystem; als solches erscheint vielmehr erst das von Darboux und Moutard im Jahre 1864 aufgestellte System der *confocalen Cycliden*, ein System von Flächen vierter Ordnung, das sich bei Verwendung überzähliger, homogener Coordinaten $(x_1 \ldots x_{n+2})$ [sogenannter polysphärischer Coordinaten] durch die zwei Gleichungen darstellen lässt:

$$\sum_1^{n+2} x_\varkappa^2 = 0, \qquad \sum_1^{n+2} \frac{x_\varkappa^2}{\lambda - e_\varkappa} = 0. \tag{4}$$

Herr Wangerin ist der Erste gewesen, der nachwies, dass man unter Zugrundelegung eines solchen Cyclidensystems in der That eine Theorie ganz ähnlich der Lamé'schen aufbauen kann**). Seine Rechnungen beziehen sich allerdings nur auf $n = 3$; es ist aber nicht schwer, sein Resultat auf beliebiges n zu übertragen; es tritt dann an Stelle von (2) die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \left(\frac{4 - n^2}{16} \cdot \lambda^n + \frac{n^2 - 2n}{16} \cdot \sum_1^{n+2} e_\varkappa \cdot \lambda^{n-1} + A\lambda^{n-2} + \cdots + N\right) E, \tag{5}$$

wo t wiederum das Integral bezeichnet:

$$t = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \tag{6}$$

$f(\lambda)$ aber die Function $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet:

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1) \ldots (\lambda - e_{n+2}). \tag{7}$$

Offenbar kann man statt (5) auch schreiben:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \left(\frac{2 - n}{16(n+1)} f''(\lambda) + a\lambda^{n-2} + \cdots + n\right) E, \tag{8}$$

wo nun die $a, \ldots, n$ beliebig. Es scheint fast, als habe man diesen Gleichungen (5), (8) bisher nur wenig Bedeutung beigelegt. Sicher kann man die Gleichung (2) als Specialfall derselben auffassen (der

*) Lamé und Heine bestimmen $A, B, \ldots$ bekanntlich so, dass eine Particularlösung von (2) algebraisch wird; Hermite führt bei seinen allgemeineren, auf $n = 3$ bezüglichen Untersuchungen für A immer noch den besonderen im algebraischen Falle eintretenden Werth $\frac{n(n+1)}{4}$ ein (wo n eine positive ganze Zahl) und lässt dann freilich B beliebig.

**) Journal für Mathematik, Bd. 82, 1876. Vergl. auch Darboux in den Comptes Rendus der Pariser Akademie, 1876, II.

entsteht, wenn man e_{n+1} und e_{n+2} unendlich werden lässt), aber es lag näher, (5) oder (8) als besonderen Fall derjenigen Gleichungen (2) zu deuten, die dem Raume von $(n+2)$ Dimensionen entsprechen. Und dieser Fall schien kein besonderes Interesse darzubieten, weil man die $(n-1)$ bei ihm noch zur Verfügung stehenden Constanten keineswegs so bestimmen kann, dass eins der zugehörigen E algebraisch wird. Auch hat die Form der neuen Differentialgleichung zunächst wenig Ansprechendes. Singuläre Punkte hat dieselbe, wie dies natürlich scheint, bei $\lambda = e_1, \ldots, e_{n+2}$; aber auch $\lambda = \infty$, d. h. ein Werth, der für das Cyclidensystem (4) vom geometrischen Standpunkte aus ohne jede specifische Bedeutung ist, erscheint als singulärer Punkt. Die zu $e_1 \ldots e_{n+2}$ gehörigen Exponenten berechnen sich dabei als $\frac{1}{2}$ und 0, die zu ∞ gehörigen als

$$\frac{n-2}{4} + 1 \quad \text{und} \quad \frac{n-2}{4}.$$

Inzwischen gelingt es durch eine unbedeutende formale Abänderung unsere Gleichung in ganz anderem Lichte erscheinen zu lassen. Die bei $\lambda = \infty$ auftretenden Exponenten leiten auf den richtigen Weg. Man setze nämlich, homogen machend,

$$\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$$

und schreibe

$$E(\lambda) = \lambda_2^{\frac{n-2}{4}} \cdot F(\lambda_1, \lambda_2), \tag{9}$$

wo F jetzt eine homogene Function (eine *Form*) von λ_1, λ_2 vom Grade

$$\frac{2-n}{4}$$

sein wird, die ich gleich als *Lamé'sche Form* bezeichnen will. Sei ferner jetzt unter f die Form $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades verstanden:

$$f = (\lambda_1 - e_1 \lambda_2) \ldots (\lambda_1 - e_{n+2} \lambda_2). \tag{10}$$

Man erhält dann (nach kurzer Umrechnung mittelst des Euler'schen Theorems) ein Resultat, welches nur noch von der Form f als solcher abhängig ist; man findet nämlich:

$$(f, F)_2 = \varphi \cdot F, \tag{11}$$

wo $(f, F)_2$ die *zweite Ueberschiebung* der Formen f und F vorstellt, *φ aber eine beliebige rationale ganze Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades ist.* Dieses Resultat erscheint so einfach, dass man nicht umhin kann, dasselbe überhaupt an die Spitze der Theorie der Lamé'schen Functionen zu stellen und dementsprechend *Lamé'sche Functionen, oder vielmehr Lamé'sche Formen, des R_n geradezu als solche Formen $\left(\frac{2-n}{4}\right)^{\text{ten}}$ Grades von λ_1, λ_2 zu definiren, welche zweimal über eine gegebene f_{n+2}*

*geschoben, sich selbst bis auf einen Factor φ_{n-2} reproduciren**). Die einzigen singulären Stellen der so definirten F sind, wie bereits angedeutet, die Wurzeln von $f = 0$. Sind diese Wurzeln alle getrennt (wie wir bisher stillschweigend voraussetzten), so gehören zu jeder einzelnen derselben die soeben genannten Exponenten $\frac{1}{2}$ und 0, — rücken aber irgendwo zwei oder mehrere derselben zusammen, so erhält man höhere Exponenten, bez. irreguläres Verhalten. Der gewöhnliche Fall der durch (2) definirten Functionen entsteht, wenn f eine Doppelwurzel erhält (die man dann nach $\lambda = \infty$ wirft). Uebrigens kann man, wenn man f mit beliebig vielfachen Wurzeln ausstatten will und sich vorhält, von der Form F der homogenen Variabelen λ_1, λ_2 durch Zufügung *irgend welcher* Factoren zu Functionen von λ zurückzugehen, *sämmtliche lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten* unter (11) rubriciren. Die Lamé'sche Differentialgleichung hat also in der That eine wesentlich allgemeine Bedeutung. Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe z. B. entsteht aus (11), wenn man f als eine Form sechsten Grades einführt, die ein volles Quadrat ist. Noch ein weiterer Gesichtspunkt spielt hier herein. Wählt man f wieder als Form sechsten Grades, aber nun mit getrennten Wurzeln, so definirt (11) solche Formen F vom Grade $-\frac{1}{2}$, *welche auf dem hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f}$ durchaus unverzweigt sind.* Man überzeugt sich leicht, dass diese F unter allen Formen, die einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügen, die einzigen sind, welche die genannte Eigenschaft besitzen. Nicht so bei höherem Grade von f. Sei $n = 2p$ gesetzt, p aber als > 2 genommen, so werden die allgemeinsten zum hyperelliptischen Gebilde $\sqrt{f_{2p+2}}$ gehörigen unverzweigten F durch die Gleichung geliefert:

$$(f, F)_2 = (\varphi_{2p-2} + \psi_{p-3}\sqrt{f}) \cdot F, \tag{12}$$

die sich von (11) durch das Glied mit $\sqrt{f}$ unterscheidet. Die Anzahl der hier in φ und ψ zusammen enthaltenen willkürlichen Constanten ist $3p - 3$, der Grad von F gleich $-\frac{p-1}{2}$. Die Theorie von (11)

*) Das gleiche Mittel der Einführung homogener Variabler gebrauchen bereits in demselben Sinne Pick und Halphen (Berichte der Wiener Akademie von 1887; Traité des fonctions elliptiques, Bd. II, 1888); nur handelt es sich bei ihnen um eine ganz specielle Untersuchung, nämlich um eine geschickte (nur in diesem Falle mögliche) Transformation höheren Grades der für $n = 3$ geltenden Differentialgleichung (2). Es ist wohl kein Zweifel, dass die geeignete Verwendung homogener Variabler in der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch vielfache Vereinfachungen nach sich ziehen wird.

wird als Vorbereitung der allgemeinen Theorie der Gleichungen (12) erachtet werden können*)."

Ich habe diesen Erläuterungen, die ich, ebenso wie die beigesetzten Bemerkungen, ungeändert dem genannten Aufsatze entnahm, hier nur wenige Worte hinzuzufügen, die sich auf *bestimmte Integrale* beziehen. Bekanntlich hat die Theorie der bestimmten Integrale in den letzten Jahren dadurch einen bemerkenswerthen neuen Aufschwung genommen, dass man sich entschloss, die Integrale ganz allgemein durch geschlossene Wege im complexen Gebiete (auf denen die zu integrirende Function ihren Anfangswerth wieder annimmt) zu definiren, — wobei denn alle die Ausnahmen, welche die ältere Theorie wegen des Unendlichwerdens der zu integrirenden Function statuiren musste, oder auch die Kunstgriffe, zu denen sie in solchen Fällen ihre Zuflucht nahm, von selbst in Wegfall kommen**). Ich möchte nun darauf hinweisen, dass die Darstellung dieser Verhältnisse noch um Vieles eleganter wird, wenn

*) Sind F_1, F_2 irgend zwei Particularlösungen von (12), so ist der Quotient $\eta = F_1 : F_2$ eine auf dem hyperelliptischen Gebilde unverzweigte „Function", welche bei jedem geschlossenen Umlaufe über die zu $\sqrt{f}$ gehörige Riemann'sche Fläche hin sich in der Gestalt $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ reproducirt. Dass es auf jedem algebraischen Gebilde, dessen $p > 1$, ∞^{3p-3} wesentlich verschiedene (durch ihre Differentialgleichung unterschiedene) derartige η-Functionen giebt, ist bekannt (vergl. z. B. meine „Neuen Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie" im 21ten Bande der Math. Annalen, 1882); man hatte aber bisher, so viel ich weiss, diese η noch nicht in zwei Formen F_1, F_2 als Zähler und Nenner derart gespalten, dass F_1 und F_2 für sich genommen auf dem algebraischen Gebilde gleichfalls unverzweigt sind. Dies gelingt aber sofort allgemein, wenn man diejenigen Erläuterungen heranzieht, die ich über die auf beliebigen algebraischen Gebilden existirenden Formen neuerdings gegeben habe (Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Annalen Bd. 36). Der Grad der betr. F_1, F_2 in den zum Gebilde gehörigen Formen φ ist allemal gleich $-\frac{1}{2}$, — in Uebereinstimmung mit dem, was im Texte speciell für hyperelliptische Gebilde bemerkt ist.

**) Vergl. Camille Jordan in Bd. III seines Cours d'analyse, p. 241 ff. (1887), Nekrassoff in der „Mathematischen Sammlung" der Moskauer mathematischen Gesellschaft von 1887 an [die genaueren Citate vergl. bei Pochhammer in Bd. 37 dieser Annalen, p. 543], Pochhammer in den Bänden 35, 36, 37 dieser Annalen. — Die Idee selbst geht wohl unzweifelhaft auf Riemann zurück, der ja die Perioden der Abel'schen Integrale in entsprechender Weise definirte (durch geschlossene Wege auf den zugehörigen Riemann'schen Flächen). Inzwischen finden sich, was den allgemeinen Ansatz und seine Bedeutung für die Theorie der gewöhnlich betrachteten bestimmten Integrale angeht, in Riemanns publicirten Arbeiten nur Andeutungen (vergl. Werke, pag. 77, 137, 404), an welche dann zunächst Hankel (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 9, 1864) und Thomae (ebenda, Bd. 14, 1869) anknüpften, die aber immer noch an *schleifenförmigen* Integrationswegen festhielten, d. h. an Integrationswegen, die, von einem *bestimmten* Punkte auslaufend zu eben diesem bestimmten Punkte zurückführen, womit die ganze Allgemeinheit, die hier anzustreben ist, sozusagen erst zur Hälfte erreicht ist.

man sich entschliesst, auch hier *homogene Veränderliche* anzuwenden. Unter $(za)\dots$ die Determinanten $(z_1 a_2 - z_2 a_1)$ etc. verstanden, wird man zunächst Integrale der folgenden Art betrachten:

$$\int (za)^{\alpha}(zb)^{\beta}\cdots(zx)^{\nu}(z\,dz), \tag{13}$$

wo $\alpha+\beta+\cdots+\nu$ natürlich gleich (-2) zu nehmen ist und die Integration über solche geschlossene Curven der z-Ebene zu nehmen ist, wie sie Herr Pochhammer als Doppelumläufe bezeichnet. Ist die Zahl n der hier auftretenden singulären Punkte gleich 2, so verschwindet das Integral identisch; ist sie gleich 3, so hat man im wesentlichen ein Euler'sches Integral erster Gattung (bei welchem dann die Gleichberechtigung der drei Exponenten α, β, γ, die sonst auf indirectem Wege erschlossen wird, unmittelbar hervortritt). Für $n=4$ kommen diejenigen Integrale, durch welche man die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihen integrirt, beziehungsweise die Riemann'sche P-Function darstellen kann. Auch bei letzterer ist selbstverständlich der Gebrauch homogener Variabler indicirt. Riemann unterwirft die Exponenten seiner Function

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right| \tag{14}$$

bekanntlich der Bedingung, als Summe die Eins zu geben:

$$\lambda'+\lambda''+\mu'+\mu''+\nu'+\nu''=1, \tag{15}$$

und an dieser Bedingung ändert sich nichts, wenn wir P mit einem geeigneten Factor multipliciren, der nur bei $x=a,\,b,\,c$ unendlich wird, beziehungsweise verschwindet:

$$(x-a)^l\cdot(x-b)^m\cdot(x-c)^n\,.\,P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right| \tag{16}$$

$$= P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda'+l & \mu'+m & \nu'+n & x \\ \lambda''+l & \mu''+m & \nu''+n & \end{matrix}\right|.$$

In der That muss ja hier $l+m+n=0$ genommen werden, weil anderenfalls der Punkt $x=\infty$ singulär werden würde. *Indem wir homogene Variable einführen, können wir die Bedingung* (15) *bei Seite schieben.* Schreiben wir nämlich statt der in (16) auftretenden Differenzen $(x-a)$ etc. entsprechende Determinanten $(x_1 a_2 - x_2 a_1),\dots,$ so hindert Nichts, eine Function Π der homogenen Veränderlichen x_1, x_2 (eine *Form* der x_1, x_2) durch die Gleichung zu definiren:

$$\Pi = (xa)^l \cdot (xb)^m \cdot (xc)^n \cdot P \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}, \tag{17}$$

wo nun die l, m, n beliebig anzunehmen sind. Wir bezeichnen dieses Π, indem wir für $\lambda' + l, \ldots$ wieder kurz $\lambda', \ldots$ schreiben, mit

$$\Pi \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x_1, x_2 \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}; \tag{18}$$

die Summe $\frac{\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' - 1}{2}$ *stellt dann den Grad dar, welchen das* Π *in* x_1, x_2 *besitzt.* Indem wir die l, m, n in (17) zweckmässig wählen, können wir dieses Π natürlich in verschiedener Weise normiren. Sei der Kürze halber:

$$\lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu, \quad \nu' - \nu'' = \nu. \tag{19}$$

Dann können wir als Normal-Π beispielsweise das folgende betrachten:

$$\Pi \begin{vmatrix} a & b & c & \\ +\frac{\lambda}{2} & +\frac{\mu}{2} & +\frac{\nu}{2} & x_1, x_2 \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\frac{\nu}{2} & \end{vmatrix}, \tag{20}$$

oder auch das folgende:

$$\Pi \begin{vmatrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{vmatrix}, \tag{21}$$

(welches auf 8 Weisen herzustellen ist, weil die λ, μ, ν in (19), indem man die λ', λ'' etc. in ihrer Reihenfolge vertauscht, beliebig im Vorzeichen geändert werden können). Hier ist das durch Formel (20) gegebene Π, vom Grade $-\frac{1}{2}$ in den x_1, x_2, dasjenige, welches durch die normirte Differentialgleichung bestimmt wird, von der oben die Rede war:

$$(\Pi, f)_2 = \varphi \cdot \Pi, \tag{22}$$

wo nun $f = (xa)^2 (xb)^2 (xc)^2$ zu nehmen ist und die quadratische Form φ in einfacher Weise von den λ, μ, ν abhängt*). Andererseits ist das durch (21) gegebene Π gerade dasjenige, welches unmittelbar durch ein bestimmtes Integral von der Form (13) gegeben wird:

---

*) Man findet des Näheren:

$$\varphi = \frac{5}{8} \{ (8\lambda^2 + 1)(ab)(ac)(xb)(xc) + (8\mu^2 + 1)(bc)(ba)(xc)(xa) + (8\nu^2 + 1)(ca)(cb)(xa)(xb) \}.$$

$$(23)\qquad \Pi\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix}\right|$$

$$=\int (za)^{\frac{-1+\lambda-\mu-\nu}{2}}\cdot(zb)^{\frac{-1+\mu-\nu-\lambda}{2}}\cdot(zc)^{\frac{-1+\nu-\lambda-\mu}{2}}\cdot(zx)^{\frac{-1+\lambda+\mu+\nu}{2}}\cdot(zdz),$$

(das Integral wieder über Doppelumläufe des z erstreckt). Es ist nicht unwichtig, diese Formel so aufzufassen, dass man das Integral geradezu als Definition des linker Hand stehenden Π gelten lässt. Man erreicht dann, dass Π nicht nur von x_1, x_2, sondern auch von a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 wie von den Exponenten λ, μ, ν in ganz bestimmter Weise abhängt*): Π *erscheint als eine Covariante der 4 Reihen cogredienter binärer Veränderlicher* a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; x_1, x_2, *es erscheint überdies als ganze Function der Exponenten* λ, μ, ν. In letzterem Umstande liegt es begründet, dass man nun hier keinerlei, z. B. ganzzahlige Werthsysteme der λ, μ, ν bei der Definition auszuschliessen hat; vielmehr sind alle besonderen Verhältnisse, die sich bei einzelnen Werthsystemen der λ, μ, ν einstellen mögen, aus der allgemeinen Theorie durch Grenzübergang abzuleiten. — Ich hoffe sehr, dass im Sinne dieser Andeutungen eine zusammenhängende Darstellung sämmtlicher Eigenschaften der hypergeometrischen Function von anderer Seite in nicht zu ferner Zeit veröffentlicht wird; ich selbst habe die Grundzüge einer solchen Ableitung im Sommersemester 1890 vorgetragen.

Schliessen wir aus, dass die λ, μ, ν rein imaginär sind, so giebt es unter den acht jedesmal zusammengehörigen Fällen (21) einen, dessen λ, μ, ν in ihrem reellen Theile *positiv* sind. Die Zweige Π_1, Π_2 des betreffenden Π sind als Formen von x_1, x_2 überall endlich, ohne irgendwo eine gemeinsame Nullstelle zu besitzen. Man wird daher die so particularisirten Π_1, Π_2 zu Grunde legen, wenn es sich darum handelt, x_1, x_2 rückwärts als Formen der Π_1, Π_2 darzustellen. Die ist bekanntlich insbesondere dann anzustreben, wenn die λ, μ, ν den reciproken Werthen dreier reeller ganzer Zahlen l, m, n gleich sind. Indem wir l, m, n gleich als positiv voraussetzen, hat das in Rede stehende Π in den x_1, x_2 dann den Grad:

$$\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-1\right):2;$$

---

*) Hiermit dürfte geleistet sein, was Riemann beabsichtigte, als er sich (Werke, p. 76—77) dahin äusserte, dass der Ausdruck der P-Function durch ein bestimmtes Integral zur Bestimmung der in den Fundamentalzweigen $P^{\lambda'}$, $P^{\lambda''}$, ... noch willkürlich gebliebenen Factoren benutzt werden solle. Allerdings benutzte Riemann ja keine homogenen Variabelen; ich nehme an, dass er eben hierdurch gehindert war, die Sache zu einem guten Abschluss zu bringen.

die x_1, x_2 sind also in dem Π_1, Π_2 vom Grade:

$$2 : \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right). \tag{24}$$

Es ist dies die zuerst von **Halphen** gefundene Zahl (Comptes Rendus, t. 92 (1881, I))*). Die neue Ableitung, welche hier für diese Zahl gegeben ist, oder vielmehr die neue Bedeutung, unter der dieselbe hier auftritt, dürfte unter principiellen Gesichtspunkten bemerkenswerth sein.

Göttingen, den 23. December 1890.

---

*) Vergl. die bez. Erläuterungen auf p. 129 des Bandes I meiner von Herrn Fricke herausgegebenen *Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen* (Leipzig 1890).

Ueber analytische Darstellung unendlicher Reihen, die durch Gliederinversionen aus einer gegebenen hervorgehen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Wie ich gelegentlich*) hervorgehoben habe, ist die Frage, ob bei einer *convergenten* Reihe $\sum a_\nu$ der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für $n = \infty$ *verschiedene* und darunter insbesondere auch *unendlich grosse* Werthe annehmen könne, schon deshalb *ohne Weiteres zu bejahen*, weil man diese Erscheinung bei *jeder* convergenten Reihe durch blosse Umstellung der Glieder hervorbringen kann.

Nimmt man speciell eine Reihe, bei welcher $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ wird, $\left(\text{wie z. B. } \sum \frac{1}{\nu!},\ \sum \alpha^{\nu^2} \text{ für } \alpha < 1\right)$, so genügt schon die Inversion *je zweier* consecutiver Glieder, um den fraglichen Grenzwerth zwischen 0 und ∞ oscilliren zu lassen. Theilt man ferner die Glieder einer solchen Reihe in Gruppen von beständig *wachsender* Gliederzahl — z. B. in der Weise, dass man die λ^{te} Gruppe aus λ Gliedern bestehen lässt — und kehrt sodann die Anordnung der Glieder innerhalb jeder Gruppe einfach um, so resultirt offenbar eine Reihe von der Beschaffenheit, dass die Stellen, an welchen der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ für hinlänglich grosse ν *nicht* jede beliebig grosse Zahl übersteigt, schliesslich unendlich selten werden.

*) *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz* etc. Math. Ann. Bd. 35, p. 308, Fussnote.

Obschon nun diese Deduction vollständig hinreichen dürfte, um die *Existenz* derartiger Reihen als etwas völlig *selbstverständliches* erscheinen zu lassen und zwar in weit höherem Grade, als dies lediglich mit Hülfe eines oder mehrerer *ad hoc* construirten Beispiele zu ermöglichen wäre, so wurde von anderer Seite dagegen eingewendet, dass bei den auf die angegebene Weise durch Umordnung erzeugten Reihen die einzelnen Glieder *nicht*, wie es gerade für Unterrichtszwecke wünschenswerth sei, durch einen *einheitlichen analytischen Ausdruck* dargestellt erscheinen.*)

Ich glaube indessen, dass dieser Einwand kaum einer wirklichen Widerlegung bedarf: denn es liegt doch wohl auf der Hand, dass die Hülfsmittel der Analysis, welche es heutzutage ermöglichen, auch die allerkühnsten und complicirtesten arithmetischen Constructionen durch verhältnissmässig einfache Zeichen zu fixiren, auch dazu ausreichen *müssen*, um so einfache Operationen, wie jene Gliederinversionen analytisch darzustellen. In der That findet man beispielsweise schon bei oberflächlicher Betrachtung, dass die Substitution von:

$$\nu + (-1)^\nu \quad \text{statt} \quad \nu$$

offenbar:

$$\begin{array}{lll} 2\lambda + 1 & \text{an die Stelle von} & 2\lambda, \\ 2\lambda & \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} & 2\lambda + 1 \end{array}$$

bringt, und es liefern demnach Reihen, wie:

$$\sum \frac{1}{(\nu + (-1)^\nu)!}, \quad \sum \alpha^{(\nu+(-1)^\nu)^2} \quad (\alpha < 1)$$

aus dem angegebenen allgemeinen Princip hervorgegangene und doch durch analytische Zeichen *allereinfachster* Art darstellbare Beispiele von der verlangten Beschaffenheit.

Ich möchte indessen diese Gelegenheit benützen, um *ganz allgemein* zu zeigen, wie das allgemeine Glied einer Reihe, die durch irgend eine derartige Gliederinversion aus einer gegebenen abgeleitet ist, sich stets durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck darstellen lässt.

Sei etwa $f(\nu)$ das allgemeine Glied der vorgelegten Reihe. Sodann sollen deren Glieder irgendwie in Gruppen eingetheilt werden:

*) Ich sehe hierbei ganz davon ab, dass, wie ich a. a. O. ausdrücklich hervorgehoben habe, ganz allgemeine Reihentypen mit der fraglichen Eigenschaft sich auch auf mancherlei andere, nicht minder einfache Weise construiren lassen, z. B. durch Multiplication der einzelnen Glieder einer convergenten Reihe mit gewissen willkürlichen Factoren. Auch hier hat es nicht die geringste Schwierigkeit, für derartige Constructionen einheitliche analytische Ausdrücke herzustellen: s. die Fussnote auf S. 4.

hierbei möge das Anfangsglied der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Gruppe durch den Stellenzeiger $\nu = \varphi(\lambda)$ bestimmt sein*), sodass also:

$$(1)\quad \sum_{\varphi(0)}^{\infty} f(\nu) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\Big\{f\big(\varphi(\lambda)\big) + f\big(\varphi(\lambda)+1\big) + \cdots + f\big(\varphi(\lambda+1)-1\big)\Big\}.$$

Wird jetzt die Reihe so umgeordnet, dass man die Reihenfolge der Glieder innerhalb jeder Gruppe invertirt, wobei etwa allgemein $f(m_\nu)$ an die Stelle von $f(\nu)$ treten möge, so muss m_ν eine solche Function von ν sein, dass:

$$(2)\quad \sum_{0}^{\infty} f(m_\nu) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\lambda}\Big\{f\big(\varphi(\lambda+1)-1\big) + f\big(\varphi(\lambda+1)-2\big) + \cdots + f\big(\varphi(\lambda)\big)\Big\}$$

wird. Hiernach besteht innerhalb der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Gliedergruppe zwischen m_ν und ν die Beziehung:

$$m_\nu + \nu = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda+1) - 1,$$

also:

$$(3)\qquad m_\nu = \varphi(\lambda) + \varphi(\lambda+1) - (\nu+1)$$

und es handelt sich somit nur noch darum, festzustellen, wie sich die ganze Zahl λ durch ν ausdrückt, während ν die Werthe $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\lambda)+1, \ldots, \varphi(\lambda+1)-1$ durchläuft. Mit anderen Worten: man hat die Ungleichung

$$(4)\qquad \varphi(\lambda) \leqq \nu < \varphi(\lambda+1)$$

nach λ aufzulösen.

Nun muss die im übrigen ganz willkürlich zu denkende Function $\varphi(\lambda)$ ihrer Natur nach offenbar eindeutig sein und mit λ monoton *zunehmen*. In Folge dessen besitzt sie auch eine und nur eine gleichfalls eindeutige, monoton zunehmende Umkehrung, d. h. die Gleichung:

$$\varphi(\lambda) = \mu$$

besitzt eine Auflösung:

$$\lambda = J(\mu) = J\big(\varphi(\lambda)\big),$$

wo $J(\mu)$ eine eindeutige, monotone Function von μ bedeutet. Mit Benützung dieser letzteren ergiebt sich nun aus Ungleichung (4):

$$\lambda \leqq J(\nu) < \lambda + 1$$

und somit wird:

---

*) Die Anzahl $\psi(\lambda)$ der in der $(\lambda+1)^{\text{ten}}$ Gruppe enthaltenen Glieder ist also:

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda+1) - \varphi(\lambda).$$

Wäre statt des Anfangsindex $\varphi(\lambda)$ von vornherein diese Gliederanzahl gegeben, so hätte man offenbar zur Bestimmung von $\varphi(\lambda)$ die Gleichung:

$$\varphi(\lambda) = \psi(0) + \psi(1) + \cdots + \psi(\lambda-1) + 1.$$

$$\lambda = [J(\nu)]\,^{*}), \tag{5}$$

wenn, wie üblich, das Symbol $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Daher findet man schliesslich:

$$f(m_\nu) = f\big(\varphi[J(\nu)] + \varphi[J(\nu)+1] - (\nu+1)\big) \tag{6}$$

als das allgemeine Glied derjenigen Reihe, welche durch die angegebene Inversion aus $\sum f(\nu)$ erzeugt wird.

---

*) Das Charakteristische der hier auftretenden Function $[J(\nu)]$ besteht offenbar darin, dass dieselbe jedesmal einen *constanten* Werth λ behält, wenn ν eine Zahlenreihe von der Form

$$\varphi(\lambda),\ \varphi(\lambda)+1, \ldots, \varphi(\lambda+1)-1$$

durchläuft. Derartige Functionen können auch in anderer Weise zur Bildung von Reihen $\sum a_\nu$ benützt werden, bei denen $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ beliebig oft jede noch so grosse Zahl übersteigt, etwa folgendermassen: Es sei $F(\nu)$ eine mit ν monoton zunehmende positive Grösse von der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{n=\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \infty$. Dann ist offenbar stets:

$$\frac{F(\nu)}{F\big(\varphi[1+J(\nu)]-1\big)} \leqq 1.$$

Jedesmal nämlich, wenn ν eine Zahlenreihe von der Form

$$\varphi(\lambda),\ \varphi(\lambda)+1, \ldots, \varphi(\lambda+1)-1$$

ist $[J(\nu)] = \lambda$, also der Nenner des obigen Ausdruckes *constant*, nämlich

$$= F\big(\varphi(\lambda+1)-1\big).$$

Ist sodann c_ν das Glied einer *beliebigen convergenten* Reihe und $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$ von Null verschieden, so wird

$$a_\nu = \frac{F(\nu)}{F\big(\varphi[1+J(\nu)]-1\big)} \cdot c_\nu$$

gleichfalls das Glied einer *convergenten* Reihe bilden, bei welcher *im allgemeinen*

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{F(\nu+1)}{F(\nu)} \cdot \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu}$$

also *beliebig gross* wird — nämlich allemal, wenn nicht gerade:

$$\nu = \varphi(\lambda+1)-1$$

ist, in welchem Falle:

$$a_\nu = \frac{F(\nu)}{F\big(\varphi(\lambda+1)-1\big)} \cdot c_\nu,$$

$$a_{\nu+1} = \frac{F(\nu+1)}{F\big(\varphi(\lambda+2)-1\big)} \cdot c_{\nu+1}$$

wird.

Beispiel: $\varphi(\lambda) = \lambda^2$, also $J(\nu) = \sqrt{\nu}$.
$F(\nu) = \nu!$

Beispiele. I. Sei $\varphi(\lambda) = p\lambda$, wo p eine ganze positive Zahl $\geqq 2$. Die Gliederzahl in jeder Gruppe ist alsdann offenbar constant, nämlich: $p(\lambda + 1) - p\lambda = p$. Da ferner aus:

$$p\lambda = \mu$$

folgt:

$$\lambda = J(\mu) = \frac{\mu}{p}$$

so wird:

$$\begin{aligned} m_\nu &= p\lambda + p(\lambda + 1) - (\nu + 1) \\ &= 2p\left[\frac{\nu}{p}\right] + (p - 1) - \nu. \end{aligned}$$

Setzt man speciell $p = 2$, so würde sich hier

$$m_\nu = 4\left[\frac{\nu}{2}\right] + 1 - \nu$$

ergeben, während oben für diese nämliche Inversion:

$$m_\nu = \nu + (-1)^\nu$$

gefunden wurde. Hieraus ergiebt sich, dass:

$$4\left[\frac{\nu}{2}\right] + 1 = 2\nu + (-1)^\nu$$

sein muss — eine Relation, deren Richtigkeit man ohne Weiteres einsieht.

---

und daher:
$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1 \cdot 2 \dots \nu}{1 \cdot 2 \dots ([1 + \sqrt{\nu}]^2 - 1)} \cdot c_\nu \\ &= \frac{c_\nu}{(\nu + 1)(\nu + 2) \dots ([1 + \sqrt{\nu}]^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Nimmt man noch speciell:

$$c_\nu = \frac{1}{\nu \cdot [1 + \sqrt{\nu}]^2}$$

(wobei $\sum c_\nu$ offenbar convergirt, da $[1 + \sqrt{\nu}]^2 > \nu$), so wird:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu \cdot (\nu + 1) \dots ([\sqrt{\nu}] + 1)^2}$$

wohl eins der einfachsten Beispiele der fraglichen Art.

Hier wird *im allgemeinen*, d. h. solange ν und $\nu + 1$ *beide* einem Intervalle von der Form:

$$\lambda^2,\ \lambda^2 + 1, \dots, (\lambda + 1)^2 - 1$$

angehören:

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \nu.$$

Dagegen für $\nu = (\lambda + 1)^2 - 1$:

$$a_\nu = \frac{1}{((\lambda + 1)^2 - 1)(\lambda + 1)^2},$$

$$a_{\nu+1} = \frac{1}{(\lambda + 1)^2 \dots (\lambda + 2)^2}.$$

II. $\varphi(\lambda) = \lambda^p$. Die Anzahl der zu einer Gruppe vereinigten Glieder ist hier:

$$(\lambda + 1)^p - \lambda^p = p\lambda^{p-1} + \frac{1}{2}p(p-1)\lambda^{p-2} + \cdots + 1,$$

wächst also mit λ über alle Grenzen. Im übrigen folgt hier aus:

$$\lambda^p = \mu$$

dass:

$$\lambda = J(\mu) = \sqrt[p]{\mu}$$

und daher:

$$m_\nu = \lambda^p + (\lambda + 1)^p - (\nu + 1)$$
$$= \left[\nu^{\frac{1}{p}}\right]^p + \left[\nu^{\frac{1}{p}} + 1\right]^p - (\nu + 1).$$

Setzt man wiederum speciell $p = 2$, so wird die Gliederzahl in der $(\lambda + 1)^{\text{ten}}$ Gruppe gleich $(2\lambda + 1)$ und:

$$m_\nu = 2\lambda(\lambda + 1) - \nu$$
$$= 2[\sqrt{\nu}]\,[\sqrt{\nu} + 1] - \nu.$$

Darnach ist z. B. die Reihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$a_\nu = \frac{1}{(2[\sqrt{\nu}]\,[\sqrt{\nu}+1] - \nu)!}$$

diejenige, welche aus $\sum \frac{1}{\nu!}$ entsteht, wenn man dieselbe in Gruppen von $1, 3, 5, \ldots$ Gliedern theilt und darauf in jeder Gruppe die Reihenfolge umkehrt. *Innerhalb* jeder solchen Gruppe wird dann der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ schliesslich jede noch so grosse Zahl übersteigen, und die Stellen, wo dies *nicht* der Fall ist, nämlich die Berührungsstellen je zweier consecutiven Gruppen erscheinen durch immer grösser werdende Zwischenräume getrennt, werden also schliesslich unendlich selten.

III. $\varphi(\lambda) = p^\lambda$. Hier wächst die Gliederzahl der einzelnen Gruppen noch erheblich schneller, nämlich wie $p^{\lambda+1} - p^\lambda = (p-1)\,p^\lambda$. Da ferner aus:

$$p^\lambda = \mu$$

folgt:

$$\lambda = J(\mu) = \overset{p}{\mathrm{Log}}\,\mu,$$

so ergiebt sich:

$$m_\nu = p^\lambda + p^{\lambda+1} - (\nu + 1)$$
$$= (p + 1)\,p^{\left[\overset{p}{\mathrm{Log}}\,\nu\right]} - (\nu + 1).$$

Man kann also in der That auf diesem Wege in unbegrenzter Zahl convergente Reihen erzeugen, bei denen die Stellen, an welchen der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ für hinlänglich grosse ν *nicht* jede beliebige Zahl über-

steigt, beliebig selten werden. Ich möchte aber nochmals betonen, dass in der Existenz derartiger convergenter Reihen ganz und gar nichts überraschendes liegt, sofern man sich nur klar macht, dass die Convergenz einzig und allein von der *absoluten* Grösse der Glieder a_ν abhängt, während der Quotient $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ nur deren *relative* Grösse bestimmt und nur in dem *ganz speciellen Falle*, wo $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ von irgend einer Stelle ν ab *ausnahmslos* $\geqq 1$ bezw. < 1 einen Schluss auf die *absolute* Grösse der Glieder gestattet. —

Im Anschlusse an die vorhergehende Betrachtung will ich noch bemerken, dass das Verfahren, welches dort zur analytischen Darstellung von gruppenweisen Inversionen einer unbegrenzten Reihe *discreter* Grössen benützt wurde, *mutatis mutandis* auch zur Darstellung einer Operation dienen kann, welche ich als *streckenweise Inversion von Functionen* einer reellen *continuirlichen* Variablen bezeichnen möchte. Dabei nenne ich, wenn eine Function $f(x)$ für die Strecke oder das Zahlenintervall $a < x < b$ irgendwie definirt ist, diejenige Function $\overline{f(x)}$ durch *Inversion für die Strecke* (ab) aus $f(x)$ abgeleitet, welche den Bedingungen genügt:

$$\overline{f(a+0)} = f(b-0), \qquad \overline{f(b-0)} = f(a+0)$$

und die im übrigen die Werthe von $f(x)$ genau in umgekehrter Folge durchläuft. Offenbar ergiebt sich in diesem einfachsten Falle, wo es sich um Inversion für eine *einzelne* Strecke handelt:

$$\overline{f(x)} = f(a+b-x),$$

d. h. man hat lediglich in $f(x)$ an Stelle von x eine neue Variable x' einzuführen, welche bestimmt ist durch die Gleichung:

$$x' = a + b - x.$$

Es sei nun $f(x)$ für ein beliebiges (d. h. begrenztes oder unbegrenztes) Intervall der *positiven* Variablen x definirt, und es sei eine (gleichfalls begrenzte oder unbegrenzte) Reihe beständig wachsender oder beständig abnehmender Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ gegeben (also $x_\infty = +\infty$ oder endlich und bestimmt bezw. auch Null). Soll dann $f(x)$ für *jedes* der Intervalle $(x_n\, x_{n+1})$ *invertirt* werden, so hat man x lediglich zu ersetzen durch:

$$x' = (x_n + x_{n+1}) - x$$

und es handelt sich hier schliesslich nur noch darum x_n, x_{n+1} als Functionen von x darzustellen. Je nachdem nun die x_ν eine *zu*- oder eine *ab*nehmende Folge bilden, wird man setzen können:

$$x_\nu = \varphi(\nu) \quad \text{bezw.} \quad x_\nu = \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

wobei in beiden Fällen $\varphi(\xi)$ als eine monoton *zu*nehmende, stetige Function der positiven Variablen ξ gedacht werden kann. Alsdann existirt wiederum eine monoton zunehmende inverse Function (im gewöhnlichen Sinne):

$$J\big(\varphi(\xi)\big) = \xi.$$

Da nun für das Intervall $(x_n\, x_{n+1})$:

$$x_n \leqq x < x_{n+1} \quad \text{bezw.} \quad x_n \geqq x > x_{n+1}$$

(wenn man etwa, um eine Festsetzung zu treffen, den Endpunkt x_n dem Intervalle $(x_n\, x_{n+1})$ zurechnet), also:

$$\varphi(n) \leqq x < \varphi(n+1) \quad \text{bezw.} \quad \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \geqq x > \varphi\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

so folgt:

$$n \leqq J(x) < n+1 \quad \text{bezw.} \quad \frac{1}{n} \geqq J(x) > \frac{1}{n+1},$$

d. h.:

$$n = [J(x)] \quad \text{bezw.} \quad n = \left[\frac{1}{J(x)}\right]$$

und es ergiebt sich daher im Falle der zunehmenden x_ν:

$$x' = \varphi\big([J(x)]\big) + \varphi\big([J(x)+1]\big) - x,$$

desgl. im Falle der abnehmenden x_ν:

$$x' = \varphi\left(\left[\frac{1}{J(x)}\right]^{-1}\right) + \varphi\left(\left[\frac{1}{J(x)}+1\right]^{-1}\right) - x.$$

Es ist klar, dass diese Formeln dazu benützt werden können, um aus irgend welchen Functionen $f(x)$ solche mit unendlich vielen Discontinuitäten abzuleiten, welche nichts destoweniger bei einer Integration zwischen irgend welchen Grenzen genau dasselbe Resultat geben wie $f(x)$.

(Beispiele: $\varphi(n) = n$, also: $x' = [x] + [x+1] - x$;

$f(x) = x^{-p}\,(p > 1)$, $\quad f(x) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{x}$.

Ferner: $\varphi(n) = \frac{1}{n}$; also: $x' = \left[\frac{1}{x}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{x}+1\right]^{-1} - x$;

$f(x) = x^p \quad (p > 0)$, $\quad f(x) = \sin\frac{\pi}{2x}$ u. s. f.). —

München, im October 1890.

Fig. 2.

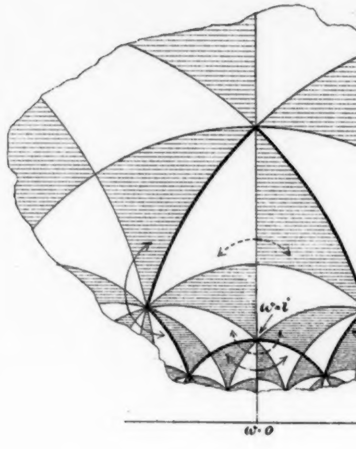


Fig.1.

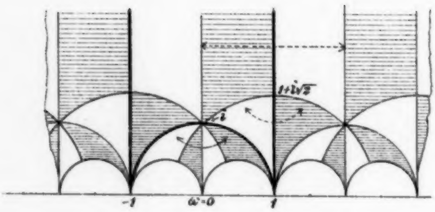
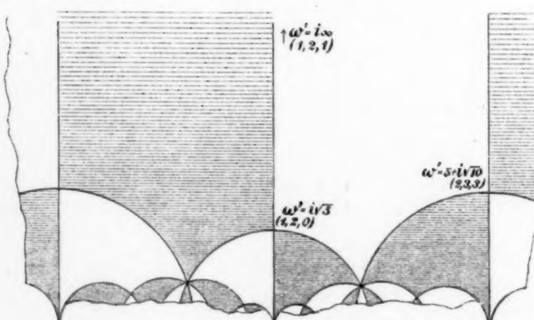


Fig. 3.



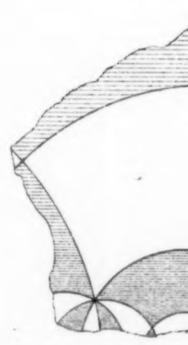


Fig. 2.

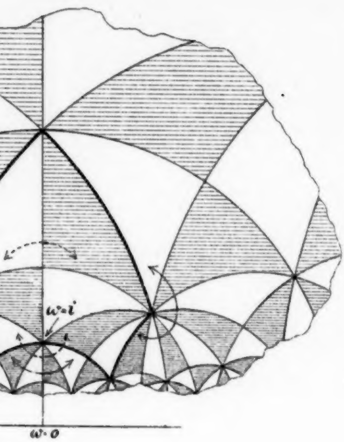


Fig. 5.

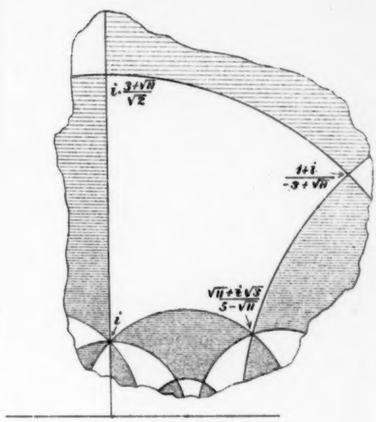
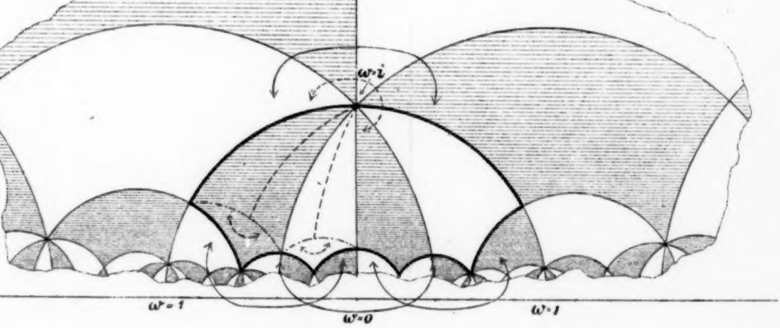


Fig. 4.



Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen.

Zweiter Theil.

Von

Heinrich Burkhardt in Göttingen.

Um die Stellung der folgenden Entwicklungen gegenüber denen des ersten Theils*) zu präcisiren, knüpfen wir an die Schlussbemerkungen desselben an. In denselben ist darauf hingewiesen, dass dort eine wesentliche Eigenschaft der Multiplicatorgleichung unberücksichtigt geblieben ist: die Eigenschaft, dass *die Quadratwurzeln aus ihren Wurzeln sich homogen und linear aus nur* $\frac{n^2+1}{2}$ *Grössen mit Hilfe von numerischen Coefficienten zusammensetzen lassen.* Solche Ausdrücke hat Herr Wiltheiss**) vermittelst gewisser Functionen, die er mit $\varphi(h_1, h_2)$ bezeichnet, für *die transformirten Thetafunctionen selbst* (nicht nur für ihre Nullwerthe) gegeben; diese Functionen $\varphi(h_1, h_2)$ sind denjenigen nachgebildet, welche seit Jacobi in der Theorie der elliptischen Functionen zu entsprechendem Zweck benutzt zu werden pflegen. Nun hat Herr F. Klein***) aus den letzteren

---

*) Der in Bd. 36 dieser Ann. p. 371 ff. erschienene *erste Theil* dieser Untersuchungen soll im folgenden kurz mit I citirt werden, die „*Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung, nach Vorlesungen von F. Klein*" (diese Ann. Bd. 35, p. 198 ff.) wie in I mit Grundz. — Eine ungenaue Literaturangabe in I (p. 421, Fussnote) sei hier richtig gestellt: der Satz, um welchen es sich dort handelt, ist von Herrn Krause bereits in Bd. 20 dieser Ann. p. 58 (1882) bestimmt ausgesprochen worden.

**) *Zur Theorie der Transformation hyperelliptischer Functionen zweier Argumente*, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 96, p. 17 ff. (1883). Vgl. dort auch p. 27 die Notiz über nicht veröffentlichte Untersuchungen des Herrn Kronecker.

***) Vgl. die zusammenfassende Darstellung im 13. Bd. der Abhandl. der math.-phys. Cl. der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften: *Ueber die elliptischen Normalcurven der* N^{ten} *Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der* N^{ten} *Stufe*, (1885), sowie die dort citirten älteren Arbeiten desselben.

durch Zufügung bestimmter Factoren andere Functionen X_α gewonnen, welche in mancher Beziehung sich einfacher erweisen. Nämlich bei linearer Transformation der Perioden erfahren die Functionen, um welche es sich handelt, selbst lineare homogene Substitutionen; die X_α sind dadurch ausgezeichnet, dass bei ihnen die Coefficienten dieser Substitutionen *rein numerisch* sind. Herr Klein hat dann weiter in seinen Vorlesungen angedeutet, wie die Ueberlegungen, welche zu den elliptischen X_α hingeleitet hatten, sich auf den hyperelliptischen Fall übertragen lassen und dort zu analogen Functionen $X_{\alpha\beta}$ führen. Näher ausgeführt wurde diese Untersuchung in zwei Arbeiten des Herrn Witting,*) welche jedoch von einzelnen Unrichtigkeiten nicht frei sind und auch abgesehen davon mehrfach Vereinfachungen und Ergänzungen zulassen. Es sei daher gestattet, die Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ hier nochmals im Zusammenhange darzustellen. (Damit treten wir allerdings über den Rahmen der Ueberschrift hinaus in das Gebiet der „eigentlichen"**) hyperelliptischen Functionen; indessen möge der einmal gewählte Titel beibehalten werden). Aus den $X_{\alpha\beta}$ werden dann andere Functionen $Y_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$ erhalten,***) von welchen die einen wie die anderen bei linearer Periodentransformation sich nur unter sich linear substituiren. Die Gruppe der linearen Substitutionen der $Z_{\alpha\beta}$ für $n = 3$ ist von den Herren Witting†) und Maschke††) nach verschiedenen Richtungen hin eingehend untersucht worden; für die der $Y_{\alpha\beta}$ (ebenfalls für $n = 3$) soll das Gleiche in der vorliegenden Arbeit geschehen. Es führt diese Untersuchung auf ein auch algebraisch interessantes Gleichungssystem, von welchem die im I. Theil untersuchte Multiplicatorgleichung als Resolvente eines Specialfalls betrachtet werden kann.

Demzufolge gliedert sich der vorliegende Theil dieser Untersuchungen wie folgt: die allgemeine Theorie der $X_{\alpha\beta}$ füllt den VIII. Abschnitt aus; der IX. handelt in geometrischer (wenn man will hypergeometrischer) Betrachtungsweise von der quinären Gruppe linearer Substitutionen, nach welcher sich die $Y_{\alpha\beta}$ im Falle $n = 3$ umsetzen, sowie von der durch diese Gruppe bestimmten Configuration von 45

---

*) *Ueber Jacobi'sche Functionen k^{ter} Ordnung zweier Variabler*, diese Ann. Bd. 29, p. 157 ff. (1886). — *Ueber eine der Hesse'schen Configuration der ebenen Curve dritter Ordnung analoge Configuration im Raume, auf welche die Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen ($p = 2$) führt.* Göttinger Diss. (Dresden 1887).

**) Grundz. § 15 a. E.

***) Witting, diese Ann. Bd. 29, p. 167. Diss. p. 16.

†) In der Diss.

††) *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen*, diese Ann. Bd. 33, p. 317 ff.; vgl. auch den Auszug in den Göttinger Nachrichten v. J. 1888, p. 78 ff.

Punkten und 45 Räumen im vierdimensionalen Gebiet; der X. von den Invarianten dieser Gruppe; der XI. von dem „Problem der Y" und von Resolventen desselben; der XII. Abschnitt endlich enthält die Anwendung der Resultate auf die Multiplicatorgleichung und kehrt damit in das Gebiet der Modulfunctionen zurück. Nur dieser letzte Abschnitt setzt die Kenntniss des I. Theils dieser Untersuchungen voraus; in den übrigen wird nur an ganz wenigen Stellen auf Resultate desselben Bezug genommen.

Dass die leitenden Ideen der Entwicklung aus den Veröffentlichungen des Herrn F. Klein stammen, wird einem mit der Literatur vertrauten Leser nicht entgehen und soll ausserdem an geeigneten Stellen durch Citate nachgewiesen werden; dass der Verf. Herrn Klein auch darüber hinaus für manchen Wink zu Dank verpflichtet ist, sei an dieser Stelle ausdrücklich beigefügt.

Ein Auszug aus der vorliegenden Abhandlung ist in Nr. 10 der Göttinger Nachrichten v. J. 1890 erschienen u. d. T.: *„Zur Theorie der Jacobi'schen Gleichungen* 40. *Grades, welche bei der Transformation* 3. *Ordnung der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen auftreten."*

VIII. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der hyperelliptischen $X_{\alpha\beta}$ für $p=2$.

§ 30.

Jacobi'sche Functionen von zwei Variabeln.*)

Als *Jacobi'sche Functionen von zwei Variabeln* bezeichnen wir, wie es bereits vielfach geschieht, *jede ganze transcendente Function* Θ *der beiden Argumente* u_1, u_2, *welche bei Vermehrung derselben um gewisse Grössen* ω (*„Perioden I. Art"*) *den Functionalgleichungen genügt:*

$$(1)\quad \Theta(u_1+\omega_{1i},\, u_2+\omega_{2i}) = e^{a_{1i}u_1+a_{2i}u_2+b_{2i}}\,.\,\Theta(u_1, u_2),\quad (i=1,2,3,4)$$

*) In diesem und den nächstfolgenden Paragraphen schliesst sich die Darstellung eng an einerseits an die von Herrn Hurwitz in Bd. 27 dieser Ann. p. 185 ff. (1885) für den elliptischen Fall gegebene Entwicklung (*Ueber endliche Gruppen linearer Substitutionen, welche in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten*), andererseits an die allgemeine Theorie des Herrn Frobenius (*Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobi'schen Functionen*, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 97, p. 16 ff., p. 188 ff., 1883/4). Dass ich, statt einfach auf beide Arbeiten zu verweisen, die Sache gerade für unseren Fall $p=2$ und unter angemessener Beschränkung der Voraussetzungen nochmals darstelle, ist vielleicht manchem Leser nicht unwillkommen. — Uebrigens vgl. man auch die Abhandlung des Herrn Appell: *Sur les fonctions quadruplement périodiques de troisième espèce* (Annales de l'école normale, sér. 3, t. 7, 1890).

in welchen die a, b von den u unabhängige Grössen bedeuten. Zwei Jacobi'sche Functionen, in welchen dieselben einzeln übereinstimmen, nennen wir *gleichändrig.* *)

Dass in dieser Definition die ω, a, b nicht ganz willkürlich angenommen werden dürfen, lehrt folgende Ueberlegung: Man bilde $\Theta(u_1 + \omega_{1i} + \omega_{1k}, u_2 + \omega_{2i} + \omega_{2k})$ auf zwei verschiedene Arten, indem man einmal zuerst ω_{1i}, ω_{2i}, dann ω_{1k}, ω_{2k} zufügt, das anderemal in umgekehrter Reihenfolge verfährt; durch Vergleichung der beiden so entstehenden Formeln erhält man als erstes Resultat, dass die sechs Ausdrücke:

$$n_{ik} = \frac{1}{2\pi i}(a_{1i}\omega_{1k} + a_{2i}\omega_{2k} - a_{1k}\omega_{1i} - a_{2k}\omega_{2i}) \tag{2}$$

ganze Zahlen sein müssen. Ferner multiplicire man, unter $(i\,k\,l\,m)$ eine gerade Permutation der Zahlen (1 2 3 4) verstanden, jeden der sechs Ausdrücke (2) mit der entsprechenden Determinante:

$$p_{lm} = \omega_{1l}\omega_{2m} - \omega_{2l}\omega_{1m} \tag{3}$$

und addire die 6 Producte; in der Summe werden die Coefficienten der einzelnen a zu Null und es folgt: *die ω müssen die Relation:*

$$n_{12}p_{34} + n_{13}p_{42} + n_{14}p_{23} + n_{23}p_{14} + n_{34}p_{12} + n_{42}p_{13} = 0 \tag{4}$$

befriedigen, wenn eine Function der verlangten Art existiren soll. Werden statt der ω geeignete lineare Combinationen derselben eingeführt, so kann die in (4) auf der linken Seite stehende bilineare Form durch eine reducirte Form ersetzt werden. Für unsere Zwecke genügt es, anzunehmen, diese reducirte Form sei:**)

$$n(p_{13} + p_{24}). \tag{5}$$

Auf diese Form wird man sogleich geführt, wenn man voraussetzt (was wir später ja doch thun müssen), dass u_1, u_2 *zwei linear unabhängige Integrale I. Gattung auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 2 und die ω kanonische***) Perioden derselben seien.* Denn alsdann hat die zwischen den ω bestehende Bilinearrelation die Form:

$$p_{13} + p_{24} = 0; \tag{6}$$

die in (2), (4) auftretenden ganzen Zahlen haben also in diesem Falle die Werthe:

$$n_{12} = n_{14} = n_{23} = n_{34} = 0, \quad n_{13} = n_{24}. \tag{7}$$

An der hiermit bezeichneten Voraussetzung soll im folgenden festgehalten werden. Den gemeinsamen Werth der beiden letzten Zahlen (7)

*) Frobenius, a. a. O. p. 39.

**) Der allgemeine Fall wird von Frobenius a. a. O. weiter verfolgt.

***) Grundz. § 2.

bezeichnen wir mit n und nennen ihn*) die *Ordnung* der betrachteten Jacobi'schen Function.

Durch Multiplication mit einem Exponentialfactor der Form:

$$e^{M_{11}u_1^2+2M_{12}u_1u_2+M_{22}u_2^2+N_1u_1+N_2u_2} \tag{8}$$

(einer Jacobi'schen Function nullter Ordnung) gehen die zu einem bestimmten System der Grössen a, b gehörenden Jacobi'schen Functionen in andere über, welche zu andern Werthen a', b' dieser Grössen gehören; die letzteren bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a'_{1i} &= 2M_{11}\omega_{1i} + 2M_{12}\omega_{2i} + a_{1i}, \\ a'_{2i} &= 2M_{12}\omega_{1i} + 2M_{22}\omega_{2i} + a_{2i}, \qquad (i=1,2,3,4) \\ b'_i &= M_{11}\omega_{1i}^2 + 2M_{12}\omega_{1i}\omega_{2i} + M_{22}\omega_{2i}^2 + N_1\omega_{1i} + N_2\omega_{2i} + b_i. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus diesen folgt zunächst, dass *die neuen Functionen von derselben Ordnung wie die ursprünglichen sind*; ferner aber der Satz:

Durch geeignete Wahl der M kann man von jedem den Bedingungen (2), (7) *genügenden Werthsysteme der a zu jedem andern gelangen, welches denselben Bedingungen für den gleichen Werth von n genügt; ist das geschehen, so kann man noch durch geeignete Wahl der N und Modification der u um additive Constante den b beliebige Werthe verschaffen.*

§ 31.

Der Hermite'sche Satz.

Das Fundament aller unserer weiteren Entwickelungen bildet der sogenannte Hermite'sche Satz,**) welcher folgendermassen lautet:

Alle gleichändrigen Jacobi'schen Functionen n^{ter} Ordnung setzen sich aus n^2 linear unabhängigen unter ihnen linear und homogen mit von den u unabhängigen Coefficienten zusammen.

Zum Beweise desselben führen wir statt der u „*Normalintegrale****) v“ ein, für welche:

$$\begin{aligned} &\omega_{11} = 1, \quad \omega_{12} = \omega_{21} = 0, \quad \omega_{22} = 1, \\ &\omega_{13} = \tau_{11}, \quad \omega_{14} = \omega_{23} = \tau_{12}, \quad \omega_{24} = \tau_{22} \end{aligned} \tag{1}$$

ist; ferner machen wir von dem letzten Satz des § 31 in der Weise Gebrauch, dass wir dafür sorgen, dass:

$$\begin{aligned} &a'_{11} = a'_{12} = a'_{21} = a'_{22} = b'_1 = b'_2 = 0, \\ &b'_3 = -n\pi i\tau_{11}, \quad b'_4 = -n\pi i\tau_{22} \end{aligned} \tag{2}$$

---

*) Uebereinstimmend mit Witting (der nur k statt n schreibt), aber abweichend von Frobenius, der das Quadrat der im Text n genannten Zahl als Ordnung einer solchen Jacobi'schen Function bezeichnet.

**) *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes*, n° X (Comptes rendus de l'acad. des sciences, t. 40, 1855).

***) Grundz. § 3.

wird. Wegen der Relationen (2), (7) des § 31 muss dann auch

$$a'_{13} = a'_{24} = -2n\pi i, \quad a'_{23} = a'_{14} = 0 \tag{3}$$

geworden sein; die Functionalgleichungen, welchen die so gewonnene Function $\varphi(v_1, v_2)$ genügt, lauten also:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varphi(v_1+1, v_2) & = \varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1, v_2+1) & = \varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1+\tau_{11}, v_2+\tau_{12}) & = e^{-n\pi i(2v_1+\tau_{11})}\varphi(v_1, v_2), \\ \varphi(v_1+\tau_{12}, v_2+\tau_{22}) & = e^{-n\pi i(2v_2+\tau_{22})}\varphi(v_1, v_2), \end{array}\right. \tag{4}$$

Wir setzen ferner:

$$e^{2\pi i v_1} = z_1, \quad e^{2\pi i v_2} = z_2, \quad e^{\pi i \tau_{11}} = p, \quad e^{\pi i \tau_{12}} = q, \quad e^{\pi i \tau_{22}} = r; \tag{5}$$

dann geht $\varphi(v_1, v_2)$ über in eine Function $f(z_1, z_2)$, welche in Folge der beiden ersten Gleichungen (4) und der zu Anfang des § 30 gemachten Voraussetzungen in eine Reihe der Form:

$$f(z_1, z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{m_2} A_{m_1, m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2}. \tag{6}$$

entwickelt werden kann, und welche ferner in Folge der beiden letzten Gleichungen (4) den Functionalgleichungen genügt;

$$\begin{array}{l} f(p^2 z_1, q^2 z_2) = p^{-n} z_1^{-n} f(z_1, z_2), \\ f(q^2 z_1, r^2 z_2) = r^{-n} z_2^{-n} f(z_1, z_2). \end{array} \tag{7}$$

Diese geben für die Coefficienten der Entwicklung (6) die Recursionsformeln:

$$\begin{array}{l} A_{m_1+n, m_2} = p^{2m_1+n} q^{2m_2} A_{m_1, m_2}, \\ A_{m_1, m_2+n} = q^{2m_1} r^{2m_2+n} A_{m_1, m_2}; \end{array} \tag{8}$$

mit Hülfe derselben lassen sich alle A_{m_1, m_2} aus denjenigen n^2 unter ihnen bestimmen, in welchen jeder der beiden Indices eine Zahl der Reihe:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ist. *So erhält man für die allgemeinste den Bedingungen genügende Function φ den folgenden mit n^2 willkürlichen Constanten behafteten Ausdruck:*

$$\varphi(v_1, v_2) = \sum_{0}^{n-1}{}^{\alpha} \sum_{0}^{n-1}{}^{\beta} A_{\alpha\beta}\, \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2). \tag{9}$$

Die n^2 Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ sind dabei definirt durch die unendlichen Reihen:*)

*) Ueber die an und für sich noch willkürlich zu wählenden multiplicativen Constanten in der Definition der einzelnen $\varphi_{\alpha\beta}$ ist dabei in bestimmter Weise verfügt.

$$(10)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_1} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_{m_2}\, p^{\frac{(nm_1+\alpha)^2}{n}}\, q^{\frac{2(nm_1+\alpha)(nm_2+\beta)}{n}}\, r^{\frac{(nm_2+\beta)^2}{n}}\, z_1^{nm_1+\alpha}\, z_2^{nm_2+\beta} = \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2);$$

sie lassen sich also, wie folgt, durch Thetafunctionen ausdrücken:

$$(11)\qquad \varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2)$$

$$= p^{\frac{\alpha^2}{n}}\, q^{\frac{2\alpha\beta}{n}}\, r^{\frac{\beta^2}{n}}\, z_1^{\alpha} z_2^{\beta}\, \vartheta(nv_1+\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\ nv_2+\alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\ n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22}).$$ *)

Uebrigens convergiren die Reihen (10), sobald die τ den bekannten Ungleichheitsbedingungen genügen; und jede in der Form (9) enthaltene Function besitzt wirklich die verlangten Eigenschaften. Ferner geht aus der Form der Reihen (10) unmittelbar hervor, dass *zwischen ihnen keine lineare Relation mit von den u unabhängigen Coefficienten bestehen kann.*

Nachdem uns die speciellen Functionen φ soweit geführt haben, kehren wir wieder zu den ursprünglichen Variabeln und Functionen zurück, indem wir die zu Anfang des Paragraphen vorgenommenen Veränderungen rückgängig machen; dann erhalten wir den *Hermite'schen Satz* in der an die Spitze gestellten Form. Uebrigens haben uns unsere Ueberlegungen auf ein ganz bestimmtes**) Fundamentalsystem linear unabhängiger Jacobi'scher Functionen n^{ter} Ordnung geführt; mit der Discussion desselben müssen wir uns nunmehr beschäftigen.

§ 32.

Vorläufige Definition der $X_{\alpha\beta}$.

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen n^2 Functionen $\varphi_{\alpha\beta}$ sind für manche Zwecke bereits vollständig ausreichend; für andere aber wird es zweckmässig sein, sie noch durch Zufügung eines Exponentialfactors von der in § 30, 8 angegebenen Form zu modificiren. Im elliptischen Fall ist***) die Wahl dieses Factors durch die Forderung begründet worden, dass in dem zu betrachtenden Systeme Jacobi'scher Functionen auch eine solche *„der ersten Stufe"* vorkommen solle. Eine genau analoge Forderung kann in unserem hyperelliptischen Falle nicht gestellt werden, weil hier nicht für jede Ordnungszahl Jacobi'sche Functionen I. Stufe existiren. Somit werden wir wieder darauf hingewiesen, Anschluss an die Functionen zweiter Stufe zu suchen.

---

*) Vgl. Witting, Diss. p. 14. — Die Bezeichnung $\varphi_{\alpha\beta}$ läuft dem $X_{\alpha\beta}$ bei Witting parallel; bei Fortbildung der in den citirten Arbeiten von Klein und Hurwitz für den elliptischen Fall benutzten Bezeichnung müsste man die Function (11) $\varphi_{-\alpha\,-\beta}$ nennen.

**) Bis auf die in der Fussn. p. 166 erwähnten constanten Factoren.

***) Hurwitz, diese Ann. Bd. 27, p. 187 (1886).

Es bedingt dies, dass von nun an die Fälle eines geraden und eines ungeraden n verschiedenen Charakter zeigen; indem wir den ersteren ganz bei Seite lassen, beschränken wir uns im folgenden durchweg auf den Fall, dass n *eine ungerade Zahl ist.*

Wir fragen also zunächst nach Jacobi'schen Functionen zweiter Stufe. Solche sind die 16 Sigmafunctionen;*) und zwar sind sie im Sinne der § 30 benutzten Definition Jacobi'sche Functionen *erster* Ordnung. In der That, die Sigmafunction mit der Charakteristik

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}$$

genügt den Functionalgleichungen:

$$(2) \quad \sigma(u_1+\omega_{1i},\, u_2+\omega_{2i}) = (-1)^{g_i} e^{\eta_{1i}\left(u_1+\frac{1}{2}\omega_{1i}\right)+\eta_{2i}\left(u_2+\frac{1}{2}\omega_{2i}\right)} \sigma(u_1, u_2);$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

und die „Perioden II. Gattung" η, welche hier in der Rolle der a des § 30 auftreten, erfüllen die bekannten Bilinearrelationen von der Form der Relationen (2), (7) des § 30 mit $n = 1$. *Die n^{ten} Potenzen der Sigmafunctionen sind dann Jacobi'sche Functionen zweiter Stufe und n^{ter} Ordnung;* sie genügen den Functionalgleichungen:

$$(3) \quad f(u_1+\omega_{1i},\, u_2+\omega_{2i}) = (-1)^{g_i} e^{n\eta_{1i}\left(u_1+\frac{1}{2}\omega_{1i}\right)+n\eta_{2i}\left(u_2+\frac{1}{2}\omega_{2i}\right)} f(u_1, u_2).$$
$$(i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Forderung nun, welche wir an den zu Eingang dieses Paragraphen erwähnten Exponentialfactor**) stellen wollen, ist die folgende: *die durch Zufügung desselben aus den $\varphi_{\alpha\beta}$ erhaltenen Functionen — die $X_{\alpha\beta}$ — sollen mit einem bestimmten $\sigma^n(u_1\, u_2)$ gleichändrig sein,* also der Functionalgleichung (3) genügen. Wir wollen solche mit dem σ^n einer bestimmten Charakteristik (1) gleichändrige Functionen kurz *als Jacobi'sche Functionen n^{ter} Ordnung von der Charakteristik* (1) bezeichnen.

Statt nun solche Functionen aus den $\varphi_{\alpha\beta}$ des § 31 durch Zufügung eines Exponentialfactors abzuleiten, können wir sie auch auf folgende Weise gewinnen: Zufolge der in § 31, 11 gegebenen analytischen Darstellung der $\varphi_{\alpha\beta}$ ist:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}\left(v_1+\frac{1}{n},\, v_2\right) &= \varepsilon^{\alpha}\varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2), \\ \varphi_{\alpha\beta}\left(v_1,\, v_2+\frac{1}{n}\right) &= \varepsilon^{\beta}\varphi_{\alpha\beta}(v_1, v_2); \end{aligned}$$

*) Klein, diese Ann, Bd. 27, p. 435, 442 (1886).

**) Streng genommen müsste hier ausser von der Zufügung eines Exponentialfactors auch noch von Vermehrung der Argumente um additive Constante die Rede sein; es wird sich aber zeigen, dass dies letztere nicht erforderlich ist.

unter ε ist dabei hier wie im Folgenden stets die **bestimmte** *n^{te} Einheitswurzel:*

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}} \tag{5}$$

verstanden. Hieraus und aus den beiden letzten Gleichungen (4) des § 31 ergiebt sich, dass $\varphi_{\alpha\beta}$ und demzufolge auch $X_{\alpha\beta}$ eine zu dem Periodensystem:

$$\overline{\omega}_{ik} = \frac{1}{n_k}\,\omega_{ik}, \quad (n_1 = n_2 = n, \;\; n_3 = n_4 = 1), \tag{6}$$

gehörende Jacobi'sche Function *erster* Ordnung ist. Sie kann sich also von der zu denselben Perioden gehörenden Sigmafunction*) nur durch einen Exponentialfactor der mehrerwähnten Art und durch, zu den Argumenten tretende, additive Constante unterscheiden. M. a. W. wir dürfen ansetzen:

$$\begin{aligned} C \cdot e^{M_{11}u_1^2 + 2M_{12}u_1u_2 + M_{22}u_2^2 + N_1u_1 + N_2u_2}\, \sigma(u_1 + k_1,\; u_2 + k_2;\; \overline{\omega}_{ik}) \\ = X_{\alpha\beta}(u_1, u_2;\; \omega_{ik}), \end{aligned} \tag{7}$$

und haben dann nur mehr die M, N, k in geeigneter Weise als Functionen der Perioden zu bestimmen, damit $X_{\alpha\beta}$ die Functionalgleichungen (3) befriedigt.

Wir werden die dabei sich ergebenden Resultate übersichtlicher darstellen können, wenn wir, analog wie es von Herrn Klein**) für den elliptischen Fall geschehen, *Sigmafunctionen mit Indices* einführen. Wir wollen nämlich setzen:

$$\sigma_{h_1h_2h_3h_4}(u_1, u_2) = e^{-\eta_1\left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_2\left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)}\, \sigma(u_1 + \omega_1,\; u_2 + \omega_2), \tag{8}$$

indem wir abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_i \text{ für } h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2} + h_3\omega_{i3} + h_4\omega_{i4} \\ \text{und ebenso: } &\eta_i \text{ für } h_1\eta_{i1} + h_2\eta_{i2} + h_3\eta_{i3} + h_4\eta_{i4} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2) \tag{9}$$

schreiben; Perioden und Charakteristik sind dabei in die Bezeichnung nicht mit aufgenommen, können aber, wo erforderlich, beigefügt werden.

Nach dieser Vorbemerkung kehren wir zurück zu Gleichung (7). Soll $X_{\alpha\beta}$ eine mit $\sigma^n(u_1, u_2;\; \omega_{ik})$ gleichändrige Function werden, so müssen zunächst die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} M_{11}\omega_{1i} + M_{12}\omega_{2i} &= \frac{1}{2}\,(n\eta_{1i} - n_i\overline{\eta}_{1i}) \\ M_{12}\omega_{1i} + M_{22}\omega_{2i} &= \frac{1}{2}\,(n\eta_{2i} - n_i\overline{\eta}_{2i}) \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

---

*) Die Erwähnung der Charakteristik kann hier wegbleiben, wie leicht zu sehen.

**) Abh. der sächsischen Gesellsch. der Wissenschaften (math. phys. Cl. Bd. VIII, p. 345). — Wegen der abweichenden Vorzeichen vgl Fussn. p. 167.

in welchen mit $\bar{\eta}$ die zu den $\bar{\omega}$ gehörenden Perioden II. Gattung bezeichnet sind. Aus ihnen folgen für die M die Werthe: *)

$$(11)\quad\begin{cases} M_{11} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[\;\;n(\eta_{1i}\omega_{2k}-\eta_{1k}\omega_{2i}) - n_i n_k(\bar{\eta}_{1i}\bar{\omega}_{2k}-\bar{\eta}_{1k}\bar{\omega}_{2i})\right] \\ M_{12} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[-n(\eta_{1i}\omega_{1k}-\eta_{1k}\omega_{1i}) + n_i n_k(\bar{\eta}_{1i}\bar{\omega}_{1k}-\bar{\eta}_{1k}\bar{\omega}_{1i})\right] \\ \quad\;\; = \frac{1}{2p_{ik}}\left[\;\;n(\eta_{2i}\omega_{2k}-\eta_{2k}\omega_{2i}) - n_i n_k(\bar{\eta}_{2i}\bar{\omega}_{2k}-\bar{\eta}_{2k}\bar{\omega}_{2i})\right] \\ M_{22} = \frac{1}{2p_{ik}}\left[-n(\eta_{2i}\omega_{1k}-\eta_{2k}\omega_{1i}) + n_i n_k(\bar{\eta}_{2i}\bar{\omega}_{1k}-\bar{\eta}_{2k}\bar{\omega}_{1i})\right]. \end{cases}$$

Die mit diesen M als Coefficienten gebildete ganze Function zweiten Grades:

$$(12)\qquad G_2^{(n)}(u_1, u_2) = M_{11}u_1^2 + 2M_{12}u_1u_2 + M_{22}u_2^2$$

lässt sich ausdrücken durch diejenige, welche in der den Uebergang von den Sigma zu den Theta vermittelnden Gleichung: **)

$$(13)\qquad \vartheta(v_i;\tau_{ik}) = c\sqrt{p_{12}}\,\sqrt[4]{D}\,e^{G_2(u_i;\,\omega_{ik})}\,\sigma(u_i;\omega_{ik})$$

im Exponenten auftritt; es ist nämlich:

$$(14)\qquad G_2^{(n)}(u_1, u_2) = -\,nG_2(u_i;\omega_{ik}) + G_2(u_i;\bar{\omega}_{ik}).$$

Mit Hilfe der angegebenen Werthe der M reduciren sich ferner die noch übrigen Bedingungsgleichungen auf:

$$(15)\quad N_1\bar{\omega}_{1i} + N_2\bar{\omega}_{2i} - k_1\bar{\eta}_{1i} - k_2\bar{\eta}_{2i} = \frac{2l_i\pi\sqrt{-1}}{n_i}\qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

unter den l_i sind dabei beliebige ganze Zahlen zu verstehen. Die Auflösung dieser Gleichungen geschieht leicht mit Hilfe der Bilinearrelationen und führt zu folgenden Werthen der Constanten N und k:

$$(16)\quad\begin{cases} N_1 = -\frac{1}{n}(l_1\bar{\eta}_{13} + l_2\bar{\eta}_{14}) + l_3\bar{\eta}_{11} + l_4\bar{\eta}_{12}, \\ N_2 = -\frac{1}{n}(l_1\bar{\eta}_{23} + l_2\bar{\eta}_{24}) + l_3\bar{\eta}_{21} + l_4\bar{\eta}_{22}; \\ k_1 = \frac{1}{n}(l_1\bar{\omega}_{13} + l_2\bar{\omega}_{14}) - l_3\bar{\omega}_{11} - l_4\bar{\omega}_{12}, \\ k_2 = \frac{1}{n}(l_1\bar{\omega}_{23} + l_2\bar{\omega}_{24}) - l_3\bar{\omega}_{21} - l_4\bar{\omega}_{22}. \end{cases}$$

Setzen wir die gefundenen Werthe der M, N, k in (7) ein und berücksichtigen dabei die in (8) enthaltene Definition der Sigma-

---

*) Die Gleichheit der beiden für M_{12} angegebenen Werthe, sowie die Unabhängigkeit der M von den Indices i, k ist eine Folge der Bilinearrelationen; vgl. die von Glchg. (19) zu (23) führende Rechnung.

**) Klein, diese Ann. Bd. 32, p. 359.

functionen mit Indices, so erhalten wir den folgenden Ausdruck für unsere Functionen:

$$C \cdot e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \sigma_{l_3 l_4 \frac{l_1}{n} \frac{l_2}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik});$$

statt dessen kann, da die Vermehrung der Indices um ganze Zahlen nur eine Aenderung der Constante C mit sich bringt, der folgende einfachere gesetzt werden:

$$C e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \cdot \sigma_{0 0 \frac{l_1}{n} \frac{l_2}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}).$$

Nunmehr suchen wir den Anschluss an die Resultate des vorigen Paragraphen; wir schreiben α, β statt l_1, l_2 und erhalten so folgende *vorläufige Definition der* $X_{\alpha\beta}$:

$$(17) \qquad X_{\alpha\beta}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}) = C_{\alpha\beta} e^{G_2^{(n)}(u_1, u_2)} \sigma_{0 0 \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n}}(u_1, u_2; \overline{\omega}_{ik}).$$

Die $C_{\alpha\beta}$ bedeuten dabei vorläufig noch ganz willkürliche Modulfunctionen, über die wir erst später (§ 33, Glchg. (3); § 34, Glchg. (13)) geeignete Festsetzung treffen wollen; die Charakteristik des $X_{\alpha\beta}$ ist dieselbe wie die des rechts auftretenden σ.

In diese Definition des $X_{\alpha\beta}$ führen wir nun Thetafunctionen ein. Wir haben zunächst:

$$(18) \qquad \sigma_{0 0 \frac{\alpha}{n} \frac{\beta}{n}}(u_i; \omega_{ik}) =$$

$$\frac{1}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}} e^{-G_2(u_i+\omega_i;\, \omega_{ik}) - \eta_1\left(u_1+\frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_2\left(u_2+\frac{\omega_2}{2}\right)} \vartheta\left(v_i + \frac{\alpha\tau_{i1}+\beta\tau_{i2}}{n};\, \tau_{ik}\right).$$

Der Exponent kann noch zusammengezogen werden; es ist nämlich:

$$(19) \qquad G_2(u_i + \omega_i) = G_2(u_i) + \left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right)\left(\frac{\partial G_2}{\partial u_1}\right)_{u_i = \omega_i} + \left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)\left(\frac{\partial G_2}{\partial u_2}\right)_{u_i = \omega_i},$$

ferner:

$$(20) \qquad \frac{\partial G_2}{\partial u_i} = -\eta_{i1} v_1 - \eta_{i2} v_2,$$

also:

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial G_2}{\partial u_i}\right)_{u_i = \omega_i} = -\frac{1}{n}\left[\eta_{i1}(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12}) + \eta_{i2}(\alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22})\right].$$

Damit wird der Exponent von e in (18):

$$-G_2(u_i) + \frac{1}{n}\left(u_1 + \frac{\omega_1}{2}\right)\left[\alpha(\tau_{11}\eta_{11} + \tau_{12}\eta_{12} - \eta_{13}) + \beta(\tau_{12}\eta_{11} + \tau_{22}\eta_{12} - \eta_{14})\right]$$
$$+ \frac{1}{n}\left(u_2 + \frac{\omega_2}{2}\right)\left[\alpha(\tau_{11}\eta_{21} + \tau_{22}\eta_{22} - \eta_{23}) + \beta(\tau_{12}\eta_{21} + \tau_{22}\eta_{22} - \eta_{24})\right].$$

Zur weiteren Umformung desselben benutzen wir wieder die Bilinearrelationen; aus ihnen folgt:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{11}\eta_{11} + \tau_{12}\eta_{12} - \eta_{13} = \\
(22)\quad &\frac{1}{p_{12}}\left[\omega_{22}(\omega_{13}\eta_{11}+\omega_{14}\eta_{12}-\omega_{11}\eta_{13}) - \omega_{12}(\omega_{23}\eta_{11}+\omega_{24}\eta_{12}-\omega_{21}\eta_{13})\right] \\
&= 2\pi i\,\frac{\omega_{22}}{p_{12}}
\end{aligned}
$$

und 3 analoge Ausdrücke, sodass der Exponent übergeht in:

$$
\begin{aligned}
&-G_2(u_i)+\frac{2\pi i}{np_{12}}\left[\left(u_1+\frac{\omega_1}{2}\right)(\alpha\omega_{22}-\beta\omega_{21})+\left(u_2+\frac{\omega_2}{2}\right)(-\alpha\omega_{12}+\beta\omega_{11})\right] \\
(23)\quad &= -G_2(u_i)+\frac{2\pi i}{n}\left[\alpha v_1+\beta v_2+\frac{1}{2n}(\alpha^2\tau_{11}+2\alpha\beta\tau_{12}+\beta^2\tau_{22})\right].
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir als den gesuchten *Ausdruck des $X_{\alpha\beta}$ durch eine Thetafunction* den folgenden:

$$
\begin{aligned}
(24)\quad X_{\alpha\beta}(u_i;\omega_{ik}) = &\frac{C_{\alpha\beta}}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}}\, e^{-nG_2(u_i;\,\omega_{ik})+2\pi i\left[\alpha v_1+\beta v_2+\frac{1}{2n}(\alpha^2\tau_{11}+2\alpha\beta\tau_{12}+\beta^2\tau_{22})\right]} \\
&\times\vartheta(nv_1+\alpha\tau_{11}+\beta\tau_{12},\, nv_2+\alpha\tau_{12}+\beta\tau_{22};\, n\tau_{11},\, n\tau_{12},\, n\tau_{22}).
\end{aligned}
$$

Vergleichen wir denselben mit Glchg. (11) des § 31, so erhalten wir $X_{\alpha\beta}$ durch das dort benutzte $\varphi_{\alpha\beta}$ ausgedrückt in der Form

$$
(25)\qquad X_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\beta}}{c\sqrt{p_{12}}\sqrt[8]{D}}\, e^{-nG_2(u_i;\,\omega_{ik})}\,\varphi_{\alpha\beta}.
$$

Endlich möge noch die folgende Formel notirt werden:

$$
\begin{aligned}
(26)\quad &\frac{X_{\alpha\beta}(u_i;\,\omega_{ik})}{\sigma^n(u_i;\,\omega_{ik})} = \\
&c^{n-1}C_{\alpha\beta}\,p_{12}^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[8]{\frac{D^n}{D}}\, e^{2\pi i\left[\alpha v_1+\frac{1}{2n}\alpha^2\tau_{11}+\cdots\right]}\,\frac{\vartheta(nv_i+\alpha\tau_{i1}+\beta\tau_{i2};\,\tau_{ik})}{\vartheta^n(v_i;\,\tau_{ik})};
\end{aligned}
$$

dieselbe stimmt im Wesentlichen überein mit derjenigen, welche Herr Witting (Diss. p. 12, 13) zum Ausgangspunkt seiner Entwicklungen genommen hat.

§ 33.

Eigenschaften der $X_{\alpha\beta}$.

Bevor wir die vollständige Bestimmung der Modulform $C_{\alpha\beta}$ vornehmen, wollen wir erst einige Eigenschaften der $X_{\alpha\beta}$ ableiten, welche von der Auswahl dieser Form unabhängig sind. Dabei werden in den Formeln die Elemente der Charakteristik (§ 32, 1) unserer Functionen fortwährend auftreten; wir wollen aber die Charakteristik selbst wie bisher unterdrücken.

I. Vermehren wir die Indices um Vielfache von n, so erhalten wir, (am einfachsten aus § 32, 17):

$$(1)\qquad X_{\alpha+an\ \beta+bn} = (-1)^{ag_3+bg_4}\frac{C_{\alpha+an\ \beta+bn}}{C_{\alpha\beta}}\,X_{\alpha\beta};$$

diese Gleichung reducirt sich auf:

$$(2)\qquad X_{\alpha+an\ \beta+bn} = X_{\alpha\beta},$$

wenn wir unter C eine von den Indices α,β unabhängige Modulfunction verstehen und:

$$(3)\qquad C_{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha+g_4\beta)}\cdot C$$

setzen. Das soll daher auch von jetzt an geschehen.

II. Für den Uebergang zu entgegengesetzten Werthen der u finden wir unter dieser Voraussetzung die Gleichung:

$$(4)\qquad X_{\alpha\beta}(-u_1,\ -u_2) = (-1)^{g_1g_3+g_2g_4}\,X_{n-\alpha\ n-\beta}(u_1, u_2).$$

III. Nunmehr wollen wir zusehen, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn wir ihre Argumente um Perioden-n^{tel} vermehren. Es wird dabei bequem sein, die erste und zweite Periode von der dritten und vierten getrennt zu behandeln und erst nachher die Resultate zusammenzufassen. Sei also *zunächst*

$$(5)\qquad \begin{aligned} \Omega_i' &= h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2},\\ \overline{\Omega}_i' &= h_1\overline{\omega}_{i1} + h_2\overline{\omega}_{i2} = \frac{1}{n}\,\Omega_i',\\ \mathsf{H}_i' &= h_1\eta_{i1} + h_2\eta_{i2},\\ \overline{\mathsf{H}}_i' &= h_1\overline{\eta}_{i1} + h_2\overline{\eta}_{i2}, \end{aligned}$$

so erhalten wir durch einfache Rechnung*) einerseits:

$$(6)\qquad \sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}\left(u_i + \frac{\Omega_i'}{n};\ \overline{\omega}_{ik}\right) =$$
$$= (-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta}\,e^{\Sigma\overline{\mathsf{H}}_i'\left(u_i+\frac{1}{2}\overline{\Omega}_i'\right)}\,\sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}(u_i;\ \overline{\omega}_{ik})$$

andererseits (vgl. § 32, Glchgn. (19)—(23)):

$$(7)\qquad G_2\left(u_i + \frac{\Omega_i'}{n};\ \omega_{ik}\right) - G_2(u_i;\ \omega_{ik}) = -\frac{1}{n}\,\Sigma\mathsf{H}_i'\left(u_i + \frac{1}{2n}\,\Omega_i'\right),$$

$$(8)\qquad G_2\left(u_i + \overline{\Omega}_i';\ \overline{\omega}_{ik}\right) - G_2(u_i;\ \omega_{ik}) = -\ \Sigma\overline{\mathsf{H}}_i'\left(u_i + \frac{1}{2}\,\overline{\Omega}_i'\right);$$

---

*) Bei derselben ist davon Gebrauch gemacht, dass aus den Bilinearrelationen zwischen den Perioden die Gleichung sich ergiebt:

$$\sum\left[\overline{\mathsf{H}}_i'\,(\alpha\,\overline{\omega}_{i3} + \beta\,\overline{\omega}_{i4}) - \overline{\Omega}_i'\,(\alpha\,\overline{\eta}_{i3} + \beta\,\overline{\eta}_{i4})\right] = 2\pi i\,(h_1\alpha + h_2\beta).$$

daraus folgt:

$$(9)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i'}{n}\right)=(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta}\,e^{\Sigma H_i'\left(u_i+\frac{1}{2}\Omega_i'\right)}\,X_{\alpha\beta}(u_i).$$

Sei *ferner:*

$$(10)\qquad \begin{array}{ll} \Omega_i''=h_3\omega_{i3}+h_4\omega_{i4}, & \bar{\Omega}_i''=h_3\bar{\omega}_{i3}+h_4\bar{\omega}_{i4}=\Omega_i'', \\ \mathrm{H}_i''=h_3\eta_{i3}+h_4\eta_{i4}, & \bar{\mathrm{H}}_i''=h_3\bar{\eta}_{i3}+h_4\bar{\eta}_{i4}, \end{array}$$

so haben wir einerseits:

$$(11)\qquad \sigma_{0\,0\,\frac{\alpha}{n}\,\frac{\beta}{n}}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n};\ \bar{\omega}_{ik}\right)=$$

$$=e^{\sum\frac{\bar{H}_i''}{n}\left(u_i+\frac{1}{2n}\bar{\Omega}_i''\right)}\,\sigma_{0,\,0,\,\frac{\alpha+h_3}{n},\,\frac{\beta+h_4}{n}}(u_i;\ \bar{\omega}_{ik}),$$

andererseits:

$$(12)\qquad G_2\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n};\ \omega_{ik}\right)-G_2(u_i;\ \omega_{ik})=-\sum\frac{\mathrm{H}_i''}{n}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n}\right)-$$

$$-\frac{i\pi}{n}(2h_3v_1+2h_4v_2+h_4^2\tau_{11}+2h_3h_4\tau_{12}+h_4^2\tau_{22}),$$

$$(13)\qquad G_2\left(u_i+\frac{\bar{\Omega}_i''}{n};\ \bar{\omega}_{ik}\right)-G_2(u_i;\ \omega_{ik})=-\sum\frac{\bar{\mathrm{H}}_i''}{n}\left(u_i+\frac{\bar{\Omega}_i''}{n}\right)-$$

$$-\frac{i\pi}{n}(2h_3nv_1+2h_4nv_2+h_3^2n\tau_{11}+2h_3h_4n\tau_{12}+h_4^2n\tau_{22});$$

daraus folgt:

$$(14)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i''}{n}\right)=e^{\Sigma H_i''\left(u_i+\frac{1}{2n}\Omega_i''\right)}\,X_{\alpha+h_3,\,\beta+h_4}(u_i)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3h_3+g_4h_4)}.$$

Um nun, wie oben in Aussicht genommen, die beiden Formeln (9) und (14) in eine zusammenzufassen, führen wir ein:

$$(15)\qquad \begin{cases} \Omega_i=\Omega_i'+\Omega_i''=h_1\omega_{i1}+h_2\omega_{i2}+h_3\omega_{i3}+h_4\omega_{i4}, \\ \mathrm{H}_i=\mathrm{H}_i'+\mathrm{H}_i''=h_1\eta_{i1}+h_2\eta_{i2}+h_3\eta_{i3}+h_4\eta_{i4}; \end{cases}$$

dann erhalten wir*):

$$(16)\qquad X_{\alpha\beta}\left(u_i+\frac{\Omega_i}{n}\right)=$$

$$(-1)^{g_1h_1+g_2h_2}\,\varepsilon^{h_1\alpha+h_2\beta+\frac{1}{2}(h_1h_3+h_2h_4)}\,e^{\Sigma H_i\left(u_i+\frac{1}{2n}\Omega_i\right)}\,X_{\alpha+h_3\,\beta+h_4}(u_i)\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3h_3+g_4h_4)}$$

$\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right.$ steht für $\left.e^{\frac{\pi i}{n}}\right)$. Bemerkenswerth an dieser Formel ist, dass *der Exponentialfactor e^{Σ} sich linearer Transformation der Perioden gegen-*

---

*) Wegen: $\mathrm{H}_1'\Omega_1''-\mathrm{H}_1''\Omega_1'+\mathrm{H}_2'\Omega_2''-\mathrm{H}_2''\Omega_2'=2\pi i(h_1h_3+h_2h_4)$.

über invariant verhält; dadurch wird später (§ 34) ihre Benutzung einfacher, als die der 4 besonderen Formeln, welche Herr Witting (Diss. p. 15) an ihrer Stelle benutzt.

IV. Endlich fragen wir noch, was aus den $X_{\alpha\beta}$ wird, wenn man ihre Argumente um $(2n)^{\text{te}}$ Theile der Perioden ω vermehrt. Dazu benutzen wir am bequemsten den § 32, Gl. (24) gegebenen Ausdruck der $X_{\alpha\beta}$ durch Thetafunctionen. Auch ohne die Rechnung im einzelnen durchzuführen, erkennt man, dass das Resultat folgendes sein wird: Sei der zuzufügende Periodenbruchtheil:

$$(17) \qquad \frac{\Omega_i}{2n} = \frac{h_1\omega_{i1} + h_2\omega_{i2} + nh_3\omega_{i3} + nh_4\omega_{i4}}{2n}$$

und sei eine neue Charakteristik:

$$(18) \qquad c' = \begin{vmatrix} g_1 + h_3 & g_2 + h_4 \\ g_3 + h_1 & g_4 + h_2 \end{vmatrix},$$

so kommt:

$$(19) \qquad X_{\alpha\beta}^{(c)}\left(u_i + \frac{\Omega_i}{2}\right) = \varrho \cdot \frac{C^{(c)}}{C^{(c')}} \cdot \sqrt[8]{\frac{D^{(c')}}{D^{(c)}}}\, e^{\Phi} \cdot X_{\alpha\beta}^{(c')}(u_i);$$

dabei bedeutet ϱ eine von den Indices α, β abhängige Einheitswurzel, Φ dagegen eine von ihnen unabhängige lineare Function der Argumente.

§ 34.

Lineare Transformation der $X_{\alpha\beta}$.

Nunmehr kommen wir zu derjenigen Frage, welche den Hauptgegenstand dieser Untersuchungen bildet: *wie verhalten sich die $X_{\alpha\beta}$ gegenüber linearer Transformation der Perioden?* Wir wollen zeigen, dass *sie dabei selbst lineare und homogene Substitutionen mit constanten Coefficienten erfahren**).

Wir führen statt der Perioden ω andere ω' ein, welche durch eine lineare Transformation S aus jenen hervorgehen. Mit diesen neuen Perioden bilden wir Functionen $X'_{\alpha\beta}$ ebenso, wie wir mit den ω die $X_{\alpha\beta}$ gebildet hatten; wir setzen also:

$$(1) \qquad X'^{(c)}_{\alpha\beta}(u) = X^{(c)}_{\alpha\beta}(u;\, \omega').$$

Dieses $X'^{(c)}_{\alpha\beta}$ ist aber eine Jacobi'sche Function, gleichändrig mit der n^{ten} Potenz desjenigen Sigma, aus dessen Primcharakteristik c' c durch S hervorgeht; nach dem Hermite'schen Satz (§ 31) muss es sich also durch die zu dieser Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ in der Form ausdrücken lassen:

*) Witting, diese Ann. Bd. 29, p. 163; Diss. p. 18 f.

$$(2)\qquad X'^{(c)}_{\alpha\beta}(u) = \sum_{\gamma=0}^{n-1}\sum_{\delta=0}^{n-1} c_{\alpha\beta\gamma\delta}\, X^{(c')}_{\gamma\delta}(u),$$

in welcher die $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ den u gegenüber Constante bedeuten (die aber ev. noch Modulfunctionen sein können); und das ist die Formel, deren Existenz wir behauptet hatten.

Die in ihr auftretenden Coefficienten $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ lassen sich sofort auf eine von ihnen, etwa c_{0000} zurückführen, wenn wir Glchg. (16) des vorigen Paragraphen heranziehen. Zu diesem Zweck vermehren wir die Argumente in (2) beiderseits um entsprechende Perioden-n^{tel}, etwa:

$$(3)\qquad \frac{\Omega_i}{n} = \frac{1}{n}(h_1'\,\omega_{i1}' + h_2'\,\omega_{i2}' + h_3'\,\omega_{i3}' + h_4'\,\omega_{i4}') =$$
$$\frac{1}{n}(h_1\,\omega_{i1} + h_2\,\omega_{i2} + h_3\,\omega_{i3} + h_4\,\omega_{i4});$$

die h und h' sind dabei durch die Gleichungen (31) bezw. (31a) der Grundz. miteinander verbunden. Wenden wir dann beiderseits die eben citirte Gleichung an, so fallen die Exponentialfactoren vermöge ihrer dort hervorgehobenen Invarianz heraus und es bleibt:

$$(4)\qquad (-1)^{g_1h_1'+g_2h_2'}\,\varepsilon^{h_1'\alpha+h_2'\beta+\frac{1}{2}(h_1'h_3'+h_2'h_4')}\,X'^{(c)}_{\alpha+h_3',\,\beta+h_4'} =$$
$$\sum_0^{n-1}{}_{\gamma}\sum_0^{n-1}{}_{\delta}(-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2}\,\varepsilon^{h_1\gamma+h_2\delta+\frac{1}{2}(h_1h_3+h_2h_4+g_3'h_3+g_4'h_4)}\,X^{(c')}_{\gamma+h_3,\,\delta+h_4};$$

vermöge der Definition der $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ muss also:

$$(5)\qquad c_{\alpha+h_3',\,\beta+h_4',\,\gamma+h_3,\,\delta+h_4} = (-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2-(g_1h_1'+g_2h_2')}\times$$
$$\varepsilon^{h_1\gamma+h_2\delta-(h_1'\alpha+h_2'\beta)+\frac{1}{2}[(h_1h_3+h_2h_4)-(h_1'h_3'+h_2'h_4')]}\,c_{\alpha\beta\gamma\delta}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3'h_3+g_4'h_4-g_3h_3'-g_4h_4')}$$

sein. Von dieser Formel bildet einen speciellen Fall die folgende:

$$(6)\qquad c_{h_3'h_4'h_3h_4} = (-1)^{g_1'h_1+g_2'h_2-(g_1h_1'+g_2h_2')}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}[h_1h_3+h_2h_4-(h_1'h_3'+h_2'h_4')]}\,c_{0000}\times$$
$$\varepsilon^{\frac{1}{2}(g_3'h_3+g_4'h_4-g_3h_3'-g_4h_4')};$$

diese reicht in allen Fällen aus, um sämmtliche c durch c_{0000} *auszudrücken.* Beim Beweis dieser Behauptung müssen wir 3 Fälle unterscheiden.

I. Die betrachtete Transformation S kann so beschaffen sein, dass sie gestattet den 4 Zahlen h_3, h_4, h_3', h_4' ganz beliebige Werthe mod. n beizulegen; das wird dann der Fall sein, wenn keine lineare ganzzahlige Verbindung von ω_{i1}' und ω_{i2}' allein einer solchen von ω_{i1} und ω_{i2} allein bis auf n-fache Perioden gleich ist. Alsdann werden *sämmtliche* $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ durch (6) gegeben; man hat nur:

$$\alpha = h_3', \quad \beta = h_4', \quad \gamma = h_3, \quad \delta = h_4$$

zu setzen und dazu h_1, h_2, h_1', h_2' aus den Transformationsformeln zu bestimmen, was in diesem Falle stets und nur auf eine Weise möglich ist.

II. Existirt aber *eine* (und *nur* eine) lineare ganzzahlige Verbindung von ω_{i1}' und ω_{i2}', welche bis auf n-fache Perioden einer solchen von ω_{i1} und ω_{i2} gleich ist*), so sind auch die Zahlen h_3, h_4, h_3', h_4' nicht ganz von einander unabhängig, sondern durch eine Relation der Form:

$$(8)\quad \begin{aligned} &a_4(h_3 - c_3h_3' - d_3h_4') - a_3(h_4 - c_4h_3' - d_4h_4') \equiv 0 \pmod{n} \\ \text{bezw.: } &b_4(h_3 - c_3h_3' - d_3h_4') - b_3(h_4 - c_4h_3' - d_4h_4') \equiv 0 \end{aligned}$$

verbunden. *Wir können also in diesem Fall aus* (6) *nur diejenigen c erhalten, deren Indices dieser Bedingung genügen.* Für diese erhalten wir dann allerdings nicht nur *ein* Werthsystem der h_1, h_2, h_1', h_2', sondern deren mehrere; aber eine einfache Rechnung zeigt, dass alle diese zu demselben Werth des betr. $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ führen.

Was aber die übrigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ betrifft, so soll gezeigt werden, dass diese alle $= 0$ zu setzen sind. Man kann nämlich in diesem Falle:

$$h_3 \equiv h_4 \equiv h_3' \equiv h_4' \equiv 0 \pmod{n}$$

setzen, ohne dass damit gleichzeitig auch h_1, h_2, h_1', h_2' durch n theilbar werden; man erhält so aus (5):

$$(9)\qquad c_{\alpha\beta\gamma\delta} = (-1)^{g_1h_1' + g_2h_2' - g_1'h_1 - g_2'h_2}\, \varepsilon^{h_1\gamma + h_2\delta - h_1'\alpha - h_2'\beta}\, c_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Diese Gleichung aber verlangt, dass $h_1\gamma + h_2\delta - h_1'\alpha - h_2'\beta$ oder, was dasselbe ist:

$$(10)\quad h_1(\gamma - c_3\alpha - d_3\beta) + h_2(\delta - c_4\alpha - d_4\beta) \equiv 0 \pmod{n}$$

sei, wenn nicht $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ aus ihr folgen soll. Nun sind aber hier h_1 und h_2 nur durch die *eine* Relation:

$$(11)\qquad a_3h_1 + a_4h_2 \equiv 0, \quad \text{bezw.} \quad b_3h_1 + b_4h_2 \equiv 0 \pmod{n}$$

verbunden; wir können also h_1, h_2 immer noch so annehmen, dass die Congruenz (10) *nicht* erfüllt ist, ausser wenn (10) und (11) identisch sind. Im letzteren Fall aber erfüllen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, für h_3', h_4', h_3, h_4 eingesetzt, die Congruenz (8) und das betr. $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ bestimmt sich aus (6). Alle anderen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sind also gleich Null zu setzen, wie behauptet war.

II. Sind endlich ω_{i1}', ω_{i2}' beide durch ω_{i1}, ω_{i2} bis auf n-fache Perioden ganzzahlig ausdrückbar, so findet man auf demselben Wege wie unter (II), dass nur diejenigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von Null verschieden sind, für welche:

$$(12)\qquad \left.\begin{aligned} \gamma &\equiv c_3\alpha + d_3\beta \\ \delta &\equiv c_4\alpha + d_4\beta \end{aligned}\right\} \pmod{n},$$

*) m. a. W. ist $a_3b_4 - a_4b_3 \equiv 0 \pmod{n}$.

dass aber diese wieder durch die Formel (6) aus c_{0000} erhalten werden können.

Zusammenfassend können wir sagen:

In jedem Falle sind alle diejenigen $c_{\alpha\beta\gamma\delta}$ gleich Null zu setzen, welche nicht durch die Formel (6) *erhalten werden können.*

Im Falle I. ist jedes $X'_{\alpha\beta}$ eine lineare Function der sämmtlichen $X_{\gamma\delta}$, im Falle II. von nur je n unter ihnen; im Falle III. ist jedes $X'_{\alpha\beta}$ nur durch einen constanten Factor von einem bestimmten $X_{\gamma\delta}$ verschieden.

Es bleibt noch übrig die Bestimmung von c_{0000}. Diese Grösse wird natürlich wesentlich davon abhängen, wie die in der Definition der $X_{\alpha\beta}$ noch unbestimmt gelassene Modulfunction C (§ 32, Glchg. (25), resp. § 33, Glchg. (3)) gewählt wird. Insbesondere wird man*) fragen, ob es nicht möglich ist, C so zu wählen, dass c_{0000} sich auf eine numerische Constante reducirt. Dass das für eine einzelne Transformation immer geschehen kann, sieht man sofort ein; dass es aber gleichzeitig für alle Transformationen erzielt werden kann, scheint a priori nicht leicht bewiesen werden zu können. Es soll daher hier einfach das Resultat angegeben werden, dass *die Reduction von c_{0000} auf eine Constante in der That eintritt für:*

$$C = \sqrt[8]{\frac{\overline{D}}{D^n}}; \tag{13}$$

dabei bedeutet (wie in I, § 21 ff.) D das zu der betrachteten Sigmafunction gehörende Discriminantenproduct**) und $\overline{D}$ die durch die Transformation (6) des § 32 aus D hervorgehende Grösse. Der Beweis für diese Behauptung wird im folgenden Paragraphen geführt werden; hier sei nur noch einmal im Interesse der Uebersichtlichkeit die volle Definition von $X_{\alpha\beta}$ sowohl durch σ- als durch ϑ-Functionen wiederholt:

$$X_{\alpha\beta}(u) = e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha + g_4\beta)} \sqrt[8]{\frac{\overline{D}}{D^n}}\, e^{G_2^{(n)}(u_i)}\, \sigma_{00\frac{\alpha}{n}\frac{\beta}{n}}(u_i;\, \overline{\omega}_{ik}) \tag{14}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{n}(g_3\alpha + g_4\beta)}\, c^{n-1}\, p_{12}^{\frac{n-1}{2}}\, p^{\frac{\alpha^2}{n}}\, q^{\frac{2\alpha\beta}{n}}\, r^{\frac{\beta^2}{n}}\, z_1^{\alpha} z_2^{\beta} \times \tag{15}$$

$$e^{-n\,G_2(u_i;\, \omega_{ik})}\, \frac{\vartheta(v_i + \alpha\tau_{i1} + \beta\tau_{i2};\, n\tau_{ik})}{\vartheta^n(0;\, \tau_{ik})}.$$

Dabei ist die Charakteristik

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{vmatrix}$$

*) Vgl. Klein, Abh. der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, math.-phys. Cl., Bd. 13, p. 385.

**) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 32, p. 359.

beiderseits weggelassen; die Function $G_2^{(n)}$ ist § 32, Glchg. (14), die Sigmafunction mit Indices ebenda Glchg. (8) erklärt; p_{12} ist die Periodendeterminante (§ 30, Glchg. (3)), c die beim Uebergang von σ zu den ϑ auftretende numerische Constante (§ 32, Glchg. (13)).

§ 35.

Ueberführung der zu einer bestimmten Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ in die zu einer andern Charakteristik gehörenden.

Während im vorigen Paragraphen das Verhalten der $X_{\alpha\beta}$ bei linearen Periodentransformationen ganz im allgemeinen angegeben worden ist, müssen wir nun noch weitere Unterscheidungen machen. Entsprechend der Art, wie die $X_{\alpha\beta}$ aus Functionen zweiter Stufe durch Transformation n^{ter} Ordnung abgeleitet sind, wird es dabei hauptsächlich auf die Charakterisirung der betreffenden Transformationen einerseits modulo 2, andererseits modulo n ankommen; und die weitere Ueberlegung wird erleichtert, wenn wir uns des Grundz. §§ 30, 54 gestreiften Satzes erinnern, dass *jede Transformation aufgefasst werden kann als das Product von zwei andern, von welchen die eine modulo 2, die andere modulo n zur Identität congruent ist.* Es genügt also, wenn wir das Verhalten unserer $X_{\alpha\beta}$ gegenüber diesen beiden Classen von Periodentransformationen untersuchen; und wir wollen mit denjenigen der zweiten Classe beginnen. Diese gehören sämmtlich zu dem Falle III. des vorigen Paragraphen; wir erhalten für jede derselben:

$$X'^{(c)}_{\alpha\beta} = c_{0000}\, X^{(c')}_{\alpha\beta}; \tag{1}$$

und zwar ist aus der ersten Form für X_{00} (§ 34, Glchg. (14)) sofort zu entnehmen, dass c_{0000} eine rein numerische Constante, nämlich eine achte Einheitswurzel ist. Wir können daher sagen:

Bei solchen linearen Periodentransformationen, welche modulo n zur Identität congruent sind, gehen die zu einer bestimmten Charakteristik c gehörenden $X_{\alpha\beta}$, bis auf achte Einheitswurzeln in die entsprechenden $X_{\alpha\beta}$ über, welche zu der transformirten Charakteristik c′ gehören; dabei sind natürlich c, c′ entweder beide gerade oder beide ungerade.

Bei denjenigen Periodentransformationen aber, welche mod. 2 zur Identität congruent sind, bleibt die Charakteristik aller $X_{\alpha\beta}$ ungeändert. Wir werden so auf *Gruppen linearer Substitutionen* geführt,

---

*) Nähere Angaben über diese Einheitswurzeln finden sich bei Witting, dieser Ann. Bd. 29, p. 165.

welche die zu einer bestimmten Charakteristik gehörenden $X_{\alpha\beta}$ *nur unter sich umsetzen.* Von diesen Gruppen gilt der Satz:

Die zu verschiedenen Charakteristiken gehörenden Gruppen linearer Transformationen der $X_{\alpha\beta}$ *sind identisch.*

Für zwei Charakteristiken, welche beide gerade oder beide ungerade sind, kann diese Uebereinstimmung der beiderseitigen linearen Substitutionen auf Grund des vorhergehenden Satzes dadurch gezeigt werden, dass man die eine in die andere transformirt mit Hilfe einer modulo n zur Identität congruenten Operation*). Ist aber die eine Charakteristik gerade, die andere ungerade, so versagt diese Methode; man muss dann auf Glchg. (19) des § 33 zurückgreifen, welche in allen Fällen den erforderlichen Schluss zu machen gestattet, wie im III. Theil dieser Untersuchungen noch im einzelnen zu zeigen sein wird.

Die Untersuchung dieser Gruppen linearer Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ ist nun unsere nächste Aufgabe; sie erfordert aber einige Vorbemerkungen über die Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche eine bestimmte (gerade) Charakteristik festlassen.

§ 36.

Erzeugende der Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche eine gerade Charakteristik unverändert lassen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass die zu untersuchende gerade Charakteristik:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

sei. Wir fragen dann nach der Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche diese Charakteristik in sich überführen, insbesondere nach *erzeugenden Operationen* dieser Gruppe. Diese Frage ist bereits in I., § 22 aufgeworfen und zum Theil beantwortet; dort ist gezeigt, dass die Gruppe entsteht, wenn man zu der Hauptcongruenzgruppe**) zweiter Stufe noch die 3 Operationen B, C, D hinzunimmt. Da die Hauptcongruenzgruppe zweiter Stufe ihrerseits 5 Erzeugende (Grundz. § 22, Glchgen 65) besitzt, so hätten wir es zunächst mit 8

---

*) In dieser Art beweist Herr Witting diesen Satz (diese Ann. Bd. 29 p. 167); p. 44 der Diss. beruft er sich aber auf diesen Beweis auch in einem Falle, in welchem die eine Charakteristik gerade, die andere ungerade ist.

**) Diesen Ausdruck gebrauche ich im Folgenden (statt des bisher von mir benutzten „Principaluntergruppe") im Anschluss an „*F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. R. Fricke*". I. Bd. Leipzig, Teubner, 1890; vgl. daselbst p. 388.

Erzeugenden zu thun; wir können aber 4 von diesen jedenfalls entbehren. Denn man verificirt sofort, dass sich S_1, S_3, S_4, S_5 wie folgt durch die übrigen ausdrücken*):

$$(2) \quad S_1 = B^3 S_2 B, \quad S_3 = D S_1 D, \quad S_4 = D S_2 D, \quad S_5 = C^{-2},$$

sodass wir als erstes Resultat erhalten:

Die Gruppe derjenigen linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristik (1) *in sich überführen, kann erzeugt werden aus den vier Operationen*

$$(3) \quad B, \; \omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4;$$

$$(4) \quad C, \; \omega_1' = \omega_1 + \omega_2, \; \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3, \quad \omega_4' = \omega_4 - \omega_3;$$

$$(5) \quad D, \; \omega_1' = \omega_2, \quad \omega_2' = \omega_1, \; \omega_3' = \omega_4, \quad \omega_4' = \omega_3;$$

$$(6) \quad S_2, \; \omega_1' = \omega_1, \quad \omega_2' = \omega_2, \; \omega_3' = \omega_3 - 2\omega_1, \; \omega_4' = \omega_4.$$

Dies genügt für unsere Zwecke; in der That scheint eine weitere Reduction der Zahl der Erzeugenden nur unter Verzicht auf ihre Einfachheit möglich zu sein. Unter solchem Verzicht aber ist sie in der That möglich, z. B. auf folgende Weise: Zunächst kann die Gruppe derjenigen Vertauschungen der Verzweigungspunkte, (I, § 22) welche die Zerlegung derselben in die beiden Tripel (024), (135) fest lassen, statt wie a. a. O. aus B, C, D, auch schon aus B und irgend einer Operation erzeugt werden, welche alle 6 Verzweigungspunkte in geeigneter Weise in einem Cyklus vertauscht, z. B. der folgenden:

$$\mathsf{A} = DCBDB = (012345)^{**});$$

ihr entspricht u. a. die Periodentransformation:

$$(7) \quad \mathsf{A}: \omega_1' = -\omega_3, \quad \omega_2' = -\omega_3 - \omega_4, \quad \omega_3' = \omega_1 - \omega_2, \quad \omega_4' = \omega_2.$$

In der That drücken sich die *Verzweigungspunktvertauschungen* C, D wie folgt durch A und B aus:

$$(8) \qquad C = \mathsf{A}^2 B \mathsf{A}^3 B,$$

$$(9) \qquad D = B^3 \mathsf{A}^3 B.$$

Dieselben Gleichungen gelten aber auch von den gleichbezeichneten *Periodentransformationen*, wie man ohne Mühe verificirt; *unsere Gruppe kann also auch von den drei Operationen* A, B, S_2 *erzeugt werden.*

§ 37.

Die Gruppe linearer Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ einer bestimmten Charakteristik.

Nunmehr kehren wir zurück zur Untersuchung der Gruppe derjenigen linearen Substitutionen, welche die $X_{\alpha\beta}$ einer bestimmten

*) Die Zusammensetzung der Transformationen ist wie in I, § 10 so geschrieben, dass aus $\omega'' = R(\omega')$, $\omega' = S(\omega)$ folgt $\omega'' = RS(\omega)$.

**) D. h. es soll 0 durch 1 ersetzt werden, 1 durch 2 etc.

Charakteristik erfahren, wenn man die Perioden in der Weise linear transformirt, dass die Charakteristik in sich übergeht. Den Resultaten des § 35 zufolge wird es dabei der Allgemeinheit keinen Eintrag thun, wenn wir voraussetzen, die Charakteristik sei:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wir wollen zunächst die Ordnung der Gruppe bestimmen, d. h. die *Anzahl* der verschiedenen linearen Substitutionen, welche die zu dieser Charakteristik gehörenden*) $X_{\alpha\beta}$ unter sich umsetzen; dazu müssen wir wissen, welche Transformationen jedes $X_{\alpha\beta}$ in sich überführen. Wir wollen daher zeigen:

Alle linearen Periodentransformationen, welche die Charakteristik in sich überführen und modulo n zur Identität congruent sind, — und nur diese — führen jedes einzelne $X_{\alpha\beta}$ *in sich über.*

Es geht nämlich aus § 34, III zunächst hervor, dass bei allen solchen Transformationen die $X_{\alpha\beta}$ bis auf einen allen gemeinsam zutretenden Factor ungeändert bleiben. Aber dieser Factor muss $= 1$ sein, die $X_{\alpha\beta}$ müssen also völlig ungeändert bleiben. Denn das wird allgemein der Fall sein müssen, wenn es für den Nullwerth von X_{00}, also für

$$\sqrt[8]{\frac{D}{D^n}}$$

gilt; und von diesem kann es ebenso gezeigt werden, wie es in I, § 22 von seinem Quadrat gezeigt ist. Andererseits aber folgt aus den Congruenzen (12) des § 34, dass auch bei keiner andern Transformation jedes $X_{\alpha\beta}$ in sich übergehen kann. Damit sind beide Theile des ausgesprochenen Satzes bewiesen; aus ihm folgt mit Rücksicht auf bekannte Entwicklungen des Herrn C. Jordan:**)

Die Anzahl der verschiedenen homogenen linearen Substitutionen, welche die $X_{\alpha\beta}$ *erfahren, beträgt:*

$$N = (n^4 - 1)\, n^3\, (n^2 - 1)\, n. \tag{1}$$

Darüber hinaus aber ergiebt sich noch:

Ebensogross ist auch die Anzahl der linearen Substitutionen, welche die Verhältnisse der $X_{\alpha\beta}$ *erfahren.*

Als *Erzeugende dieser Gruppe* benutzen wir die B, C, D, S_2 des § 36; wir wollen für jede dieser Operationen noch die zugehörigen linearen Substitutionen der $X_{\alpha\beta}$ angeben und zugleich die rückständige Constantenbestimmung erledigen.

---

*) Wo im folgenden nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, ist immer nur von solchen $X_{\alpha\beta}$ die Rede.

**) Traité des Substitutions p. 176 (1870). Vgl. Grundz. § 17, sowie die Ergänzungen Grundz. § 54 und I, § 10, 11.

Für B sind die Transformationsformeln der Elementarcharakteristiken:

$$h_1 = h_3', \quad h_2 = h_2', \quad h_3 = -h_1', \quad h_4 = h_4';$$

also substituiren sich die $X_{\alpha\beta}$ nach der Formel:

$$(2) \qquad X'_{\alpha\beta} = c \sum_0^{n-1} \gamma\, \varepsilon^{\alpha\gamma} X_{\gamma\beta}.$$

Für die Constante c findet man den Werth:*)

$$(3) \qquad c = -\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}},$$

unter $\sqrt{n}$ den positiven Werth verstanden.

Für die drei übrigen Erzeugenden reducirt sich die rechte Seite der Umsetzungsformel jedesmal auf ein Glied, und die Constante lässt sich daher durch directe Untersuchung von X_{00} bestimmen, am bequemsten auf Grund der Darstellung durch ϑ-Reihen (§ 34, Glchg. 14). Dabei tritt nur eine Umordnung der letzteren ein; ausserdem ist noch die Aenderung von p_{12} zu beachten. Man erhält so:

$$(4) \qquad C: \quad X'_{\alpha\beta} = X_{\alpha-\beta,\beta};$$

$$(5) \qquad D: \quad X'_{\alpha\beta} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} X_{\beta\alpha};$$

$$(6) \qquad S_2: \quad X'_{\alpha\beta} = \varepsilon^{-\alpha^2} X_{\alpha\beta}.$$

Die Constante c_{0000} *ist also bei der getroffenen Wahl von* C (§ 34, Glchg. 13) *bei allen Erzeugenden, folglich überhaupt bei allen Operationen unserer Gruppe rein numerisch.* **)

§ 38.

Die Functionen $Y_{\alpha\beta}$ und $Z_{\alpha\beta}$.

Ganz wie im elliptischen Fall können wir nunmehr***) aus den $X_{\alpha\beta}$ auf Grund der Formel § 33, (4) *gerade* und *ungerade* Jacobi'sche Functionen bilden; nämlich die $\frac{1}{2}(n^2+1)$ Functionen:

---

*) Vgl. die Rechnung des Herrn Witting, Diss. p. 19, 20; es ist beim Vergleich nur zu beachten, dass W.'s M und unser B reciproke Operationen sind. — Die Angaben für P und Q bei Witting müssen auf einem Irrthum beruhen; lediglich eine Folge dieses Irrthums ist es, wenn Herr Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 320) aus W.'s Erzeugenden eine Operation $z_0' = iz_0$, $z_1' = iz_1$ etc. ableiten konnte. Eine solche ist in unserer Gruppe keineswegs enthalten; M. hat sie daher mit Recht für seine weiteren Entwicklungen bei Seite geschoben.

**) Man sieht, dass jede dieser Substitutionen die Determinante 1 besitzt; was auch a priori ebenso gezeigt werden kann, wie p. 694 des oben p. 180 Fussn. genannten Buches von Klein und Fricke.

***) Vgl. Witting, dieser Ann. Bd. 29, p. 167. Im Falle ungerader Charakteristik nenne ich Y, was er Z nennt und umgekehrt, um mit der von Herrn Klein

(1) $$Y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(X_{\alpha\beta} + X_{-\alpha-\beta})$$

und die $\frac{1}{2}(n^2-1)$ Functionen:

(2) $$Z_{\alpha\beta} = X_{\alpha\beta} - X_{-\alpha-\beta},$$

für welche:

(3) $$Y_{\alpha\beta} = Y_{-\alpha-\beta},\quad Z_{\alpha\beta} = -Z_{-\alpha-\beta}\quad (Z_{00}=0)$$

ist. Es sind dann im Falle einer *geraden* Charakteristik die $Y_{\alpha\beta}$ *gerade*, die $Z_{\alpha\beta}$ *ungerade* Functionen der u; im Falle einer *ungeraden* Charakteristik ist es umgekehrt.

Jeder linearen Transformation der $X_{\alpha\beta}$ entspricht eine solche der $Y_{\alpha\beta}$ unter sich und eine solche der $Z_{\alpha\beta}$ unter sich. Um die Zahl der verschiedenen unter diesen festzustellen, müssen wir diejenigen Periodentransformationen aufsuchen, welche $X_{\alpha\beta}$ in $cX_{-\alpha-\beta}$ überführen. Aus § 34, III geht hervor, dass alle diese modulo n zu der einen:

(4) $$\omega'_{i1} = -\omega_{i1},\quad \omega'_{i2} = -\omega_{i2},\quad \omega'_{i3} = -\omega_{i3},\quad \omega'_{i4} = -\omega_{i4}$$

(d. i. B^2DB^2D) congruent sind. Für diese aber ergiebt sich:*)

(5) $$X'_{\alpha\beta} = +X_{-\alpha-\beta}$$

also:

(6) $$Y'_{\alpha\beta} = Y_{-\alpha-\beta} = +Y_{\alpha\beta},\quad Z'_{\alpha\beta} = Z_{-\alpha-\beta} = -Z_{\alpha\beta};$$

und hieraus folgt ohne weiteres:

Bei linearen Periodentransformationen erfahren die Y $\frac{1}{2}N$, die Z dagegen N lineare Substitutionen;

und ferner:

Die homogene Substitutionsgruppe der Y ist zu der zugehörigen Collineationsgruppe holoedrisch, die der Z hemiedrisch isomorph.

Die Gruppe der Z-Substitutionen für $n=3$ ist von den Herren Witting und Maschke in den mehrfach citirten Abhandlungen ausführlich untersucht worden; die entsprechende Untersuchung der Gruppe der Y, gleichfalls für $n=3$, bildet den Gegenstand der folgenden Abschnitte.

---

im elliptischen Fall (Abh. der sächs. Ges. d. W., math.-phys. Cl., Bd. 13, p. 370) gewählten Bezeichnung in Uebereinstimmung zu bleiben. Damit stimmt auch die Bezeichnung von Klein in Liouville's Journal, sér. 4, t. 4, p. 172 (1888), wenn auch dort auf W. verwiesen ist. Den Factor $\frac{1}{2}$ in (1) setze ich bei, um spätere Formeln (§ 57) bequemer zu haben.

*) Man beachte den in dieser Formel liegenden Unterschied gegenüber dem elliptischen Fall, in welchem die entsprechende Formel (Klein a. a. O. p. 387): $X'_\alpha = (-1)^{\frac{n-1}{2}} X_{-\alpha}$ lautet. Aus diesem Grunde bietet in den folgenden Sätzen der Charakter der Zahl n modulo 4 nicht wie im elliptischen Fall (a. a. O. p. 392) Anlass zur Unterscheidung.

IX. Abschnitt.

Die endliche Gruppe von 25920 linearen Substutionen im quinären Gebiet, welche durch die Theorie der hyperelliptischen Functionen $Y_{\alpha\beta}$ geliefert wird.

§ 39.

Zusammenstellung der erzeugenden Substitutionen.

Für $n = 3$ erhalten wir $\frac{n^2+1}{2} = 5$ Functionen $Y_{\alpha\beta}$, welche wir zur Ersparung der Doppelindices wie folgt schreiben wollen:

$$Y_0 = Y_{00} = X_{00},$$

$$(1)\quad Y_1 = Y_{10} = \frac{1}{2}(X_{10} + X_{20}), \qquad Y_3 = Y_{11} = \frac{1}{2}(X_{11} + X_{22}),$$

$$Y_2 = Y_{01} = \frac{1}{2}(X_{01} + X_{02}), \qquad Y_4 = Y_{12} = \frac{1}{2}(X_{12} + X_{21}).$$

Bei denjenigen linearen Transformationen der Perioden, welche die Charakteristik in sich überführen, erfahren diese 5 Grössen Y eine Gruppe von

$$(2)\qquad \frac{1}{2}N = 25920$$

linearen homogenen Substitutionen, zu deren Untersuchung wir uns nunmehr wenden. Es wird sich diese Untersuchung besonders nach zwei Richtungen zu bewegen haben, indem wir einmal nach *Unter-Gruppen* von G fragen, dann aber auch nach *Invarianten* von G, d. h. nach solchen rationalen ganzen Functionen der Y, welche bei allen Operationen von G in sich übergehen. Beide Untersuchungsrichtungen werden wir übrigens in nahen Zusammenhang bringen, indem wir die Invarianten von G aus den Invarianten ihrer Untergruppen aufbauen werden. Eine Einkleidung der Untersuchung in das Gewand einer geometrischen (wenn man will hypergeometrischen) Redeweise wird sich vielfach als fördernd erweisen: wir werden die Y als homogene Coordinaten eines Punktes in einem vierdimensionalen Raume deuten, die linearen Substitutionen der Y als Collineationen dieses Raumes auffassen u. s. w. Eine lineare Gleichung zwischen den Y stellt dann einen (dreidimensionalen, linearen) „*Raum*" dar, zwei solche Gleichungen eine „*Ebene*", drei eine „Gerade". Dass diese geometrische Deutung die analytischen Beziehungen nicht vollständig umfasst, indem sie nur den *Verhältnissen* der Y ein geometrisches Bild zur Seite stellt, ist gerade für unsere Aufgabe von sehr geringer Bedeutung, da zwischen der homogenen und nicht-homogenen Substitutionsgruppe der Y holoedrischer Isomorphismus stattfindet, vgl. p. 184.

Vor allem müssen wir die Erzeugenden unserer Gruppe in ausführlich geschriebener Form zusammenstellen. Wir haben für die X:

		B	C	D	S_2
	$X'_{00}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00}+X_{10}+X_{20})$	X_{00}	$-X_{00}$	X_{00}
	$X'_{10}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00}+\varepsilon X_{10}+\varepsilon^2 X_{20})$	X_{10}	$-X_{01}$	$\varepsilon^2 X_{10}$
	$X'_{20}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{00}+\varepsilon^2 X_{10}+\varepsilon X_{20})$	X_{20}	$-X_{02}$	$\varepsilon^2 X_{20}$
(3)	$X'_{01}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01}+X_{11}+X_{21})$	X_{21}	$-X_{10}$	X_{01}
	$X'_{01}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01}+\varepsilon X_{11}+\varepsilon_2 X_{21})$	X_{01}	$-X_{11}$	$\varepsilon^2 X_{11}$
	$X'_{21}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{01}+\varepsilon^2 X_{11}+\varepsilon X_{21})$	X_{11}	$-X_{12}$	$\varepsilon^2 X_{21}$
	$X'_{02}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02}+X_{12}+X_{22})$	X_{12}	$-X_{20}$	X_{02}
	$X'_{12}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02}+\varepsilon X_{12}+\varepsilon^2 X_{22})$	X_{22}	$-X_{21}$	$\varepsilon^2 X_{12}$
	$X'_{22}=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(X_{02}+\varepsilon^2 X_{12}+\varepsilon X_{22})$	X_{02}	$-X_{22}$	$\varepsilon^2 X_{22}$

und also für die Y:

		B	C	D	S_2
	$Y_0'=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0+2Y_1)$	Y_0	$-Y_0$	Y_0
	$Y_1'=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0-Y_1)$	Y_1	$-Y_2$	$\varepsilon^2 Y_1$
(4)	$Y_2'=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+Y_3+Y_4)$	Y_4	$-Y_1$	Y_2
	$Y_3'=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon Y_3+\varepsilon^2 Y_4)$	Y_2	$-Y_3$	$\varepsilon^2 Y_3$
	$Y_4'=$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(Y_2+\varepsilon^2 Y_3+\varepsilon Y_4)$	Y_3	$-Y_4$	$\varepsilon^2 Y_4$

Die Substitution A (§ 36, Glchg. 7) sei noch beigefügt, da gelegentlich von ihr Gebrauch zu machen sein wird; sie lautet:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
Y_0' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0 + 2Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4),\\
Y_1' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0 - Y_1 - Y_2 + 2Y_3 - Y_4),\\
Y_2' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0 + 2Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4),\\
Y_3' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0 - Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - Y_4),\\
Y_4' &= -\tfrac{1}{3}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 + 2Y_4).
\end{aligned}
$$

Bei der Aufsuchung der *Untergruppen* von G kommt uns der Umstand zu Statten, dass wir G nunmehr in doppelter Gestalt vor uns haben: einmal in den modulo 3 betrachteten linearen Periodentransformationen (sofern simultane Vorzeichenänderungen sämmtlicher vier Perioden als irrelevante Operationen aufgefasst werden), dann in den linearen Substitutionen der Y. Für die erste Darstellung sind drei Arten von Untergruppen von Herrn C. Jordan angegeben worden (und zwar für beliebige n)*); diese wollen wir zunächst untersuchen. Zwei weitere bemerkenswerthe Untergruppen ergaben sich aus der Eigenschaft unserer Gruppe, dass sie isomorph ist mit der des Problems der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung**); einmal gefunden konnten sie dann leicht auch an der Gruppe der Y definirt werden, während ihre Definition an den Periodentransformationen schwieriger zu sein scheint. Die ersten 4 von diesen 5 Arten von Untergruppen sind übrigens für die Gruppe der Z bereits von Herrn Witting untersucht worden.

Endlich möge noch der folgende Satz des Herrn C. Jordan (a. a. O. p. 176) hervorgehoben werden:

Die Gruppe G ist einfach.

§ 40.

Die erste Art Untergruppen vom Index 40.

Eine erste im folgenden mit G_0 zu bezeichnende Untergruppe unserer Gruppe G ist dadurch charakterisirt, dass *bei allen ihren Operationen* ω'_{i3} *und* ω'_{i4} *sich (bis auf n-fache Perioden) durch* ω_{i3} *und* ω_{i4} *allein ausdrücken;* ihre Ordnung ist $= 648$, ihr Index $= 40$. Die angegebene Eigenschaft kommt von unseren Erzeugenden den folgenden 3: C, D, S_2 zu, wir wollen zunächst zeigen, dass diese 3 Opera-

*) Traité des substitutions p. 365, 606; vgl. Grundz. § 39, wo die dritte Art Untergruppen und dieses Citat nachzutragen sind.

**) Wie ebenfalls von Herrn C. Jordan gefunden worden ist, a. a. O. p. 369. Ich hoffe auf diesen Isomorphismus im 3. Theil dieser Untersuchungen noch näher eingehen zu können.

tionen gerade zur Bildung der Untergruppe G ausreichen, und zwar knüpfen wir dabei an die Transformationen der Y an. In der That: aus C und D zusammen kann jede Vertauschung der vier Functionen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 erhalten werden (wobei nur mit jeder ungeraden Vertauschung ein Wechsel der Vorzeichen aller fünf Y zu verbinden ist). Daraus folgt, dass S_2 und diejenigen Operationen, welche aus S_2 durch Transformation vermittelst C, D und ihrer Verbindungen hervorgehen, *irgend drei* jener vier Y mit ε^2 zu multipliciren gestatten; durch Zusammensetzung von S_2 mit diesen seinen Transformirten kann dann jede Substitution der folgenden Form erhalten werden:

$$(1)\quad Y_0' = Y_0,\ Y_1' = \varepsilon^\varkappa Y_1,\ Y_2' = \varepsilon^\lambda Y_2,\ Y_3' = \varepsilon^\mu Y_3,\ Y_4' = \varepsilon^\nu Y_4,$$

wenn $\varkappa$, λ, μ, ν beliebige ganze Zahlen bezeichnen, die nur der Bedingung:

$$(2)\qquad \varkappa + \lambda + \mu + \nu \equiv 0 \pmod{3}$$

zu genügen haben. Die Anzahl dieser Substitutionen ist 27; combiniren wir sie mit jenen 24 Vertauschungen, so erhalten wir gerade 648 verschiedene Substitutionen, welche alle zu G_0 gehören; G_0 kann daher keine weiteren Operationen enthalten, w. z. b. w.

Durch diese Betrachtung ist zugleich die Frage nach der Zusammensetzung von G_0 erledigt: man sieht, dass die 27 Operationen der Form (1) innerhalb G_0 eine *ausgezeichnete* Untergruppe bilden, welche ihrerseits in mannigfacher Weise aus 3 Gruppen von je 3 Operationen aufgebaut werden kann. Reducirt wird G auf diese ausgezeichnete Untergruppe vermittelst einer „Factorgruppe“ *), welche mit der Gruppe der Vertauschungen von 4 Dingen isomorph, deren Zusammensetzung also bekannt ist. Die Factoren der Zusammensetzung von G_0 sind sonach:

$$(3)\qquad 2;\ 3;\ 2, 2;\ 3, 3, 3.$$

Auch die *Invarianten* dieser Untergruppe G_0 (d. h. diejenigen rationalen ganzen homogenen Functionen der Y, welche bei allen Substitutionen von G_0 bis auf einen vortretenden Factor ungeändert bleiben) lassen sich sofort angeben. Sie setzen sich nämlich rational und ganz zusammen aus:

I) Y_0;

II) dem Product $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$;

III) den symmetrischen und den alternirenden Functionen von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3.

Die *absoluten Invarianten* von G_0, d. h. diejenigen, für welche jener vortretende Factor sich stets auf 1 reducirt, setzen sich rational und ganz zusammen aus:

*) Vgl. Hölder, diese Ann. Bd. 34, p. 30.

I) dem Quadrat von Y_0;

II) dem Product $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ (dessen absolute Invarianz daraus hervorgeht, dass die Exponenten von ε in den Substitutionen (1) an die Bedingung (2) geknüpft sind);

III) den symmetrischen Functionen geraden und den alternirenden Functionen ungeraden Grades von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3;

IV) den Producten von Y_0 in symmetrische Functionen ungeraden und alternirende Functionen geraden Grades dieser vier Grössen.

Setzen wir eine Invariante von G_0 gleich Null, so erhalten wir die Gleichung eines dreidimensionalen Raumes, der bei allen Collineationen von G_0 an seiner Stelle bleibt, bei allen Collineationen von G also in höchstens 40 verschiedene Lagen übergeführt wird. Von diesen invarianten Räumen interessirt uns besonders der *lineare* Raum:

$$Y_0 = 0, \tag{4}$$

von dem wir in der That 40 verschiedene Lagen sofort angeben können. Denn aus Y_0 entstehen durch B und seine Transformirten vermöge G_0 die 2 . 12 paarweise entgegengesetzten Werthe:*)

$$\pm \frac{i}{\sqrt{3}} (Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_\alpha), \qquad \begin{array}{l} \lambda = 0, 1, 2, \\ \alpha = 1, 2, 3, 4. \end{array} \tag{5}$$

und durch A und seine Transformirten vermöge G_0 die 2 . 27 paarweise entgegengesetzten Werthe:

$$\pm \frac{1}{3} (Y_0 + \varepsilon^\varkappa Y_1 + \varepsilon^\lambda Y_2 + \varepsilon^\mu Y_3 + \varepsilon^{-\varkappa-\lambda-\mu} Y_4) \quad \varkappa, \lambda, \mu = 0, 1, 2. \tag{6}$$

Keine dieser 39 neuen Lagen des Raumes Y_0 bleibt bei allen Operationen von G_0 an ihrer Stelle; daraus folgt, dass 40 mit G_0 gleichberechtigte Untergruppen existiren, dass also G_0 in keiner grösseren Untergruppe von G ausgezeichnet enthalten ist.

Wir wollen das System der 5 Räume

$$Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0 \tag{7}$$

als ein *Pentatop erster Art***) bezeichnen und ebenso auch die 39 andern Systeme nennen, in welche dasselbe bei den Operationen von G übergeführt wird. Seine fünf Räume sind übrigens keineswegs alle gegenüber G gleichberechtigt; vielmehr steht $Y_0 = 0$ für sich als *Hauptraum erster Art* und nimmt nur 40 verschiedene Lagen an, die 4 andern „*Nebenräume*" sind unter sich gleichberechtigt, und jeder derselben kann 160 verschiedene Lagen annehmen, nämlich:

die 4 Lagen:

$$Y_\alpha = 0; \tag{8}$$

---

*) Pentatope zweiter Art werden in § 43 eingeführt werden.

**) Vgl. Wiltheiss, Journ. f. d. r. u. a. Mathem. Bd. 96, p. 21.

die 12 Lagen:

(9) $$Y_0 - \varepsilon^\lambda Y_\alpha = 0;$$

die 36 Lagen:

(10) $$Y_\alpha + \varepsilon^\varkappa Y_\beta + \varepsilon^\lambda Y_\gamma = 0;$$

die 198 Lagen:

(11) $$Y_0 + 2\varepsilon^\varkappa Y_\alpha - \varepsilon^\lambda Y_\beta - \varepsilon^\mu Y_\gamma - \varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_\delta = 0$$

(α, β, γ, δ bedeuten von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4; λ, μ, ν gleiche oder verschiedene aus der Reihe 0, 1, 2). Die *Form* Y_0 nimmt übrigens 80, die Form Y_1 960 verschiedene Werthe an.

Dem Hauptraum I. Art $Y_0 = 0$ entspricht dual der *Hauptpunkt I. Art*:

(12) $$Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = 1 : 0 : 0 : 0 : 0;$$

auch dieser wird bei den Collineationen von G in nur 40 verschiedene Lagen übergeführt. Ebenso entsprechen den 160 Nebenräumen ebensoviele Nebenpunkte.

Durch einen Hauptpunkt I. Art gehen 40 Nebenräume, dagegen *kein Hauptraum I. Art;* durch einen Nebenpunkt 10 Haupträume I. Art und 21 Nebenräume.

§ 41.

Die zweite Art Untergruppen vom Index 40.

Eine zweite Untergruppe*), die im folgenden mit H bezeichnet werden möge, ist im Gebiete der Periodentransformationen dadurch charakterisirt, dass *sich bei allen ihren Operationen* ω'_{i1}, ω'_{i2}, ω'_{i3} *bis auf n-fache Perioden durch* ω_{i1}, ω_{i2}, ω_{i3} *allein ausdrücken.* Auch die Ordnung dieser Gruppe ist $= 648$, ihr Index $= 40$. Von unseren erzeugenden Operationen gehören B, C, S_2 zu ihr; wir zeigen wieder an den Substitutionen der Y, dass diese drei Operationen zur Bildung von H ausreichen. In der That: bei allen diesen drei Operationen substituiren sich Y_0 und Y_1 unter sich *binär*, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich *ternär*. Die ternäre Gruppe in Y_2, Y_3, Y_4, welche auf diese Weise zu Stande kommt, ist keine andere als die bekannte**) „*Hesse'sche*“

*) Vgl. p. 187, Fussnote.

**) Gruppentheoretisch zuerst wohl von Herrn C. Jordan behandelt, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 84, p. 206 ff. (1877); ferner von den Herren Witting (Diss. p. 28 ff.) und Maschke (dieser Ann. Bd. 33, p. 322 ff.). Bei Maschke handelt es sich um eine Gruppe von 1296 Substitutionen, die ausser den auch hier auftretenden noch Vorzeichenwechsel aller Coordinaten enthält. Seine A, D, E (p. 324) sind der Reihe nach gleich unseren C, S_2^{-1}, B, das letzte abgesehen von

Gruppe von 648 *linearen Substitutionen, welche ein syzygetisches Büschel von Curven dritter Ordnung in sich überführen;* wir erhalten also aus B, C, S_2 bereits die für H erforderliche Anzahl von Operationen, w. z. b. w.

Die *binäre* Gruppe, nach welcher sich Y_0, Y_1 bei H umsetzen, ist eine *homogene Tetraedergruppe*;*) in diesem binären Gebiet reducirt sich nämlich C auf die Identität, während B, S_2, BS_2 bezw. die Perioden 4, 3, 3 besitzen. Die Art, wie diese Tetraedergruppe mit der ternären Hesse'schen Gruppe sich zu unserer quinären Gruppe H vereinigt, können wir folgendermassen schildern: Die Parameter $\varkappa : \lambda$ des syzygetischen Formenbüschels:

(1) $$\varkappa\varphi + \lambda\psi$$

(wo:

(2) $$\varphi = Y_2 Y_3 Y_4, \qquad \psi = Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3$$

gesetzt ist) substituiren sich binär nach einer Tetraedergruppe, wenn die Y den Substitutionen der *Hesse'schen* Gruppe unterworfen werden;**) und nun ist die Sache einfach die, dass sich bei jeder einzelnen Operation von H $6Y_1$ und Y_0 genau so wie $\varkappa$ und λ substituiren, sodass:

(3) $$u = Y_0\psi + 6Y_1\varphi$$

eine absolute Invariante unserer quinären Gruppe H ist. Es vereinigt sich daher jede der 648 Operationen der ternären Gruppe nur mit *einer* der binären, wie es sein muss.

Diejenigen Substitutionen unserer Gruppe H, bei welchen jede einzelne Form des Büschels (1) absolut invariant bleibt, bilden eine aus 27 Operationen bestehende *ausgezeichnete Untergruppe* derselben. Diese ihrerseits hat wieder zur ausgezeichneten Untergruppe eine solche von 9 Operationen, bei welchen Y_2, Y_3, Y_4 nur mit Einheitswurzeln multiplicirt werden; alle Operationen dieser letzteren Gruppe sind untereinander vertauschbar. Reducirt wird H auf die erstgenannte Untergruppe durch eine Factorgruppe, welche mit der homogenen Tetraedergruppe isomorph ist. Die *Factoren der Zusammensetzung* von H sind daher:

(4) $$3;\ 2,2;\ 2;\ 3;\ 3,3.$$

---

den Vorzeichen; sein B ist, ebenfalls abgesehen von den Vorzeichen gleich seinem E^2, daher zwar für ihn unentbehrlich (vgl. seine Fussn. p. 331), aber nicht für uns; sein C kann aus seinen A, B, D abgeleitet werden. — Einzelne Angaben auch bei Muth, *Ueber ternäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.* Diss. Giessen 1890, insbes. p. 15ff.

*) Vgl. F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder (Leipzig 1884), p. 50ff. Zu beachten ist übrigens, dass S_2 im *binären* Gebiet nicht die Determinante 1 hat.

**) Maschke a. a. O. p. 327.

Die beiden Gruppen G_0 und H sind daher keineswegs isomorph (vgl. § 40, 3).

Die Ebenen, welche aus:

(5) $$Y_0 = 0, \quad Y_1 = 0$$

und die Geraden, welche aus:

(6) $$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0$$

durch die Operationen von G erhalten werden, sollen *Hauptebenen* und *Hauptgerade* heissen. Die Anzahl der einen wie der andern kann höchstens 40 betragen; dass sie auch nicht kleiner ist, folgt aus den sogleich aufzustellenden Sätzen über ihre Lage zu den Haupträumen I. Art. Man findet nämlich:

Jeder Hauptraum I. Art wird von jeder der vier zugehörigen Nebenräume in einer Hauptebene geschnitten; die drei andern zugehörigen Nebenräume schneiden sich jedesmal in der jener Hauptebene entsprechenden Hauptgeraden.

Umgekehrt gehen durch jede Hauptebene vier Haupträume erster Art, sammt je einem zugehörigen Nebenraum, durch jede Hauptgerade vier Tripel zusammengehöriger Nebenräume.

Wir fügen noch die beiden folgenden Sätze bei:

In Bezug auf einen Hauptraum I. Art (§ 37, 4) *spalten sich die* 39 *übrigen in* 12 (§ 37, 5), *welche mit ihm zu je dreien je eine seiner* 4 *Hauptebenen gemein haben, und in* 27 (§ 37, 6), *deren Schnittebenen mit ihm keine Hauptebenen sind.*

In Bezug auf eine Hauptebene spalten sich die 39 *übrigen in* 12, *welche mit ihr je eine Gerade, und in* 27, *welche mit ihr nur je einen Punkt gemein haben.*

Dass jedem dieser Sätze ein dualistischer gegenübersteht, bedarf wohl keiner näheren Ausführung.

Es bleiben noch die *Invarianten* der Gruppe H aufzuzählen. Zu ihnen gehören *erstens* die Invarianten der binären Tetraedergruppe, nach welcher sich Y_0, Y_1 substituiren, nämlich:*)

die Tetraederform:

(7) $$\Phi = Y_0^4 + 8\,Y_0\,Y_1^3;$$

die Gegentetraederform:

(8) $$\Psi = Y_0^3\,Y_1 - Y_1^4;$$

die Oktaederform:

(9) $$t = Y_0^6 - 20\,Y_0^3\,Y_1^3 - 8\,Y_1^6;$$

*) Klein, Ikosaeder p. 51.

sie sind verbunden durch die Relation:

$$\Phi^3 - 64\Psi^3 = t^2. \tag{10}$$

Von ihnen sind Φ und t absolut invariant*), Ψ aber geht bei Anwendung von S_2 in $\varepsilon^2\Psi$ über, sodass erst Ψ^3 absolut invariant ist.

Zweitens gehören hierher die Invarianten der ternären Gruppe, nach welcher sich $Y_2\,Y_3\,Y_4$ umsetzen; dieselben sind von Herrn Maschke in der mehrfach erwähnten Abhandlung (p. 326) angegeben worden und sollen von dort mit ihren Bezeichnungen:

$$C_6,\ C_9,\ C_{12},\ \mathfrak{C}_{12},\ C_{18} \tag{11}$$

einfach herübergenommen werden.

Drittens endlich können wir auch diejenigen Invarianten von H ohne Schwierigkeit gewinnen, in welchen beide Reihen von Grössen vorkommen. Denn auch diese können, wie die Betrachtung der Operationen B^2, C, S_2 lehrt, die Y_2, Y_3, Y_4 nur in den von Maschke (a. a. O. p. 325) mit φ, ψ, χ, C_9 bezeichneten Verbindungen enthalten; und von diesen wieder kann C_9 als einzige alternirende Form nur als Factor auftreten. Eine invariante Form aber, welche Y_2, Y_3 Y_4 nur in den Verbindungen φ, ψ, χ enthält, kann nach dem von Maschke (a. a. O. p. 327) angegebenen Verfahren in eine Reihe der Form:

$$J = \sum^{\lambda} C_6^{\lambda} J_{\lambda}$$

entwickelt werden, in welcher die J_λ selbst wieder Invarianten unserer Gruppe sind, aber Y_2, Y_3, Y_4 nur mehr in den Verbindungen φ und ψ enthalten, ausserdem natürlich eventuell noch Y_0 und Y_1. *Die J_λ sind also Invarianten mit den beiden cogredienten binären Variabelnreihen 6φ, $-\psi$ und Y_0, Y_1; als solche drücken sie sich rational und ganz aus durch die identische Invariante u* (s. o. Glchg. 3) *und durch Polaren der Formen mit nur einer Variabelnreihe.* Der Polarisationsprocess, welcher dabei in Frage kommt, ist durch den Operator:

$$-\psi\frac{\partial}{\partial Y_1} + 6\varphi\frac{\partial}{\partial Y_0} \tag{13}$$

definirt. Für spätere Benutzung (in § 46) seien von diesen Formen insbesondere die folgenden notirt:

$$\Psi_1 = \psi(-Y_0^3 + 4Y_1^3) + 18\varphi Y_0^2 Y_1; \qquad (6) \tag{14}$$

$$\Psi_2 = -\psi^2 Y_1^2 - 3\varphi\psi Y_0^2 + 18\varphi^2 Y_0 Y_1; \qquad (8) \tag{15}$$

$$\Phi_3 = -\psi^3 Y_0 + 18\varphi\psi^2 Y_1 + 108\varphi^3 Y_0; \qquad (10) \tag{16}$$

$$t_3 = \psi^3(Y_0^3 + 8Y_1^3) - 54\varphi\psi^2 Y_0^2 Y_1 + 324\varphi^2\psi Y_0 Y_1^2 + 216\varphi^3(Y_0^3 - Y_1^3). \qquad (12) \tag{17}$$

---

*) Die hierin liegende Abweichung von den Angaben bei Klein findet ihren Grund in dem p. 191, Fussn. erwähnten Umstand.

Dabei ist durch den angehängten Index bezeichnet, wie oft die betreffende Form „polarisirt“ worden ist; überflüssige Zahlenfactoren sind beseitigt und der Gesammtgrad in den Y ist in Klammern beigefügt.

Zwischen diesen Formen und Φ, Ψ, t selbst bestehen die Relationen:

$$(18) \qquad \Psi_1^2 = 16\Psi\Psi_2 + u^2\Phi;$$

$$(19) \qquad \Psi_1^3 = 2\Phi^2\Phi_3 - tt_3 - 3u^2\Phi\Psi_1 - u^3 t.$$

Die erste derselben wird erhalten, indem man auf Ψ_1^2 und $\Psi\Psi_2$ Gordan'sche Reihenentwicklungen anwendet und das in beiden auftretende Glied $(\Psi^2)_1$ eliminirt; ebenso folgt die zweite aus den Reihenentwicklungen von Ψ_1^3, $\Phi^2\Phi_3$, tt_3, $\Phi\Psi_1$ durch Elimination von $(\Phi^3)_3$, $(t^2)_3$, $(\Phi\Psi)_1$. Bei der Aufstellung dieser Relationen erschien es übrigens als zweckmässig, nur ihre Existenz und Gestalt auf diesem Wege zu erschliessen; die numerischen Coefficienten sind durch wirkliches Einsetzen der expliciten Ausdrücke berechnet und controllirt.

§ 42.

Untergruppen vom Index 45.

*Eine dritte Untergruppe**) K *unserer Gruppe* G *wird gebildet, wenn wir zu allen denjenigen Operationen, welche* ω_{i1} *und* ω_{i3} *unter sich,* ω_{i2} *und* ω_{i4} *unter sich substituiren, noch die Operation* D *hinzunehmen, welche beide Paare* (ω_{i1}, ω_{i3} *und* ω_{i2}, ω_{i4}) *vertauscht;* sodass also K auch noch diejenigen Operationen enthält, welche ω'_{i1} und ω'_{i3} durch ω_{i2} und ω_{i4}, ω'_{i2} und ω'_{i4} durch ω_{i1} und ω_{i3} ausdrücken. Die Anzahl dieser Operationen beträgt 1152; ihnen entspricht eine Gruppe von 576 Substitutionen der Y, deren Index also 45 ist.

Von unsern erzeugenden Operationen gehören zu dieser Untergruppe B, D, S_2; wir wollen zeigen, dass sie zur Bildung von K ausreichen. In der That, B und S_2 erzeugen, wie aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt ist, die Gruppe derjenigen Substitutionen, welche ω_1 und ω_3 nur unter sich umsetzen, ω_2 und ω_4 ungeändert lassen; durch Transformation vermöge D entsteht aus ihr die Gruppe derjenigen, welche ω_2 und ω_4 unter sich umsetzen, ω_1 und ω_3 ungeändert lassen; beide vereinigt mit D geben die Gruppe K.

Im Gebiete der Y stellt sich diese Gruppe übersichtlich dar, wenn wir ein neues Coordinatensystem durch die Gleichungen einführen:

$$(1) \quad \eta_0 = Y_0, \ \eta_1 = Y_1, \ \eta_2 = Y_2, \ \eta_3 = \tfrac{1}{2}(Y_3 + Y_4), \ \eta_4 = \tfrac{1}{2}(Y_3 - Y_4);$$

die Erzeugenden lauten dann:

*) Vgl. p. 187, Fussn.

	B	D	S_2
$\eta_0' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_0+2\eta_1)$	$-\eta_0$	η_0
$\eta_1' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_0-\eta_1)$	$-\eta_2$	$\varepsilon^2\eta_1$
$\eta_2' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_2+2\eta_3)$	$-\eta_1$	η_2
$\eta_3' =$	$-\frac{i}{\sqrt{3}}(\eta_2-\eta_3)$	$-\eta_3$	$\varepsilon^2\eta_3$
$\eta_4' =$	η_4	$-\eta_4$	$\varepsilon^2\eta_4$

(2)

Bei allen diesen Operationen bleibt also der Raum:

(3) $$\eta_4 = 0$$

an seinem Platze; wir nennen ihn und die durch Transformation vermöge G aus ihm hervorgehenden Räume *Haupträume zweiter Art.* Ihm entspricht dual der *Hauptpunkt zweiter Art:*

(4) $$\eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4 = 0 : 0 : 0 : 0 : 1.$$

(Absolut invariant gegenüber K bleibt übrigens erst η_4^6). Die vier andern η substituiren sich quaternär in der Weise, dass die *Fläche II. Ordnung*

(5) $$F \equiv \eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2 = 0$$

in sich übergeht, während ihre beiden Geradenschaaren sowohl jede unabhängig von der andern*) nach einer Tetraedergruppe in sich linear transformirt, als auch mit einander vertauscht werden können (Absolut invariant ist dabei wieder erst F^3).

Die *Anzahl der Haupträume zweiter Art* kann höchstens 45 betragen; in der That findet man so viele, nämlich:

die 18 Räume:

(6) $$Y_\alpha - \varepsilon^\varkappa Y_\beta = 0$$

und die 27 Räume:

(7) $$Y_0 - \varepsilon^\varkappa Y_1 - \varepsilon^\lambda X_2 - \varepsilon^\mu Y_3 - \varepsilon^{-\varkappa-\lambda-\mu} Y_4 = 0$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4; \quad \varkappa, \lambda, \mu = 0, 1, 2).$$

Diesen Formeln entnehmen wir folgende Sätze:

---

*) Diese Unabhängigkeit besteht vollständig nur für die nichthomogenen Substitutionen; für die homogenen ist sie dadurch eingeschränkt, dass mit $\eta_0' = \eta_0$, $\eta_1' = \eta_1$ nur $\eta_0' = \eta_0$, $\eta_2' = \eta_2$, nicht $\eta_0' = -\eta_0$, $\eta_2' = -\eta_2$ verbunden werden kann. In Folge dessen kann jede Substitution von η_0, η_1 (oder η_2, η_3) auch nur mit 12, nicht mit 24 Substitutionen von η_0, η_2 (oder η_1, η_3) verbunden werden.

Die Haupträume und Hauptpunkte zweiter Art bilden eine Configuration 45_{12}, *m. a. W. jeder dieser Räume enthält* 12 *dieser Punkte, durch jeden dieser Punkte gehen* 12 *dieser Räume.*

Gegenüber einem Hauptraum I. Art spalten sich die 45 *Haupträume II. Art in* 18, *welche zu dreien je zwei der zu dem ersteren gehörenden* 4 *Hauptgeraden enthalten*, *und* 27, *für welche das nicht der Fall ist.*

Gegenüber einer Hauptgeraden spalten sich die 45 *Haupträume II. Art in* 9, *welche sie enthalten*, *und* 36, *welche sie nicht enthalten.*

Durch die beiden letzten Sätze ist die Verschiedenheit des Verhaltens unserer Untergruppe K gegenüber den beiden Untergruppen vom Index 40 charakterisirt.

§. 43.

Untergruppen vom Index 27.

Während wir bei der Aufstellung der bisher untersuchten Untergruppen (§ 40–42) von bekannten Eigenschaften der modulo 3 betrachteten linearen Periodentransformationen ausgingen und diese auf unsere quinäre Substitutionsgruppe übertrugen, wollen wir für die noch folgenden direct an die letztere anknüpfen. Zu diesem Zweck fragen wir zunächst nach der gegenseitigen Gruppirung der Haupträume II. Art des § 42. Aus dem Schlusssatz desselben folgt:

Jeder Hauptraum II. Art enthält:

$$\frac{9 \cdot 40}{45} = 8 \text{ \textit{Hauptgerade};} \tag{1}$$

so z. B. der Hauptraum II. Art:

$$Y_1 - Y_2 = 0 \tag{2}$$

die 8 Geraden:

$$\left\{\begin{aligned} Y_1&=0,\\ Y_2&=0,\\ Y_3&=0; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} Y_1&=0,\\ Y_2&=0,\\ Y_4&=0; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} Y_0 - \varepsilon^\lambda Y_3&=0,\\ \varepsilon\, Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + Y_4&=0,\\ \varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon\, Y_2 + Y_4&=0; \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} Y_0 - \varepsilon^\lambda Y_4&=0,\\ \varepsilon\, Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + Y_3&=0,\\ \varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon\, Y_2 + Y_3&=0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$
$$(\lambda = 0,\ 1,\ 2).$$

Jede dieser 8 Geraden liegt noch (§ 42 a. E) in weiteren Haupträumen II. Art, z. B. die erste in:

$$Y_\alpha - \varepsilon^\lambda Y_\beta \qquad (\lambda=0, 1, 2;\ \alpha, \beta=1, 2, 3): \tag{4}$$

Die 8 Geraden liefern so 64 weitere Haupträume, welche aber paarweise identisch sind; so z. B. wird $Y_1 - \varepsilon Y_2 = 0$ sowohl von der ersten, als von der zweiten Geraden (3) geliefert. Daraus schliessen wir:

Einem Hauptraum II. Art gegenüber zerfallen die 45 *anderen in* 32, *welche mit ihm je zwei Hauptgerade gemein haben*, *und* 12, *welche mit ihm keine solche gemein haben.*

Nehmen wir nun weiter zwei Haupträume II. Art, welche keine Hauptgerade gemein haben, z. B. (2) und:

$$Y_3 - Y_4 = 0, \tag{5}$$

so haben von den 11 Haupträumen II. Art, welche mit (2) keine Hauptgerade gemein haben, noch 8 mit (5) je zwei solche gemein; es bleiben also noch 3, welche weder mit (2), noch mit (5) eine Hauptgerade gemein haben, nämlich:

$$Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4 = 0, \tag{6}$$

$$Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4 = 0, \tag{7}$$

$$Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4 = 0. \tag{8}$$

Da man sich nun leicht überzeugt, dass auch je zwei von diesen keine Hauptgerade gemein haben, so kann man den Satz aussprechen:

Man kann auf verschiedene Weisen fünf Haupträume II. Art so auswählen, dass keine zwei derselben eine Hauptgerade gemein haben.

Ein solches System von fünf Haupträumen wollen wir ein *Pentatop II. Art* nennen. Die *Anzahl* dieser Pentatope bestimmt sich folgendermassen: der erste Seitenraum eines solchen kann auf 45 Arten gewählt werden, der zweite auf 12, die 3 andern sind dann bestimmt. Jedes Pentatop wird so 20 mal erhalten; *also ist die gesuchte Anzahl:*

$$\frac{45 \cdot 12}{20} = 27. \tag{9}$$

Das zuerst betrachtete Pentatop II. Art muss demnach in sich übergehen bei allen Operationen einer Untergruppe L vom Index 27 *), also von der Ordnung 960; einer von 27 gleichberechtigten Untergruppen, deren jede eines der 27 Pentatope in sich überführt. Um uns in die Natur dieser Untergruppe L Einsicht zu verschaffen, führen wir die Seitenräume unseres Pentatops als neue Coordinatenräume ein durch die Gleichungen: **)

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= Y_1 - Y_2, \\
\eta_3 &= - Y_3 + Y_4, \\
\eta_4 &= \frac{i}{\sqrt{3}} (Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4), \\
\eta_5 &= \frac{i}{\sqrt{3}} (Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\
\eta_6 &= \frac{i}{\sqrt{3}} (Y_0 + \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4).
\end{aligned} \tag{10}$$

*) Dieser Schluss würde natürlich nicht zutreffen, wenn alle Substitutionen, welche ein bestimmtes Pentatop II. Art in sich überführen, auch noch ein zweites in sich überführten; man sieht aber aus den sogleich aufzustellenden Formeln, dass das nicht der Fall ist.

**) Die η haben also hier eine andere Bedeutung, als § 42.

Alsdann können wir aus unseren Erzeugenden (§ 39) sofort die folgenden 4 Operationen ableiten, welche diese neuen Coordinaten η, von multiplicativ zutretenden Einheitswurzeln abgesehen, nur unter sich vertauschen; nämlich:

(11)

B	D	E	F
$\eta_2' = \eta_4$	η_2	$\varepsilon\,\eta_2$	η_3
$\eta_3' = -\eta_3$	$-\eta_3$	$\varepsilon^2\eta_3$	η_2
$\eta_4' = -\eta_2$	$-\eta_4$	η_5	η_4
$\eta_5' = -\varepsilon^2\eta_6$	$-\eta_5$	η_6	η_5
$\eta_6' = +\varepsilon\,\eta_5$	$-\eta_6$	η_4	η_6

Dabei ist:

$$E = (D S_2^2)^2; \qquad F = (D C^2)^2. \tag{12}$$

Aus diesen 4 Substitutionen lässt sich nun eine Gruppe von *mindestens* 960 Operationen ableiten, welche alle das Pentatop II. Art in sich überführen. Denn sieht man für den Augenblick von den zutretenden Einheitswurzeln ab, so kann man aus B, E, F jede der 60 geraden Vertauschungen der 5 Grössen η erhalten. Transformirt man D durch diese Operationen, so erhält man Vorzeichenänderungen von irgend vier der η und damit auch von irgend zwei derselben, also eine Gruppe von 16 Operationen, welche mit jenen 60 combinirt gerade 960 Operationen liefern. Alle diese lassen das Pentatop II. Art (10) ungeändert, und es giebt kein zweites Pentatop II. Art, welches sie alle ungeändert lassen. *Sie bilden also in der That die gesuchte Gruppe L vom Index 27 und der Ordnung 960.*

Es ist mir nicht gelungen, ein einfaches Kriterium zu finden, welches entscheidet, ob eine vorgelegte *lineare Periodentransformation* dieser Untergruppe L angehört. —

Was *Invarianten* von L betrifft, so ist eine einfach zu bildende absolute Invariante das Product aller fünf η:

$$J_5 = \eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6. \tag{13}$$

Von noch niedrigerem Grade ist die folgende:

$$\begin{aligned} J_4 &= \eta_2^2\eta_3^2 + \eta_2^2\eta_4^2 + \eta_4^2\eta_5^2 + \eta_4^2\eta_6^2 + \eta_5^2\eta_6^2 \\ &\quad + \varepsilon(\eta_2^2\eta_5^2 + \eta_3^2\eta_6^2) + \varepsilon^2(\eta_2^2\eta_6^2 + \eta_3^2\eta_5^2) \\ &= \tfrac{1}{3}\,[Y_0^4 + 8\,Y_0(Y_1^3 + Y_2^3 + Y_3^3 + Y_4^3) + 48\,Y_1\,Y_2\,Y_3\,Y_4]; \end{aligned} \tag{14}$$

diese bleibt jedoch, wie wir später (§ 47) sehen werden, nicht nur bei L, sondern überhaupt bei allen Operationen von G absolut invariant. Mit ihrer Hülfe kann übrigens, wenn eine gerade Permutation der η vorgegeben ist, sofort entschieden werden, welche dritte Einheitswurzeln man beizufügen hat, um eine Operation von L zu erhalten.

§ 44.

Untergruppen vom Index 36.

Wir untersuchen nunmehr die gegenseitige Gruppirung unserer 27 Pentatope II. Art. Gehen wir aus von einem derselben, das etwa A_1 heissen möge, so sehen wir, dass sich ihm gegenüber die 26 andern spalten *in* 10, *welche mit ihm je einen Hauptraum II. Art gemein haben, und* 16, *für welche das nicht der Fall ist.* Greifen wir eines der letzteren heraus — es heisse A_2 — so sind unter den 15 übrigen noch 10 enthalten, welche auch mit A_2 keinen Hauptraum gemein haben. Sei A_3 eines von diesen, so bleiben 6, welche mit A_1, A_2, A_3; sei A_4 eines von diesen, so bleiben zwei — A_5, A_6 —, welche mit A_1, A_2, A_3, A_4 und wie sich herausstellt, auch unter sich keinen Hauptraum II. Art gemein haben. So gelangen wir zu *einem System von* 6 *Pentatopen II. Art, welche zusammen* 30 *verschiedene Haupträume II. Art enthalten.* Solcher Systeme giebt es, wie aus der eben beschriebenen Art ihrer Herleitung hervorgeht:

$$(1) \qquad \frac{27.16.10.6}{6.5.4.3} = 72;$$

eines derselben ist z. B. das folgende:

$$(2) \qquad A_1 \begin{cases} 2) & Y_1 - Y_2, \\ 3) & -Y_3 + Y_4, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4); \end{cases}$$

$$A_2 \begin{cases} 1) & \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4, \\ 3) & -\varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon Y_2, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4); \end{cases}$$

$$A_3 \begin{cases} 1) & \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2, \\ 2) & \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4, \\ 4) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 6) & \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4); \end{cases}$$

$$A_4\begin{cases} 1)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 2)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \quad Y_1 - \quad Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 3)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \quad Y_3 - \quad Y_4), \\ 5)\quad \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon^2 Y_3, \\ 6)\quad \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon\, Y_4; \end{cases}$$

$$A_5\begin{cases} 1)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \quad Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \quad Y_4), \\ 2)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \quad Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 3)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \quad Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 4)\quad Y_2 - \quad Y_4, \\ 6)\quad \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon\, Y_3; \end{cases}$$

$$A_6\begin{cases} 1)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \quad Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \quad Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 2)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \quad Y_4), \\ 3)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \quad Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 4)\quad Y_1 - \quad Y_3, \\ 5)\quad \varepsilon\, Y_2 - \varepsilon^2 Y_4. \end{cases}$$

Die den einzelnen Haupträumen beigesetzten Zahlen sollen sogleich erklärt werden.

Die 30 *vorstehend in* $A_1, A_2, \ldots, A_6$ *enthaltenen Räume lassen sich aber noch auf eine andere Art zu* 6 *Pentatopen II. Art anordnen,* nämlich wie folgt:

(3)
$$B_1\begin{cases} 2)\quad \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon\, Y_4, \\ 3)\ -\varepsilon\, Y_1 + \varepsilon^2 Y_2, \\ 4)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon\, Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon\, Y_4), \\ 5)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \quad Y_2 - \varepsilon\, Y_3 - \quad Y_4), \\ 6)\ \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \quad Y_1 - \varepsilon\, Y_2 - \quad Y_3 - \varepsilon^2 Y_4); \end{cases}$$

$$B_2 \begin{cases} 1) \quad Y_1 - Y_2, \\ 3) \quad \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4, \\ 4) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 6) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4); \end{cases}$$

$$B_3 \begin{cases} 1) \quad - Y_3 + Y_4, \\ 2) \quad -\varepsilon^2 Y_1 + \varepsilon Y_2, \\ 4) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 5) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 6) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4); \end{cases}$$

$$B_4 \begin{cases} 1) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - Y_2 - Y_3 - Y_4), \\ 2) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 3) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 5) \quad Y_2 - Y_4, \\ 6) \quad Y_1 - Y_3; \end{cases}$$

$$B_5 \begin{cases} 1) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 2) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - Y_4), \\ 3) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 4) \quad \varepsilon Y_1 - \varepsilon^2 Y_3, \\ 6) \quad \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_4; \end{cases}$$

$$B_6 \begin{cases} 1) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_3 - \varepsilon Y_4), \\ 2) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - \varepsilon Y_1 - Y_2 - Y_3 - \varepsilon^2 Y_4), \\ 3) \quad \frac{i}{\sqrt{3}}(Y_0 - Y_1 - \varepsilon Y_2 - \varepsilon^2 Y_3 - Y_4), \\ 4) \quad \varepsilon^2 Y_2 - \varepsilon Y_4, \\ 5) \quad \varepsilon^2 Y_1 - \varepsilon Y_3; \end{cases}$$

und zwar hängen, wie man sieht, diese beiden Systeme von je 6 Pentatopen in der Weise zusammen, dass jedes A_i mit jedem B_k für $i \gtrless k$ je einen Hauptraum, dagegen mit B_i keinen Hauptraum gemein hat. (In den Tabellen (2) und (3) ist jeder einzelne Hauptraum mit der Nummer desjenigen Pentatops bezeichnet, zu welchem er im andern System gehört).

Untersuchen wir nunmehr näher die Beziehung zwischen A_1 und B_1 (d. h. also zwischen irgend zwei Pentatopen II. Art, welche keinen Hauptraum gemein haben). Benutzen wir wieder (wie § 43) für die Räume von A_1 die Bezeichnung η, für die von B_1 in analoger Weise die Bezeichnung ζ, so erhalten wir durch Elimination der Y die Relationen:

$$(4)\quad \begin{aligned}
\zeta_2 &= \tfrac{1}{2}(\phantom{\eta_2 + {}} \eta_3 + \eta_4 + \varepsilon\,\eta_5 + \varepsilon^2\eta_6),\\
\zeta_3 &= \tfrac{1}{2}(\eta_2 \phantom{{}+\eta_3} + \eta_4 + \varepsilon^2\eta_5 + \varepsilon\,\eta_6),\\
\zeta_4 &= \tfrac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3 \phantom{{}+\eta_4} + \eta_5 + \eta_6),\\
\zeta_5 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \eta_4 \phantom{{}+\eta_5} + \eta_6),\\
\zeta_6 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon\,\eta_3 + \eta_4 + \eta_5 \phantom{{}+\eta_6}),
\end{aligned}$$

deren Umkehrungen sind:

$$(5)\quad \begin{aligned}
\eta_2 &= \tfrac{1}{2}(\phantom{\zeta_2 + {}} \zeta_3 + \zeta_4 + \varepsilon^2\zeta_5 + \varepsilon\,\zeta_6),\\
\eta_3 &= \tfrac{1}{2}(\zeta_2 \phantom{{}+\zeta_3} + \zeta_4 + \varepsilon\,\zeta_5 + \varepsilon^2\zeta_6),\\
\eta_4 &= \tfrac{1}{2}(\zeta_2 + \zeta_3 \phantom{{}+\zeta_4} + \zeta_5 + \zeta_6),\\
\eta_5 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon^2\zeta_2 + \varepsilon\,\zeta_3 + \zeta_4 \phantom{{}+\zeta_5} + \zeta_6),\\
\eta_6 &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon\,\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 \phantom{{}+\zeta_6}).
\end{aligned}$$

Aus dem Fehlen der Diagonalglieder in beiden Gleichungssystemen folgt zunächst:

Die beiden Pentatope II. Art A_1 und B_1 sind einander gleichzeitig ein- und umbeschrieben.

Ferner aber folgt aus der Symmetrie der Coefficientensysteme gegen die Hauptdiagonale:

Die beiden Pentatope A_1 und B_1 sind einander conjugirt in Bezug auf den quadratischen Raum:

$$(6)\qquad \eta_2\zeta_2 + \eta_3\zeta_3 + \eta_4\zeta_4 + \eta_5\zeta_5 + \eta_6\zeta_6 = 0$$

oder:

$$(7) \quad \eta_2\eta_3 + \eta_2\eta_4 + \eta_3\eta_4 + \eta_4\eta_5 + \eta_4\eta_6 + \eta_5\eta_6 + \varepsilon(\eta_2\eta_5 + \eta_3\eta_6) + \varepsilon^2(\eta_2\eta_6 + \eta_3\eta_5) = 0$$

oder endlich:

$$(8) \qquad q \equiv Y_0^2 + 4\varepsilon Y_1 Y_4 + 4\varepsilon^2 Y_2 Y_3 = 0.$$

Die letzte Form der Gleichung dieses Raumes zeigt, dass derselbe ungeändert bleibt, sowohl wenn man Y_1 mit Y_4 vertauscht, als auch, wenn man Y_1 und Y_3 mit ε, Y_2 und Y_4 mit ε^2 multiplicirt. Bei diesen Operationen und den aus ihrer Combination sich ergebenden werden die 6 Paare (A_1B_1), (A_2B_2), ..., (A_6B_6) transitiv vertauscht; daraus folgt, dass die beiden Pentatope *jedes* solchen Paares in Bezug auf $q = 0$ einander conjugirt sind. Zusammenfassend können wir also sagen:

Von unseren 27 *Pentatopen II. Art ordnen sich* 36 *mal je* 12 *zu einer „Doppelsechs" wie:*

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6, \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{matrix}$$

zusammen. Jedes Pentatop der einen Hälfte einer solchen Doppelsechs ist dem entsprechenden (mit gleichem Index bezeichneten) der anderen Hälfte gleichzeitig ein- und umbeschrieben und in Bezug auf einen quadratischen Raum conjugirt; dieser Raum ist für alle 6 *Paare der Doppelsechs derselbe.*

Eine solche Doppelsechs — und damit auch die Form q — geht in sich über bei allen Operationen einer bestimmten Untergruppe unserer Hauptgruppe G; dieselbe möge mit M bezeichnet werden. Sie besteht aus:

$$(9) \qquad \frac{25920}{36} = 720$$

Operationen: die sechs Paare können nämlich auf alle möglichen Arten mit einander vertauscht werden. Jede *ungerade* Vertauschung der 6 Paare ist dabei mit einer gleichzeitigen Vertauschung der beiden Hälften verbunden. Die Gruppe ist also *holoedrisch isomorph mit der Gruppe der Vertauschungen von sechs Dingen.*

§ 45.

Andere Darstellung dieser Untergruppe *M*.

Eine mit der Gruppe der Vertauschungen von 6 Dingen isomorphe Gruppe P von 720 Collineationen wird im quinären Gebiet auch erhalten, wenn man überzählige, durch die Relation:

$$(1) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 = 0$$

verbundene Punktcoordinaten ξ einführt und die durch die Vertauschungen der ξ dargestellten Collineationen ins Auge fasst. Es liegt

die Frage nahe, ob die Gruppe M des vorigen Paragraphen in dieser Weise dargestellt werden kann, und wir wollen zeigen, dass das in der That möglich ist. Angenommen nämlich, es existirten 6 solche lineare Räume $\xi_i = 0$, so muss der *einzelne* derselben bei 120 von den 720 Operationen von M in sich übergehen. Nun enthält aber die Gruppe der Vertauschungen von 6 Dingen (hier der 6 Paare von Pentatopen) *zweierlei* Untergruppen von je 120 Operationen; nämlich einmal die Gruppen der Vertauschungen von je fünfen, dann die von Cauchy u. a. untersuchten zweifach transitiven Gruppen, über welche man etwa Serret's Handbuch der Algebra art. 452 vergleichen möge. Wir wollen nun zeigen, dass zwar nicht bei einer Untergruppe der ersten dieser beiden Arten, wohl aber bei einer solchen der zweiten ein linearer Raum in sich übergeht.

Was den ersten Theil dieser Behauptung betrifft, so wird es genügen, den Beweis für die in der betreffenden Untergruppe enthaltenen *geraden* Operationen zu führen. Werden aber unter Festhaltung von A_1 und B_1 die übrigen Paare auf alle möglichen geraden Arten unter sich vertauscht, so erleiden auch die Seitenräume von A_1, also die η, alle möglichen geraden Vertauschungen; dabei tritt nur zu jedem η eine bestimmte dritte Einheitswurzel*). Dass kein linearer Raum bei allen diesen Operationen in sich übergeht, ist sofort zu sehen.

Anders verhält sich die Sache bei den Untergruppen der zweiten Art. Fassen wir auch bei einer solchen zunächst nur diejenigen ihrer Operationen ins Auge, welche A_1 und B_1 ungeändert lassen; diese vertauschen die fünf übrigen Paare, also auch die η, *halbmetacyklisch* (wieder abgesehen von den zu den η tretenden dritten Einheitswurzeln). Eine solche Gruppe wird z. B. erzeugt von den beiden Operationen:

$$(2)\qquad \eta_2' = \varepsilon\eta_3,\quad \eta_3' = \varepsilon^2\eta_4,\quad \eta_4' = \varepsilon\eta_5,\quad \eta_5' = \varepsilon^2\eta_6,\quad \eta_6' = \eta_2$$

und:

$$(3)\qquad \eta_2' = \eta_2,\quad \eta_3' = \varepsilon^2\eta_6,\quad \eta_4' = \varepsilon\eta_5,\quad \eta_5' = \varepsilon^2\eta_4,\quad \eta_6' = \varepsilon\eta_3;$$

bei beiden geht der lineare Raum:

$$(4)\qquad \varepsilon^2\eta_2 + \eta_3 + \varepsilon^2\eta_4 + \eta_5 + \varepsilon^2\eta_6 \equiv Y_0 - 2\varepsilon^2 Y_2 - 2Y_3 = 0$$

in sich über. Er geht aber auch in sich über bei der zu M gehörenden Operation:

$$(5)\qquad Y_0' = -Y_0,\quad Y_1' = -Y_4,\quad Y_2' = -Y_2,\quad Y_3' = -Y_3,\quad Y_4' = -Y_1,$$

welche A_1 mit B_4, A_2 mit B_5, A_3 mit B_6 und ebenso B_1 mit A_4, B_2 mit A_5, B_3 mit A_6 vertauscht. Die 3 Operationen (2), (3), (5) erzeugen aber in der That eine aus 120 Operationen bestehende

*) *Welche* dritte Einheitswurzeln zuzusetzen sind, bestimmt sich daraus, dass q in sich übergeht (Gl. 7).

Untergruppe von M. Die übrigen Operationen von M können dann den Raum (4) nur in noch 5 andere Lagen überführen. Auf diese Weise gelangen wir zu folgendem Satze:

Die 720 linearen Substitutionen unserer Gruppe M lassen sich darstellen als die 720 Vertauschungen der sechs neuen, durch die Relation:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 = 0$$

verbundenen Coordinaten:

$$(6)\quad \begin{cases} \xi_1 = Y_0 - 2\varepsilon^2 Y_2 - 2\,Y_3, & \xi_4 = - Y_0 + 2\varepsilon\, Y_1 + 2\,Y_4, \\ \xi_2 = Y_0 - 2\varepsilon\, Y_2 - 2\varepsilon\, Y_3, & \xi_5 = - Y_0 + 2\varepsilon^2 Y_1 + 2\varepsilon^2 Y_4, \\ \xi_3 = Y_0 - 2\,Y_2 - 2\varepsilon^2 Y_3, & \xi_6 = - Y_0 + 2\,Y_1 + 2\varepsilon\, Y_4. \end{cases}$$

*Dabei ist mit jeder ungeraden Vertauschung ein Zeichenwechsel sämmtlicher ξ zu verbinden.**)

Die *Invarianten* von M sind nichts anderes als die symmetrischen bez. alternirenden Functionen dieser ξ; so ist z. B. die in § 44 bereits aufgestellte Invariante 2. Grades:

$$(7)\qquad q = \frac{1}{6}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2\right).$$

Obwohl noch verschiedene naheliegende Fragen zu erörtern sein würden, brechen wir doch die Untersuchung der Untergruppen hier ab, um uns der Aufstellung der Invarianten von G zuzuwenden.

X. Abschnitt.

Invarianten der Gruppe G.

§ 46.

Methode zur Ableitung der Invarianten.

Wir können die Invarianten unserer Hauptgruppe G ohne Schwierigkeit aufstellen, wenn wir die Resultate der §§ 40, 41 combiniren: es sind diejenigen ganzen Functionen der Formen des § 41, welche zugleich symmetrisch oder alternirend in Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sind und diese Y nur im Product oder in Potenzen mit durch 3 theilbaren Exponenten enthalten. Wegen der in der letztgenannten Bedingung enthaltenen Beschränkung kommen von den Formen des § 41 nur:

$$(1)\qquad \Phi,\ u;\ t,\ \Psi_1,\ C_6;\ C_9;\ \Phi_3;\ t_3,\ C_{12};\ C_{18}$$

in Betracht; nämlich die Producte und Potenzen wie Ψ^3, $\mathfrak{C}_{12}^3$, $\Psi\mathfrak{C}_{12}$, $\Psi\Psi_2$, $\Psi\Phi_1$ u. s. w. lassen sich durch die 10 Formen (1) mit Hilfe

*) Hiernach ist die entgegenstehende Angabe in dem in den Göttinger Nachrichten erschienenen Auszug zu berichtigen.

Gordan'scher Reihenentwicklungen rational und ganz ausdrücken.*) Dadurch ist der Weg zur Berechnung der Invarianten vorgeschriebenen Grades von G vorgezeichnet: *man bilde aus den Formen* (1) *die allgemeinste Function dieses Grades mit unbestimmten Coefficienten und bestimme die letzteren durch die Forderung, dass die entstehende Invariante in Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 symmetrisch, bezw. alternirend ausfallen soll.*

Der Gang der Rechnung möge am Beispiel der Invarianten 12. Grades erläutert werden. Die allgemeinste Verbindung dieses Grades aus den Formen (1) ist:

$$\alpha\Phi^3 + \beta t^2 + \gamma t\Phi_1 + \delta u\Phi^2 + \varepsilon\Psi\Psi_2 + \zeta u^2\Phi + \eta C_6 t + \vartheta t_3$$
$$+ \iota u^3 + \varkappa C_6\Psi_1 + \lambda C_{12} + \mu C_6^2;$$

soll diese die verlangten Symmetrieeigenschaften besitzen, so müssen ihre Coefficienten den Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{lrl}
(1) & 24\alpha - 40\beta = & -\gamma + \delta, \\
(2) & 192\alpha + 384\beta = & \zeta + \eta, \\
(3) & 24\gamma + 16\delta = & 2\zeta - 10\eta, \\
(4) & -360\gamma + 96\delta = & -3\varepsilon + 12\zeta, \\
(5) & 512\alpha + 320\beta = & \vartheta + \iota - \varkappa, \\
(6) & -72\gamma + 64\delta = & -\varepsilon + 8\zeta - 20\eta \\
(6a) & = & 3\vartheta + 3\iota + 9\varkappa, \\
(7) & -2\varepsilon + 16\zeta + 200\eta = & 222\vartheta + 6\iota + 30\varkappa, \\
(8) & -144\gamma + 384\delta = & -54\vartheta + 18\iota + 18\varkappa, \\
(9) & -18\varepsilon + 288\zeta = & 324\vartheta + 108\iota, \\
(10) & 3\varepsilon + 96\zeta = & -108\vartheta + 36\iota - 180\varkappa, \\
(11) & 64\beta = & \lambda + \mu, \\
(12) & -32\gamma = & 8\vartheta + 4\varkappa \\
(12a) & = & 4\lambda - 20\mu, \\
(13) & \varepsilon - 8\eta = & 6\lambda + 102\mu, \\
(14) & 2\varepsilon + 80\eta = & 24\vartheta - 36\varkappa \\
(14a) & = & 228\lambda + 180\mu.
\end{array}$$

Wir setzen in denselben:

$$\gamma = \qquad 40\beta + 3\gamma'$$

dann liefert (1);

$$\delta = 24\alpha \qquad + 3\gamma';$$

hierauf folgt aus (2), (3), (4)

*) In den folgenden Rechnungen ist stellenweise Ψ^3 statt t^2 und $\Psi\Psi_2$ statt Ψ_1^2 benutzt; vgl. § 41, Glchgen (10) und (18).

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \; 6400\beta + 304\gamma', \\
\zeta &= 192\alpha + \;\; 400\beta + \;\; 10\gamma', \\
\eta &= \; - \;\;\; 16\beta - \;\; 10\gamma',
\end{aligned}$$

und diese Werthe befriedigen gleichzeitig (6), was auch α, β, γ' sein mögen; dann folgt aus (5), (6a), (8):

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \; - \;\; 11\gamma', \\
\iota &= 512\alpha \; + \;\;\; 9\gamma', \\
\varkappa &= \; - 320\beta - \;\;\; 2\gamma'
\end{aligned}$$

und (7), (9), (10), (14) sind von selbst befriedigt; endlich aus (11) und (12):

$$\begin{aligned}
\lambda &= \; - \;\; 4\gamma', \\
\mu &= 64\beta + \;\; 4\gamma'
\end{aligned}$$

und damit sind auch die allein noch übrigen Gleichungen (13) und (14a) erfüllt. Es existiren also 3 unabhängige Lösungen unseres Gleichungssystems, d. h. 3 linear unabhängige Invarianten 12. Grades. Wir können als solche etwa wählen:

$$\text{I.} \quad \Phi^3 + 24u\Phi^2 + 192u^2\Phi + 512u^3 = (\Phi + 8u)^3;$$

$$\begin{aligned}
\text{II.} \quad & t^2 + 40t\Psi_1 + 400\Psi_1^2 - 16tC_6 - 320C_6\Psi_1 + 64C_6^2 \\
& = (t + 20\Psi_1 - 8C_6)^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III.} \quad & 3t\Psi_1 + 3u\Phi^2 + 19\Psi_1^2 - 9u^2\Phi - 10C_6t - 11t_3 + 9u^3 \\
& - 2C_6\Psi_1 - 4C_{12} + 4C_6^2.
\end{aligned}$$

In gleicher Weise gestaltet sich die Rechnung in jedem Falle: das System linearer Gleichungen, aus welchem die Coefficienten zu berechnen sind, zerfällt jedesmal in Theilsysteme, welche ein successives Vorgehen gestatten.

§ 47.

Zusammenstellung der Resultate.

Auf dem im vorigen Paragraphen erläuterten Wege gelangt man nun zu einer Reihe von Invarianten unserer Gruppe. Die Werthe derselben sind im folgenden in dreifacher Form zusammengestellt: einmal ausgedrückt durch die Formen des § 41, dann explicite in den Y, endlich ausgedrückt durch die symmetrischen Functionen von Y_1^3, Y_2^3, Y_3^3, Y_4^3 (§ 40), nämlich:

$$(1) \quad \begin{aligned}
a_1 &= - Y_1^3 - Y_2^3 - Y_3^3 - Y_4^3, \\
a_2 &= Y_1^3Y_2^3 + Y_1^3Y_3^3 + Y_1^3Y_4^3 + Y_2^3Y_3^3 + Y_3^3Y_4^3 + Y_4^3Y_2^3, \\
a_3 &= - Y_1^3Y_2^3Y_3^3 - Y_1^3Y_2^3Y_4^3 - Y_1^3Y_3^3Y_4^3 - Y_2^3Y_3^3Y_4^3, \\
a_4 &= Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3.
\end{aligned}$$

In den an zweiter Stelle stehenden Ausdrücken sind die Summenzeichen auszudehnen über alle *verschiedenen* Glieder, welche aus dem jedesmal darunterstehenden Ausdruck durch Vertauschung von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 hervorgehen. Die Formen sind:

eine Invariante *vierten* Grades*):

$$(1)\quad \begin{aligned} J_4 &= \Phi + 8u \\ &= Y_0^4 + 8\,Y_0 \Sigma\, Y_1^3 + 48\,Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &= Y_0^4 - 8a_1 Y_0 + 48\sqrt[3]{a_4}; \end{aligned}$$

eine Invariante *sechsten* Grades:

$$(2)\quad \begin{aligned} J_6 &= t + 20\Psi_1 - 8C_6 \\ &= Y_0^6 - 20\,Y_0^3 \Sigma\, Y_1^3 + 360\,Y_0^2 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 + 80\,\Sigma\, Y_1^3 Y_2^3 \\ &\quad - 8\,\Sigma\, Y_1^6 \\ &= Y_0^6 - 20a_1 Y_0^3 + 96a_2 - 8a_1^2 + 360\sqrt[3]{a_4}\,Y_0^2; \end{aligned}$$

eine Invariante *zehnten* Grades:

$$(3)\quad \begin{aligned} J_{10} &= \tfrac{1}{24}(\Phi\Psi_1 + ut + 2\Phi C_6 + 2u\Psi_1 - 2\Phi_3 - 2uC_0) \\ &= Y_0^6 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 - Y_0^4 \Sigma\, Y_1^3 Y_2^3 + Y_0^3 \Sigma\, Y_1^4 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 9\,Y_0^2 Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 + Y_0 \Sigma\, Y_1^6 Y_2^3 - 6\,Y_0 \Sigma\, Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 \\ &\quad - 2\,\Sigma\, Y_1^7 Y_2 Y_3 Y_4 + 2\,\Sigma\, Y_1^4 Y_2^4 Y_3 Y_4 \\ &= -a_2 Y_0^4 + (9a_3 - a_1 a_2) Y_0 + \sqrt[3]{a_4}\,[Y_0^6 - a_1 Y_0^3 + 6a_2 - 2a_1^2] \\ &\quad + 9\sqrt[3]{a_4^2}\,Y_0^2; \end{aligned}$$

eine Invariante *zwölften* Grades:

$$(4)\quad \begin{aligned} J_{12} &= \tfrac{1}{24}(3t\Psi_1 + 3u\Phi^2 + 19\Psi_1^2 - 9u^2\Phi - 10C_6 t - 11t_3 + 9u^3 \\ &\qquad - 2C_6\Psi_1 - 4C_{12} + 4C_6^2) \\ &= 3\,Y_0^8 Y_1 Y_2 Y_3 Y_4 + 5\,Y_0^6 \Sigma\, Y_1^3 Y_2^3 - 33\,Y_0^5 \Sigma\, Y_1^4 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 243\,Y_0^4 Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 - Y_0^3 \Sigma\, Y_1^6 Y_2^3 \\ &\quad - 102\,Y_0^3 \Sigma\, Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 + 30\,Y_0^2 \Sigma\, Y_1^7 Y_2 Y_3 Y_4 \\ &\quad + 78\,Y_0^2 \Sigma\, Y_1^4 Y_2^4 Y_3 Y_4 - 108\,Y_0 \Sigma\, Y_1^5 Y_2^2 Y_3^2 Y_4^2 \\ &\quad - 4\,\Sigma\, Y_1^9 Y_2^3 + 16\,\Sigma\, Y_1^6 Y_2^6 - 8\,\Sigma\, Y_1^6 Y_2^3 Y_3^3 \\ &\quad + 168\,Y_1^3 Y_2^3 Y_3^3 Y_4^3 \\ &= 5a_2 Y_0^6 + (99a_3 + a_1 a_2) Y_0^3 + 216a_4 - 36a_1 a_3 + 24a_2^2 - 4a_1^2 a_2 \\ &\quad + \sqrt[3]{a_4}\,[3\,Y_0^8 - 33a_1 Y_0^5 + (18a_2 + 30a_1^2) Y_0^2] \\ &\quad + \sqrt[3]{a_4^2}\,[243\,Y_0^4 - 108a_1 Y_0]; \end{aligned}$$

---

*) Dieselbe, welche uns bereits § 43, Glchg (14) begegnete. — Unter $\sqrt[3]{a_4}$ ist natürlich $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ zu verstehen.

eine Invariante *achtzehnten* Grades:

$$
\begin{aligned}
(5)\quad J_{18} = \tfrac{1}{864}\,(&72t\Psi\Psi_2 + 9u\Phi^2\Psi_1 + 9u^2\Phi t + 288C_6\Psi^3\\
&+ 4\Phi^2\Phi_3 - 18tt_3 - 42u^2\Phi\Psi_1 - 20u^3t - 18C_6t\Psi_1\\
&- 18C_6\Phi^2u + 84C_{12}t - 72u\Phi\Phi_3 + 162u^3\Psi_1\\
&- 240C_6\Psi\Psi_2 + 12C_6u^2\Phi - 6C_6^2t + 24\Psi_1C_{12} - 36u^2\Phi_3\\
&- 6C_6t_3 - 18C_6u^3 - 12C_6^2\Psi_1 - 4C_{18} + 6C_6C_{12} - 2C_6^3)\\
= 3Y_0^{10}&Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 4Y_0^9\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3 + 12Y_0^8\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4\\
&- 36Y_0^7\Sigma Y_1^5Y_2^2Y_3^2Y_4^3 - Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^6 + 10Y_0^6\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3\\
&+ 96Y_0^6Y_1^3Y_2^3Y_3^3Y_4^3 - 12Y_0^5\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3Y_4\\
&- 90Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4 + 27Y_0^4\Sigma Y_1^8Y_2^2Y_3^2Y_4^2\\
&+ 108Y_0^4\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^2Y_4^2 + 2Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^6 - 8Y_0^3\Sigma Y_1^9Y_2^3Y_3^3\\
&+ 4Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3 - 168Y_0^3\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3\\
&+ 6Y_0^2\Sigma Y_1^{10}Y_2^4Y_3Y_4 - 24Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^7Y_3Y_4\\
&+ 12Y_0^2\Sigma Y_1^7Y_2^4Y_3^4Y_4 + 315Y_0^2Y_1^4Y_2^4Y_3^4Y_4^4\\
&+ 12Y_0\Sigma Y_1^{11}Y_2^2Y_3^2Y_4^2 + 18Y_0\Sigma Y_1^8Y_2^5Y_3^2Y_4^2\\
&- 27Y_0\Sigma Y_1^5Y_2^5Y_3^5Y_4^2 - \Sigma Y_1^{12}Y_2^6 + 2\Sigma Y_1^{12}Y_2^3Y_3^3\\
&+ 2\Sigma Y_1^9Y_2^9 - 2\Sigma Y_1^9Y_2^6Y_3^3 - 8\Sigma Y_1^6Y_2^3Y_3^3Y_4^3\\
&+ 6\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^6 + 8\Sigma Y_1^6Y_2^6Y_3^3Y_4^3\\
= 4a_3&Y_0^9 + (54a_4 + 12a_1a_3 - a_2^2)Y_0^6 + (162a_1a_4 - 18a_2a_3\\
&+ 12a_1^2a_3 - 2a_1a_2^2)Y_0^3 + (27a_3^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3\\
&+ 4a_2^3 - a_1^2a_2^2)\\
&+ \sqrt[3]{a_4}\,[12a_2Y_0^8 + (54a_3 + 12a_1a_2)Y_0^5 + (243a_4 + 54a_1a_3\\
&\qquad - 36a_2^2 + 6a_1^2a_2)Y_0^2]\\
&+ \sqrt[3]{a_4^2}\,[3Y_0^{10} + 36a_1Y_1^7 + (54a_2 + 27a_1^2)Y_0^4\\
&\qquad + (45a_3 + 18a_1a_2 - 12a_1^3)Y_0].
\end{aligned}
$$

Die hier aufgeführten J_{10}, J_{12}, J_{18} sind vor andern Invarianten desselben Grades, die sich von ihnen um Verbindungen der niedrigeren Invarianten unterscheiden, dadurch ausgezeichnet, dass sie an der Stelle:

$$Y_1 = 0,\quad Y_2 = 0,\quad Y_3 = 0,\quad Y_4 = 0$$

und also in sämmtlichen Hauptpunkten I. Art (§ 40) von möglichst hoher Ordnung Null werden.

Ausser den aufgeführten Invarianten *geraden* Grades besitzt unsere Gruppe noch eine Invariante *ungeraden*, nämlich *fünfundvierzigsten* Grades: das Product der 45 Linearformen (§ 42, (6), (7)), welche gleich Null gesetzt *Haupträume II. Art* darstellen.

§ 48.

Die Functionaldeterminante der fünf Invarianten geraden Grades.

Für den in § 50 zu führenden Beweis der Vollständigkeit unseres Formensystems ist es nothwendig zu zeigen, dass die 5 *Formen* J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18} *von einander unabhängige Functionen der* Y *sind*, m. a. W. dass ihre Functionaldeterminante nicht identisch Null ist. Das aber wird bewiesen sein, sobald wir ein specielles Werthsystem der Y anzugeben im Stande sind, für welches sie einen von Null verschiedenen Werth besitzt. Zu diesem Zwecke setzen wir (mit der bekannten Bezeichnungsweise der Functionaldeterminanten):

$$(1) \quad \begin{pmatrix} J_4 & J_6 & J_8 & J_{10} & J_{12} \\ Y_0 & Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_4 & J_6 & J_8 & J_{10} & J_{12} \\ Y_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{pmatrix}$$

und berechnen die beiden Factoren rechts für:

$$Y_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Der erste Factor wird dabei:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 a_4^{-\frac{2}{3}} \\ 0 & 0 & 96 & 0 & 0 \\ 9 a_3 & 0 & 6\sqrt[3]{a_4} & 0 & 0 \\ 0 & -36 a_3 & 0 & 0 & 216 \\ 45 a_3 \sqrt[3]{a_4^2} & 0 & 0 & 54 a_3 & 0 \end{vmatrix} = 2^{12}\, 3^8\, a_3^3\, a_4^{-\frac{2}{3}}.$$

Der zweite Factor wird gleich dem Product aus $3^4 a_4^{\frac{2}{3}}$ in das Differenzenproduct der Y^3; das letztere aber reducirt sich für $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ auf:

$$(3) \qquad \frac{1}{4}\sqrt{256 a_4^3 - 27 a_3^4},$$

sodass wir schliesslich erhalten:

Unsere Functionaldeterminante reducirt sich für $Y_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ *auf:*

$$(4) \qquad 2^{10}\, 3^{12}\, a_3^3 \sqrt{256 a_4^3 - 27 a_3^4},$$

ist also sicher nicht identisch Null.

Ist aber das erst bewiesen, so kann man, wie folgt, weiter schliessen: Wegen des zweiten Factors in (1) ist die Functionaldeterminante durch $Y_1 - Y_2$ theilbar; wegen ihrer invarianten Natur muss sie also durch J_{45} theilbar sein; da sie aber selbst vom 45. Grad ist, *kann sie sich von* J_{45} *nur durch einen rein numerischen Factor unterscheiden.*

§ 49.

Eine besondere Invariante 40. Grades.

Das Product der 40 Linearformen (§ 40, (4), (5), (6)), welche $=0$ gesetzt Haupträume I. Art darstellen, ist ebenfalls eine Invariante unserer Gruppe. Wir wollen dieselbe mit F_{40} bezeichnen und ihre Beziehungen zu den Formen des § 47 untersuchen. Zu diesem Zwecke verschaffen wir uns eine ganze Function von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}, welche durch Y_0 theilbar ist; vermöge ihrer Invarianteneigenschaft muss sie dann durch F_{40} theilbar sein, und es wird sich herausstellen, dass sie sich von F_{40} nur durch einen Zahlenfactor unterscheidet.

Diese Rechnung gestaltet sich nun folgendermassen: Für $Y_0=0$ reduciren sich unsere Invarianten J_n auf gewisse Terme, die wir für den Augenblick ihre „*Leitglieder*" nennen und mit L_n bezeichnen wollen. Da diese 5 Grössen L nur von den 4 Grössen a abhängen, so muss zwischen ihnen eine Relation bestehen, welche auf folgendem Wege durch Elimination der a erhalten werden kann. Wir eliminiren zunächst a_4, indem wir:

$$L_6' = \frac{24L_{10}}{L_4} = 3a_2 - a_1^2, \tag{1}$$

$$L_{12}' = 2^9 L_{12} - L_4^3 = 2^{11}(-9a_1a_3 + 6a_2^2 - a_1^2 a_2) \tag{2}$$

einführen. Hierauf bestimmen wir die von L_6' freien Glieder des Resultats*), indem wir überall $3a_2$ durch a_1^2 ersetzen; dadurch reducirt sich:

$$L_6 \text{ auf } M_6 = 24a_1^2, \tag{3}$$

$$L_{12}' \text{ auf } M_{12} = 2^{11}\left(-9a_1a_3 + \frac{1}{3}a_1^4\right), \tag{4}$$

$$L_{18} \text{ auf } M_{18} = 27a_3^2 - 2a_1^3a_3 + \frac{1}{27}a_1^6. \tag{5}$$

Zwischen diesen Formen M besteht die Relation

$$M_{12}^2 - 2^{19}M_6M_{18} = 0,$$

daraus folgt, dass $L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18}$ durch L_6' theilbar sein muss. In der That findet man:

$$\begin{aligned} L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18} &= 2^{24}L_6'(a_1^3a_3 + 9a_1a_2a_3 - a_2^3 - 27a_3^2) \\ &= 2^{24}L_6'L_{18}'. \end{aligned} \tag{7}$$

Die hierdurch definirte Function L_{18}' wird für $a_1^2=3a_2$ mit $-L_{18}$ identisch; daraus folgt dass $L_{18}'+L_{18}$ durch L_6' theilbar sein muss. So fortschliessend findet man:

$$L_{12}'^2 - 2^{19}L_6L_{18} = -2^{24}L_6'L_{18} + \frac{2^{13}}{3}L_6'^2L_{12}' - \frac{2^{21}}{3^3}L_6'^3L_6 + \frac{2^{21}}{3^3}L_6'^4. \tag{8}$$

*) Diese werden uns ohnehin später besonders interessiren, vgl. § 57 a. E.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die gesuchte *Relation zwischen den Leitgliedern* L, wenn wir für L_6' und L_{12}' ihre Werthe setzen und mit L_4^4 multipliciren, in folgender Form:

$$(9)\qquad L_4^4[(2^9L_{12}-L_4^3)^2-2^{19}L_6L_{18}]+3\cdot 2^{27}L_4^3L_{10}L_{18}$$
$$-3\cdot 2^{19}L_4^2L_{10}^2(2^9L_{12}-L_4^3)+2^{30}L_4L_{10}^3L_6-3\cdot 2^{36}L_{10}^4=0$$

oder:

$$(10)\qquad [L_4^2(2^9L_{12}-L_4^3)-3\cdot 2^{18}L_{10}^2]^2$$
$$-2^{19}[L_4L_6-3\cdot 2^8L_{10}]\,[L_4^3L_{18}-2^{11}L_{10}^3]=0.$$

Setzen wir hier in dem auf der linken Seite stehenden Aggregat statt der L wieder die J, so wird der entstehende Ausdruck durch Y_0, also wegen seiner Invariantennatur durch F_{40} theilbar sein müssen. Da er aber selbst vom Grade 40 in den Y ist, so kann er sich von F_{40} nur um einen numerischen Factor unterscheiden; diesen bestimmt man sofort aus dem (rechts nur in J_4^{10} vorkommenden) Glied mit Y_0^{40}. So erhält man*):

$$(11)\qquad 3^{33}F_{40}=[J_4^2(2^9J_{12}-J_4^3)-3\cdot 2^{18}J_{10}^2]^2$$
$$-2^{19}[J_4J_6-3\cdot 2^8J_{10}]\,[J_4^3J_{18}-2^{11}J_{10}^3].$$

§ 50.

Beweis der Vollständigkeit des Formensystems.

Nach den in den beiden letzten Paragraphen getroffenen Vorbereitungen kann nunmehr der Beweis für die Vollständigkeit unseres Formensystems ganz ebenso geführt werden, wie ihn Herr Maschke**) für das Formensystem der z geführt hat. Denn zunächst folgt aus dem Ergebniss von § 48, dass für hinlänglich allgemeine Werthe a, b, c, d, e das Gleichungssystem:

$$(1)\qquad J_4=a,\quad J_6=b,\quad J_{10}=c,\quad J_{12}=d,\quad J_{18}=e$$

weder zusammenfallende Lösungen besitzen kann, noch unendlich viele. Ferner kann wie folgt bewiesen werden, dass dieses Gleichungssystem auch nicht durch unendlich grosse Werthe der Y befriedigt werden kann: Angenommen, das sei möglich, so müsste es auch möglich sein, das Gleichungssystem:

$$(2)\qquad J_4=0,\quad J_6=0,\quad J_{10}=0,\quad J_{12}=0,\quad J_{18}=0$$

durch Werthe der Y zu befriedigen, welche nicht sämmtlich 0 sind. Aber für ein Werthsystem der Y, welches den Gleichungen (2) genügt, ist wegen Glchg. (11) des § 49 auch:

---

*) Im Auszug in den Gött. Nachrichten ist Glchg. (8) dementsprechend zu corrigiren.

**) Dieser Ann. Bd. 33, p. 340 ff.

(3) $$F_{40} = 0,$$

also muss für ein solches Werthsystem auch mindestens einer der 40 Factoren von F_{40} verschwinden. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir annehmen, dieser verschwindende Factor sei Y_0. Aber wenn $Y_0 = 0$ ist, kann J_4 nicht 0 sein, wenn nicht zugleich eines der 4 andern Y Null ist. Sei etwa neben $Y_0 = 0$ noch $Y_1 = 0$, so wird auch $J_{10} = 0$, während die 3 andern Gleichungen (2) sich auf:

(4) $$C_6 = 0, \quad C_6^2 - C_{12} = 0, \quad C_6^3 - 3C_6C_{12} + 2C_{18} = 0$$

reduciren. Diese aber lassen*) keine anderen Lösungen zu als:

(5) $$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 0.$$

Es können also die Gleichungen (2) nicht durch von 0 verschiedene und folglich die Gleichungen (1) nicht durch unendlich grosse Werthe der Y befriedigt werden. Halten wir dieses Resultat mit dem zu Beginn des Paragraphen ausgesprochenen zusammen, so ergiebt sich:

Das Gleichungssystem (1) *besitzt für allgemeine Werthe der* a, b, c, d, e:

(4) $$4 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 18 = 51840$$

endliche und von einander verschiedene Lösungen.

Von diesen Lösungen gehen durch die Substitutionen unserer Gruppe G 25920 aus einer von ihnen hervor; die übrigen 25920 erhält man aus diesen durch Anwendnng der Substitution:

(5) $$Y_0' = -Y_0, \quad Y_1' = -Y_1, \quad Y_2' = -Y_2, \quad Y_3' = -Y_3, \quad Y_4' = -Y_4,$$

welche unserer Gruppe G nicht angehört, aber $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ ungeändert lässt. Hieraus folgt nach dem von Herrn Klein angegebenen, von Herrn Maschke a. a. O. mitgetheilten Schlussverfahren:

Jede rationale Invariante geraden Grades unserer Gruppe G ist eine rationale Function von $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$, jede rationale Invariante ungeraden Grades das Product einer solchen Function in eine bestimmte Invariante ungeraden Grades — z. B. die § 47 a. E. erwähnte J_{45}.

Beachtet man ferner, dass die sämmtlichen J als rationale Functionen von unabhängig veränderlichen Grössen — eben den Y — dargestellt sind, und dass, wie oben gezeigt, endlichen Werthen der J immer nur endliche Werthe der Y entsprechen, so kann man neben den letzten Satz noch den folgenden stellen:

Jede rationale ganze Invariante geraden Grades unserer Gruppe G ist eine rationale ganze Function von $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$, jede

*) Vgl. Maschke, a. a. O. p. 340 unten.

rationale ganze Invariante ungeraden Grades das Product einer solchen Function in J_{45}.

Insbesondere folgt, dass das Quadrat von J_{45} eine ganze Function:

$$J_{45}^2 = G(J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}) \tag{6}$$

von J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18} sein muss.

XI. Abschnitt.

Das Problem der Y und seine Resolventen*).

§ 51.

Einleitende Erörterungen.

Bereits in § 50 war gelegentlich von der Aufgabe die Rede, die Werthe der Y zu berechnen, wenn die Werthe der Invarianten:

$$J_4 = a, \quad J_6 = b, \quad J_{10} = c, \quad J_{12} = d, \quad J_{18} = e \tag{1}$$

gegeben sind. Ist ausserdem noch:

$$J_{45} = f \tag{2}$$

gegeben — natürlich in Uebereinstimmung mit der Relation (6) des § 50 — so besteht das *„Formenproblem der Y"* eben in der Aufgabe, die Y aus den Gleichungen (1) und (2) zu berechnen. Mit diesem Problem wollen wir uns nunmehr beschäftigen.

Wir fragen zunächst nach der *Anzahl der Lösungen*, welche dieses Problem besitzen mag; dabei betrachten wir natürlich die rechten Seiten von (1), (2) als unbestimmte, nur durch die erwähnte Relation verbundene Grössen. Dann folgt aus den Entwicklungen von § 50:

Das Problem der Y besitzt 25920 *Lösungen. Sie gehen sämmtlich aus einer von ihnen hervor durch Anwendung der* 25920 *linearen Substitutionen der im vorigen Abschnitt discutirten Gruppe G.*

Es repräsentirt also diese Gruppe die *Monodromiegruppe* unseres Problems in Bezug auf a, b, c, d, e, f als Parameter. Die in unsern Formeln $\big($§ 39, (4)$\big)$ auftretende dritte Einheitswurzel ε**) ist dabei als

*) Für diesen ganzen Abschnitt sind die Begriffsbildungen und Methoden massgebend, welche Herr F. Klein in seinen *„Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades"* (Leipzig, Teubner, 1884) niedergelegt hat. Insbesondere vgl. man dort das IV. Cap. des I., sowie das II. und III. Cap. des II. Abschnitts; ferner, was die Weiterführung dieser Ideen betrifft, den Aufsatz: *Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen* 6. *und* 7. *Grades* in Bd. 28 dieser Ann., p. 499 ff. (1886).

**) $i\sqrt{3}$ bedarf als dem Rationalitätsbereich von ε angehörig keiner besonderen Erwähnung.

adjungirt vorausgesetzt; sehen wir von dieser Adjunction ab, fragen also nach der *arithmetischen* Gruppe des Problems, so haben wir es mit 51840 Operationen zu thun. Es ist übrigens dies ε für unser Problem eine „natürliche" Irrationalität.

An die *Einfachheit* der Monodromiegruppe G, auf die bereits § 39 a. E. hingewiesen ist, sei hier abermals erinnert.

§ 52.

Das Gleichungssystem der Y; Reduction des Formenproblems auf dasselbe.

Wir können uns die Bestimmung der Y in der Weise vorgenommen denken, dass zunächst aus den Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{J_{10}}{J_4 J_6} = \alpha, \quad \frac{J_{12}}{J_6^2} = \beta, \quad \frac{J_{12}}{J_4^3} = \gamma, \quad \frac{J_{18}}{J_6^3} = \delta$$

(die sich noch in mannigfacher Weise durch andere ersetzen liessen) die *Verhältnisse* der Y bestimmt werden. Diese Aufgabe hat 25920 Lösungen, denn die vier Räume:

$$(2) \quad J_{10} - \alpha J_4 J_6 = 0, \quad J_{12} - \beta J_6^2 = 0, \quad J_{12} - \gamma J_4^3 = 0, \quad J_{18} - \delta J_6^3 = 0$$

schneiden sich in:

$$10 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 = 25920$$

Punkten. Aus den Lösungen dieses *Gleichungssystems* müssen*) sich nun die Lösungen des ursprünglich vorgelegten *Formenproblems* — die Werthe der Y selbst — *rational* erhalten lassen, da die homogene Substitutionsgruppe der Y mit der zugehörigen Collineationsgruppe *holoedrisch* isomorph ist (vgl. § 38). Diese Bestimmung wird ermöglicht, wenn wir noch die Form J_{45} mit heranziehen: mit ihrer Hilfe können wir gebrochene Invarianten bilden, welche in den Y vom *ersten* Grad sind, z. B. die folgende:

$$(4) \qquad \xi = \frac{J_{45}}{J_4^{11}}.$$

Ist dann ausser $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ noch der Werth von ξ gegeben, so können wir die Y selbst folgendermassen berechnen:

Sei eine Lösung des *Gleichungssystems* in der Form bekannt:

$$(5) \qquad Y_0 : Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 = \eta_0 : \eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4,$$

so wird die entsprechende Lösung des Formenproblems sein:

$$(6) \quad Y_0 = \varrho\eta_0, \quad Y_1 = \varrho\eta_1, \quad Y_2 = \varrho\eta_2, \quad Y_3 = \varrho\eta_3, \quad Y_4 = \varrho\eta_4,$$

wo nur der Factor ϱ noch zu bestimmen ist. Für diesen aber erhalten wir aus (4):

$$(7) \qquad \varrho = \xi \cdot \frac{J_4^{11}(\eta)}{J_{45}(\eta)}.$$

---

*) Vgl. Ikosaeder, p. 124, 220.

Die bei dieser Auflösung benutzten Grössen α, β, γ, δ, ε, ζ sind definirt als rationale Functionen der J; umgekehrt sind aber auch die J rational durch jene Grössen ausdrückbar; wie man unter Benutzung der Relation (6) des § 50 erkennt*).

§ 53.

Resolventen des Problems der Y.

Die Auflösung eines Gleichungs*systems* galt früher wohl als eine wesentlich zusammengesetztere Aufgabe, als die Auflösung einer *einzelnen* Gleichung. Dem entsprechend pflegte man die Untersuchung eines vorgelegten Gleichungssystems damit zu beginnen, dass man aus demselben durch Eliminationsprocesse eine geeignet scheinende Einzelresolvente herausschälte; an diese hatten dann die weiteren Entwicklungen anzuknüpfen. Man war sich zwar darüber klar, dass man auch anders vorgehen könne; aber man hielt dieses Verfahren für das im Allgemeinen zweckmässigste**). In den letzten Jahrzehnten hat sich diese Auffassung geändert; es ist vielleicht nicht überflüssig, das einmal ausdrücklich hervorzuheben, wenn damit auch den speciell algebraischen Untersuchungen Nahestehenden sicherlich nichts neues gesagt ist***). In der That: diejenigen Fragen, welche gegenwärtig im Vordergrund des Interesses stehen: gruppentheoretische Natur der Probleme, Reduction von Problemen mit isomorphen Gruppen auf einander, bezw. auf typische Fundamentalirrationalitäten, Beziehung zu transcendenten Functionen — alle diese lassen sich für ein vorgelegtes Gleichungssystem direct angreifen, ohne dass man dasselbe erst durch eine Einzelresolvente zu ersetzen brauchte.†) Man wird vielmehr††) „zunächst untersuchen, mit welcher kleinsten Variabelnzahl man eine Gruppe homogener linearer Substitutionen construiren kann, die mit der Gruppe des vorgelegten Problems isomorph ist; dann wird man das Formenproblem oder Gleichungssystem aufstellen, welches zu dieser Gruppe gehört, und nun versuchen, jenes Problem auf dieses zu reduciren“. Ist diese kleinste Variabelnzahl *zwei*, so führt dieses Princip in der That auf Einzelresolventen; ist sie grösser, so wird man wohl zu „resolvirenden Gleichungssystemen“ geführt, hat aber

*) Vgl. Ikosaeder, p. 220, Glchgen. (20), (21).

**) Man vgl. die in dieser Hinsicht charakteristischen Bemerkungen in Serret's Handbuch der Algebra, art. 64 a. E.

***) Vgl. etwa Kronecker, Monatsber. der Berliner Acad. 1861, p. 609 und Klein, Ikosaeder p. 86, p. 95.

†) Wie steht es in dieser Hinsicht mit der Absonderung der Wurzeln und ihrer näherungsweisen Berechnung bei Problemen mit numerischen Daten?

††) Klein, Ikosaeder p. 220; vgl. auch die dort citirten früheren Arbeiten desselben, namentlich Bd. 15 dieser Ann., p. 257 (1879).

keine Veranlassung, die Betrachtung einer einzelnen resolvirenden Function und der Resolventengleichung, der sie genügt, in den Mittelpunkt der Untersuchung zu stellen. Wenn im Folgenden gleichwohl einige Resolventen des Problems der Y herangezogen werden, so geschieht dies nur, um an frühere Arbeiten Anschluss zu gewinnen; eine weitergehende Bedeutung soll denselben damit nicht zugesprochen werden.

Die explicite Aufstellung der Gleichung, welcher eine bestimmte resolvirende Function genügt, wird im Allgemeinen ziemlich ausgedehnte Rechnungen verlangen. Noch verhältnissmässig am wenigsten wird das der Fall sein, wenn einmal die *Anzahl der Werthe*, welche die Resolventenfunction bei den Operationen der Gruppe annimmt, (der Index der zugehörigen Untergruppe) möglichst klein ist, und wenn zugleich der *Grad der Function in den* Y möglichst niedrig ist; wir mögen etwa das Product beider Werthe als annäherndes Mass der zu erwartenden Weitläufigkeiten betrachten. Sehen wir zu, wie sich in dieser Beziehung bei unserm Problem der Y die Verhältnisse gestalten.

Die Untergruppe von niedrigstem Index, welche uns begegnet ist, war die Gruppe L des § 43, vom Index 27. Dieselbe besass eine Invariante 4. Grades, von der sich aber herausstellte, dass sie zugleich Invariante der Hauptgruppe, also für unsere jetzigen Zwecke nicht geeignet ist. Die nächst höhere Invariante von L war das Product $\eta_2\eta_3\eta_4\eta_5\eta_6$, vom Grade 5; die Coefficienten der Resolventengleichung, welcher dasselbe genügt, steigen also bis zum Grade 135 in den Y an. Ferner hatten wir die Gruppe M des § 44 vom Index 36, und die Gruppe G_0 des § 40, vom Index 40, jede mit einer absoluten Invariante 2. Grades; die Coefficienten der zugehörigen Gleichungen steigen also bis zum Grade 72, bezw. 80. Ueber die beiden letzten Resolventen mögen dementsprechend noch einige Angaben gemacht werden; doch sei nicht unerwähnt gelassen, dass die vorher genannte Resolvente 27. Grades vor ihnen sich dadurch auszeichnet, dass unter ihren Coefficienten auch J_{45} vorkommt, was bei jenen nicht der Fall ist.

§ 54.

Die Resolvente 36. Grades der q.

Von den Wurzeln q unserer Resolvente 36. Grades gehen (vgl. § 44, Glchg. (8)) 9 aus

$$(1) \qquad Y_0^2 + 4\varepsilon^\lambda Y_1 Y_2 + 4\varepsilon^{2\lambda} Y_3 Y_4$$

dadurch hervor, dass man Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 unter sich vertauscht und für λ jedesmal 0, 1, 2 setzt, die 27 andern aus:

$$(2) \qquad -\frac{1}{3}(Y_0^2 + 4Y_0\Sigma Y_1 + 4\Sigma Y_1^2 - 4\Sigma Y_1 Y_2)$$

dadurch, dass man

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad Y_4,$$

durch $$\varepsilon^\lambda Y_1, \quad \varepsilon^\mu Y_2, \quad \varepsilon^\nu Y_3, \quad \varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_4$$

ersetzt und nun λ, μ, ν unabhängig von einander die Werthe 0, 1, 2 durchlaufen lässt. In den symmetrischen Functionen dieser Grössen fallen dann alle diejenigen Glieder weg, welche von λ, μ, ν abhängen; es bleiben also nur diejenigen Glieder übrig, in welchen nach Herausnahme einer geeigneten Potenz des Products $Y_1 Y_2 Y_3 Y_4$ alle Exponenten von Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 durch 3 theilbar sind. Die übrigen Glieder braucht man nicht zu berechnen. Es müssen dann diese symmetrischen Functionen ganze Functionen von $J_4, J_6, J_{10}, J_{12}, J_{18}$ sein (§ 50), sich also aus denjenigen Verbindungen dieser Grössen, welche den entsprechenden Grad in den Y haben, mit Hilfe rein numerischer Coefficienten linear zusammensetzen. So findet man zunächst für die Potenzsummen:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Sigma q &= 0, \\ \Sigma q^2 &= 12 J_4, \\ \Sigma q^3 &= 8 J_6, \\ \Sigma q^4 &= \frac{28}{3} J_4^2, \\ \Sigma q^5 &= \frac{80}{9} J_4 J_6 - \frac{1600}{3} J_{10} \end{aligned}$$

und hieraus mit Hilfe der Newton'schen Formeln folgende Gestalt der Anfangsterme der q-Gleichung:

$$(4) \quad q^{36} - 6 J_4 q^{34} - \frac{8}{3} J_6 q^{33} + \frac{47}{3} J_4^2 q^{32} + \left(\frac{128}{9} J_4 J_6 + \frac{320}{3} J_{10}\right) q^{31} + \cdots = 0.$$

§ 55.

Die Resolvente 40. Grades der Y_0^2.

In ganz ähnlicher Weise berechnen sich die Anfangsterme derjenigen Resolvente, deren eine Wurzel Y_0^2 ist. Von den 39 übrigen Wurzeln haben 12 die Form:

$$(1) \qquad -\frac{1}{3}\left(Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_\alpha\right)^2,$$

die 27 andern die Form

$$(2) \qquad \frac{1}{9}\left(Y_0 + 2\varepsilon^\lambda Y_1 + 2\varepsilon^\mu Y_2 + 2\varepsilon^\nu Y_3 + 2\varepsilon^{-\lambda-\mu-\nu} Y_4\right)^2$$

(für $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2$). Für die Wurzelsummen ergiebt sich hier:*)

*) Die Summenzeichen sind wie in § 47 zu verstehen.

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & \Sigma Y_0^2 = 0;\\
(4)\quad & 3\Sigma Y_0^4 = 8Y_0^4 + 64Y_0\Sigma Y_1^3 + 384Y_1Y_2Y_3Y_4\\
& = 8J_4;\\
(5)\quad & 27\Sigma Y_0^6 = 16Y_0^6 - 320Y_0\Sigma Y_1^3 - 128\Sigma Y_1^6 + 1280\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
& \qquad + 5760\Sigma Y_0^2Y_1Y_2Y_3Y_4\\
& \qquad = 16J_6;\\
(6)\quad & 243\Sigma Y_0^8 = 280Y_0^8 + 4480Y_0^5\Sigma Y_1^3 + 26880Y_0^4Y_1Y_2Y_3Y_4\\
& \qquad + 17920Y_0^2\Sigma Y_1^6 + 35840Y_0^2\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
& \qquad + 215040Y_0\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 + 645120Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2\\
& \qquad = 280J_4^2;\\
(7)\quad & 2187\Sigma Y_0^{10} = 2080Y_0^{10} - 2^3\cdot 3120Y_0^7\Sigma Y_1^3\\
& \qquad + 2^4\cdot 5040Y_0^6Y_1Y_2Y_3Y_4 - 2^6\cdot 5460Y_0^4\Sigma Y_1^6\\
& \qquad + 2^6\cdot 4200Y_0^4\Sigma Y_1^3Y_2^3 - 2^7\cdot 25200Y_0^3\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4\\
& \qquad + 2^8\cdot 113400Y_0^2Y_1^2Y_2^2Y_3^2Y_4^2 - 2^9\cdot 260Y_0\Sigma Y_1^9\\
& \qquad + 2^9\cdot 840Y_0\Sigma Y_1^6Y_2^3 + 2^9\cdot 16800Y_0\Sigma Y_1^3Y_2^3Y_3^3\\
& \qquad + 2^{10}\cdot 720\Sigma Y_1^7Y_2Y_3Y_4 + 2^{10}\cdot 6300\Sigma Y_1^4Y_2^4Y_3Y_4\\
& \qquad = 2080J_4J_6 + 768000J_{10};\\
(8)\quad & 19683\Sigma Y_0^{12} = 20008Y_0^{12} + 144320Y_0^9\Sigma Y_1^3 + 190080Y_0^8Y_1Y_2Y_3Y_4\\
& \qquad + 4849152Y_0^6\Sigma Y_1^6 + 1182720Y_0^6\Sigma Y_1^3Y_2^3\\
& \qquad + 21288960Y_0^5\Sigma Y_1^4Y_2Y_3Y_4 + \cdots\\
& \qquad = 14760J_4^3 + 5248J_6^2 - 1904640J_{12}.
\end{aligned}
$$

(Die Ausdrücke für ΣY_0^4, ΣY_0^6, ΣY_0^8, ΣY_0^{10} geben zugleich eine Controle der Richtigkeit der in § 47 für J_4, J_6, J_{10} angegebenen Werthe. Für J_{12}, J_{18} würde die Berechnung auf diesem Wege nicht zu empfehlen sein, da man diese Invarianten dabei mit unbequem grossen Zahlencoefficienten multiplicirt erhalten würde, wie schon Formel (8) erkennen lässt).

Aus diesen Werthen der Potenzsummen der Wurzeln ergeben sich die *Anfangsglieder unserer Gleichung* in folgender Gestalt:

$$
\begin{aligned}
(9)\quad & Y_0^{80} - \tfrac{4}{3}J_4Y_0^{76} - \tfrac{16}{81}J_6Y_0^{74} + \tfrac{146}{243}J_4^2Y_0^{72}\\
& + \tfrac{1}{2187}(160J_4J_6 - 153600J_{10})\,Y_0^{70}\\
& + \tfrac{1}{59049}(-8028J_4^3 - 1472J_6^2 + 952320J_{12})\,Y_0^{68}\\
& + \cdots = 0.
\end{aligned}
$$

Was das *absolute Glied* unserer Gleichung betrifft, so ist dasselbe, wie aus den Erörterungen von § 49 hervorgeht, *gleich dem Quadrat der dort in Glchg.* (11) *angegebenen Form* F_{40}. —

Es bleibt noch die Frage übrig, ob die vollständige Lösung einer der Resolventen dieses oder des vorhergehenden Paragraphen eine mit der Lösung „des Problems der Y" vollkommen äquivalente Aufgabe ist oder nicht. In dieser Beziehung erkennt man ohne Schwierigkeit folgendes: Ist das Problem der Y vorgelegt und hat man dasselbe durch eine der genannten Resolventen ersetzt, so kann man nach Lösung der letzteren auch die einzelnen Y rational bestimmen, indem man zunächst die Verhältnisse der Y als rationale Functionen der Wurzeln der Resolvente und aus diesen die Y selbst wie in § 52 findet. Gehen wir aber von der Gleichung der Y^2 oder der q als gegeben aus, so können diese erst dann auf das Problem der Y^2 zurückgeführt werden, wenn man noch J_{45}, d. h. die Quadratwurzel aus einer bestimmten Funtion ihrer Coefficienten, adjungirt*). Diese Adjunction muss also vorgenommen werden, wenn die beiden Aufgaben als vollkommen äquivalent angesehen werden sollen. Bei der in § 53 a. E. erwähnten Resolvente 27. Grades ist das anders: dort braucht J_{45} nicht erst adjungirt zu werden, da es unter ihren Coefficienten bereits vorkommt**).

XII. Abschnitt.

Beziehungen zur Multiplicatorgleichung.

§ 56.

Allgemeine Erläuterungen.

In den 3 letzten Abschnitten sind die Y als unabhängige Veränderliche betrachtet und als solche den linearen Substitutionen des § 37 unterworfen worden. Wir kehren jetzt zur ursprünglichen Auffassung zurück, indem wir die Y wieder als Functionen der v, τ, p_{12}, ihre Substitutionen als durch lineare Periodentransformationen hervorgebracht ansehen. Auch möge zunächst unter n wieder irgend eine ungerade Primzahl verstanden werden.

Insbesondere wollen wir, um Anschluss an den I. Theil dieser Untersuchungen zu gewinnen, die specielle Voraussetzung:

$$v_1 = v_2 = 0 \tag{1}$$

eintreten lassen. Dabei reducirt sich $Y_0^2 = X_{00}^2$ auf:

$$y_0^2 = \sqrt[4]{\frac{D}{D^n}} = c^{2(n-1)}\, p_{12}^{n-1}\, \frac{\vartheta^2(0;\, n\tau_{ik})}{\vartheta^{2n}(0;\, \tau_{ik})}, \tag{2}$$

*) Die Sache liegt also hier ganz ebenso, wie bei dem „Problem der A" und der Jacobi'schen Gleichung 6. Grades. (Ikosaeder p. 224).

**) Vgl. das Verhalten der Resolvente 5. Grades des Problems der A (Ikosaeder p. 226).

also von dem Factor n abgesehen auf eine derjenigen Grössen, welche in I., § 21 ff. als Wurzeln von Multiplicatorgleichungen betrachtet worden sind. Daher muss unsere „Resolvente der Y^2" (§ 55) für $v_1 = v_2 = 0$ mit jener Multiplicatorgleichung identisch werden; diese Uebereinstimmung wollen wir nun noch im Einzelnen nachweisen.

Zu diesem Zwecke multipliciren wir zunächst alle y mit dem gemeinsamen Nenner und schreiben:

$$(3)\quad (y_{\alpha\beta}) = y_{\alpha\beta}\sqrt[8]{\Delta^n} = c^{-1} p_{12}^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\alpha\tau_{11} + \beta\tau_{12},\ \alpha\tau_{12} + \beta\tau_{22};\ n\tau_{11}, n\tau_{12}, n\tau_{22});$$

die Invarianten, welche aus diesen (y) ebenso gebildet sind, wie die J aus den Y, bezeichnen wir mit (i). Von diesen Invarianten (i) gelten dann ganz dieselben Entwicklungen, welche in I., § 24—26 für die Coefficienten der Multiplicatorgleichung für $\sqrt[4]{D}$ durchgeführt worden sind. Führt man daher wieder die beiden cubischen binären Formen φ, ψ ein, welche in der algebraischen Definition der zur Bildung der $X_{\alpha\beta}$ benutzten (ursprünglichen) Sigma-, resp. Thetafunctionen auftreten*), so kann man folgenden Satz aussprechen:

Jede Invariante (i) ist ein Product aus einer rationalen ganzen symmetrischen Invariante von φ und ψ in eine Potenz von $\sqrt[8]{D}$, deren Exponent β mit dem Grade α der Invariante in den (y) durch die Congruenz

$$\alpha + 5\beta \equiv 0 \pmod{8}$$

verbunden ist. Beim Zusammenrücken der Nullstellen von φ und ψ werden die (i) in der a. a. O. p. 429, 430 näher angegebenen Weise unendlich klein.

Es folgt hieraus und aus den Entwicklungen von (I), dass sich $(i_4), (i_6), (i_{10})$ bezw. von $D^{\frac{1}{2}}$, $BD^{\frac{1}{4}}$, $BD^{\frac{3}{4}}$ nur je um einen Zahlenfactor unterscheiden können, während (i_{12}) von der Form

$$D^{\frac{1}{2}}(\alpha D + \beta E + \gamma B^2)$$

sein muss. Für (i_{18}) würden wir einen analogen Schluss machen können, wenn in (I) die Entwicklung weit genug durchgeführt wäre.

Zu bemerken ist übrigens, dass die 5 Grössen $(i_4), (i_6), (i_{10}), (i_{12}), (i_{18})$ nur von den 4 unabhängigen Veränderlichen $p_{12}, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ abhängen; es muss also zwischen ihnen eine Relation bestehen, und es geht aus dem eben Gesagten hervor, dass diese die Form:

$$(4)\qquad \lambda(i_4)(i_6) + \mu(i_{10}) = 0$$

haben muss.

---

*) Vgl. Klein, dieser Ann. Bd. 27, p. 437; Grundz. § 24–27.

§ 57.

Reihenentwicklungen der Invarianten.

Um die im vorigen Paragraphen noch unbestimmt gebliebenen numerischen Coefficienten zu bestimmen, bedienen wir uns der Reihenentwicklungen nach Potenzen von p, q, r; die Potenzen von $c\sqrt{p_{12}}$, welche überall noch beizufügen wären, mögen dabei wie in (I) als selbstverständlich weggelassen werden. Man erhält zunächst folgende Entwicklungen der (y):

$$(1)\qquad \begin{aligned}
(y_0) &= 1 + 2(p^3 + r^3) + \cdots;\\
(y_1) &= p^{\frac{1}{3}}\left\{1 + p + r^3(q^2 + q^{-2}) + \cdots\right\};\\
(y_2) &= r^{\frac{1}{3}}\left\{1 + r + p^3(q^2 + q^{-2}) + \cdots\right\};\\
(y_3) &= p^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}\left\{q^{\frac{2}{3}} + pq^{-\frac{4}{3}} + rq^{-\frac{4}{3}} + prq^{\frac{8}{3}} + \cdots\right\};\\
(y_4) &= p^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}\left\{q^{-\frac{2}{3}} + pq^{\frac{4}{3}} + rq^{\frac{4}{3}} + prq^{-\frac{8}{3}} + \cdots\right\}.
\end{aligned}$$

(Die durch Punkte angedeuteten Glieder sind in p, r von höherer als der dritten, bei (y_0) von höherer als der 4. Ordnung). Aus diesen Werthen erhält man für die Invarianten die Entwicklungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned}
(i_4) = {} & 1 + 8(p + r) + 24(p^2 + r^2) + 32pr + 32(p^3 + r^3)\\
& + 0(p^2r + pr^2) + 24(p^4 + r^4) - 128(p^3r + pr^3)\\
& - 192p^2r^2 + 8prs^2 + \cdots;\\
(i_6) = {} & 1 - 20(p + r) - 68(p^2 + r^2) + 480pr - 96(p^3 + r^3)\\
& - 400(p^2r + pr^2) - 260(p^4 + r^4) + 0(p^3r + pr^3)\\
& + 784p^2r^2 - 20prs^2 + \cdots;\\
(i_{12}) = {} & 8pr - 32(p^2r + pr^2) - 32(p^3r + pr^3) + 768p^2r^2 + \cdots;\\
(i_{18}) = {} & 6p^2r^2 + \cdots;
\end{aligned}$$

(hier sind die nur durch Punkte angedeuteten Glieder von höherer als der 4. Ordnung in p, r und $s = q + q^{-1}$). Für (i_{10}) dagegen findet man, dass es keine Glieder von vierter oder niedrigerer Ordnung enthält; daraus folgt zunächst:

Die Relation (§ 56, (4)), *welche zwischen den* 5 *Grössen* (y) *bestehen muss, ist einfach:*

$$(3)\qquad (i_{10}) = 0.$$

Ausserdem aber ergiebt die Vergleichung der Entwicklungen (2) mit den in (I), § 17 enthaltenen die folgenden Gleichungen:

$$(4)\qquad (i_4) = 3^3 D^{\frac{1}{2}};\quad (i_6) = 3^{\frac{5}{2}} BD^{\frac{1}{4}};\quad (i_{12}) = 3^4 2^{-5} ED^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man diese Werthe und ausserdem x für $(y_0)^2\sqrt{3}$ in die Gleichung (9) von § 55 ein, so erhält man:

$$(5)\quad \begin{aligned} &x^{40}+*-108D^{\frac{1}{2}}x^{38}-16BD^{\frac{1}{4}}x^{37}+3942Dx^{36}+480BD^{\frac{3}{4}}x^{35}\\ &+D^{\frac{1}{2}}(-216756D-13248B^2+90280E)x^{34}+\cdots=0.\end{aligned}$$

Die 6 ersten Glieder stimmen hier mit der Schlussgleichung von I, § 28 überein, das folgende tritt neu hinzu. Setzt man ferner noch*):

$$(6)\qquad (i_{18})=\frac{3^4\sqrt{3}}{2^{10}}ZD^{\frac{3}{4}},$$

so erhält man für das absolute Glied der x-Gleichung aus § 49, (11) den Werth:

$$(7)\qquad \frac{1}{3^8}D^6\big(3(3^5D-2^4E)^2-2^9BZ\big)^2,$$

was wegen $B=2J^2-9T$ mit dem in (I), § 29 angegebenen Werth übereinstimmt**). Damit ist also auch der oben (4) noch fehlende Werth von (i_{18}) bestimmt.

Durch diese Entwicklungen sind die Resultate von I aufs neue bestätigt.

§ 58.

Die Invariante (i_{45}).

Es bleibt noch übrig, die Invariante (i_{45}) durch die Simultaninvarianten von φ und ψ auszudrücken. Zu diesem Zwecke gehen wir davon aus, dass für $\tau_{11}=\tau_{22}$ $(y_1)-(y_2)$, also auch $(i_{45})=0$ wird. Aus den Entwicklungen von Herrn Bolza***) geht aber hervor, dass für $\tau_{11}=\tau_{22}$ die sechs Grundpunkte von $f=\varphi\psi$ in Involution liegen müssen, und zwar so, dass jedes Paar der Involution sowohl von φ, als von ψ einen Grundpunkt enthält. Nun ist die Bedingung hiefür das Verschwinden einer *alternirenden* Invariante sechsten Grades; die einzige alternirende Invariante sechsten Grades von φ und ψ ist aber nach (I), § 12:

$$(1)\qquad G_6=PS^2-R\Sigma^2.$$

Dieses G_6 (zu irgend einer Potenz erhoben) muss also jedenfalls ein

*) Im Auszug in den Gött. Nachr. steht fälschlich 3^5 statt 3^4.

**) In (I) § 20, Glchg. (5) ist das Vorzeichen von DE zu ändern.

***) *On Binary Sextics with Linear Transformations into Themselves*, American Journ. of Mathem. Bd. 10, p. 47 ff. (1887); vgl. insbes. p. 64, 66. (Ein Auszug aus dieser Abhandlung findet sich in Bd. 30 dieser Ann.). — Die Bezeichnung der Verzweigungspunkte und Querschnitte ist in (I) dieselbe wie bei Bolza, nur steht in (I) α_0 für B's α_6.

Factor von (i_{45}) sein; und aus der Irreducibilität dieser letzteren Form im Rationalitätsbereich der Invarianten J folgt, dass sie ausserdem nur noch Potenzen von $\mathfrak{R}$ und D zu Factoren haben kann. Mit Rücksicht auf den Satz von § 56 folgt hieraus, dass (i_{45}) von der Form sein muss:

$$(i_{45}) = c \cdot G_6^{\alpha} \cdot \mathfrak{R}^{\beta} \cdot D^{\gamma + \frac{7}{8}}, \tag{2}$$

unter α, β, γ ganze Zahlen verstanden, die der Gleichung

$$12\alpha + 6\beta + 8\gamma = 38 \tag{3}$$

genügen müssen. Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen, die in Betracht kommen könnten, nämlich:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1$$

und:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

Von diesen kann aber nur die erste hier statthaben; denn aus der zweiten würde sich für (i_{45}) ein Ausdruck ergeben, dessen Quadrat nicht rational und ganz durch (i_4), (i_6), (i_{12}), (i_{18}) ausdrückbar wäre, wie es doch nach § 50 a. E. sein muss. *Es ist also, bis auf einen numerischen Factor*, (i_{45}) *gleich:*

$$(PS^2 - R\Sigma^2) \cdot \mathfrak{R}^3 \cdot D^{\frac{15}{8}}. \tag{4}$$

Damit seien diese Betrachtungen vorläufig abgeschlossen; in einem dritten Theil soll noch die Gruppe der Z behandelt werden.

Göttingen, November 1890.

Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Bei der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten

$$(1)\qquad (A_0x+B_0)\frac{d^2y}{dx^2}+(A_1x+B_1)\frac{dy}{dx}+(A_2x+B_2)y=0,$$

die sich nach der von Euler*) angegebenen Methode mittelst bestimmter Integrale lösen lässt, sind bekanntlich zunächst die zwei Fälle zu unterscheiden, ob A_0 von Null verschieden, oder ob A_0 gleich Null ist. Hat A_0 einen von Null verschiedenen Werth, so wird die Gleichung (1) durch die Substitution $x=x'-\frac{B_0}{A_0}$ auf eine Gleichung

$$(2)\qquad x'\frac{d^2y}{dx'^2}+(a_1x'+b_1)\frac{dy}{dx'}+(a_2x'+b_2)\,y=0,$$

in der a_1, a_2, b_1, b_2 constant sind, reducirt, während im Falle $A_0=0$ durch Division mit B_0 eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)\,y=0$$

erhalten wird.

In (2) setzt man

$$(4)\qquad y=e^{sx'}\,Y,$$

wodurch für Y die Differentialgleichung

$$(5)\quad x'\frac{d^2Y}{dx'^2}+[(2s+a_1)x'+b_1]\frac{dY}{dx'}+[(s^2+a_1s+a_2)x'+b_1s+b_2]\,Y=0$$

entsteht, und bestimmt die Constante s durch

$$(6)\qquad s^2+a_1s+a_2=0.$$

*) Institutiones calculi integralis, Vol. II, Cap. X. art. 1036.

Ist s keine Doppelwurzel von (6), also $2s + a_1$ von Null verschieden, so ergiebt sich aus (5) durch die Substitution

$$x' = -\frac{x''}{2s + a_1}$$

die Gleichung

$$x'' \frac{d^2Y}{dx''^2} = (x'' - b_1)\frac{dY}{dx''} + \frac{b_1 s + b_2}{2s + a_1} Y,$$

welche, wenn x'', Y wieder durch x, y ersetzt, und α, ϱ als die Constanten

$$\alpha = \frac{b_1 s + b_2}{2s + a_1}, \quad \varrho = b_1$$

definirt werden, die Gestalt

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = (x - \varrho)\frac{dy}{dx} + \alpha y$$

annimmt. Hat die Gleichung (6) dagegen eine Doppelwurzel $s = -\frac{a_1}{2}$, $\left(\text{also } a_2 = \frac{a_1^2}{4}\right)$, so substituirt man in (5)

$$x = -\frac{x''}{b_1 s + b_2}$$

und erhält hierdurch, wenn schliesslich x, y, ϱ statt x'', Y, b_1 geschrieben wird, die Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{8}$$

Die Constante $b_1 s + b_2$ darf als verschieden von Null angesehen werden, da die Gleichung (5) sonst in dem betrachteten Falle auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zurückkommt.

Aus der obigen Rechnung folgt, dass die Differentialgleichung (1) sich stets auf eine der drei Formen (7), (8), (3) reduciren lässt. Die Gleichung (7) hat der Verfasser in einem im 36ten Bande dieser Annalen veröffentlichten Aufsatze*) behandelt. Es ergab sich, dass die Gleichung (7) durch bestimmte Integrale befriedigt wird, welche für beliebige Werthe der Constanten α und ϱ einen Sinn behalten. Die nachstehenden Untersuchungen führen zu einem ähnlichen Resultat in Bezug auf die Gleichungen (8) und (3), indem Lösungen der letzteren Gleichungen in Gestalt bestimmter Integrale, die allgemein convergent sind, abgeleitet werden. Geht man von den bestimmten Integralen zu den Potenzreihen über, so treten die zuerst von Hankel**) betrachteten Modificationen der Euler'schen Integrale als Factoren bei den Reihenentwickelungen auf.

---

*) Ueber die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten.

**) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 9, pag. 12, 1864.

Die Constante ϱ wird in (8) — wie hinsichtlich (7) auch in der soeben genannten Arbeit (in Bd. 36) geschieht — als nicht ganzzahlig vorausgesetzt. Hierdurch bleibt der Fall, dass die Differentialgleichung ein logarithmisches particuläres Integral besitzt, von der Betrachtung ausgeschlossen.

Auch die Gleichungen (8) und (3) lassen sich, wie Weiler*) gezeigt hat, durch gewisse Substitutionen auf die Form (7) zurückführen. Im Allgemeinen wird es indessen zweckmässiger sein, diese Reduction nicht vorzunehmen. Denn dieselbe liefert (von speciellen Fällen abgesehen) weniger einfache Integralausdrücke, als sich bei der directen Behandlung von (8) und (3) ergeben. Die Substitution, durch welche nach Weiler die Gleichung (8) auf die Form (7) gebracht wird,

$$x = \left(\frac{\xi}{4}\right)^2, \quad y = e^{-\frac{1}{2}\xi}\,\eta = e^{-2\sqrt{x}}\,\eta,$$

hat ausserdem, wie man leicht sieht, den Nachtheil, dass aus den Hauptintegralen von (7) nicht die Hauptintegrale von (8) erhalten werden. Noch weniger dürfte sich bei der Gleichung (3) die Reduction auf die Gleichung (7) empfehlen, da der Punkt $x = 0$ zwar für (7), nicht aber für (3) ein singulärer ist; es wird mithin durch das Weiler'sche Verfahren, gewissermassen willkürlich, ein neuer singulärer Punkt in die Differentialgleichung (3) eingeführt.

Die Gleichung (8) ist in den nachstehenden §§ 2—4, die Gleichung (3) in § 5 behandelt worden. Man setzt in die Gleichung (8) ein Integral von der Form $\int U(u-x)^\lambda\,du$ für y ein und bestimmt U als Function von u durch eine einfachere lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Der Gleichung (3) genügen bekanntlich, wenn $a_1 = 0$ ist, Functionen von wesentlich anderem Charakter, als wenn a_1 von Null verschieden ist; hinsichtlich des Falles $a_1 = 0$ wird auf einen nachfolgenden Aufsatz**) verwiesen.

In der oben erwähnten Arbeit im 36ten Bande dieser Annalen ist für die unendliche Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1\,.\,\varrho}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)}\,x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)}\,x^3 + \cdots$$

die abgekürzte Benennung $F(\alpha;\varrho;x)$ angewendet worden. Analog wird im Folgenden durch $\mathfrak{F}(\varrho;x)$ die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho;x) = 1 + \frac{x}{1\,.\,\varrho} + \frac{x^2}{1\,.\,2\,.\,\varrho(\varrho+1)} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)} + \cdots$$

bezeichnet.

---

*) „Integration der linearen Differentialgleichungen etc.", Crelle's Journal, Bd. 51, 1856, pag. 127—129.

**) „Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung", dieser Band, pag. 247.

§ 2.

Setzt man in die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\varrho\frac{dy}{dx}-y=0 \tag{8}$$

für y das bestimmte Integral

$$y=\int_g^h (u-x)^\lambda\, U\, du \tag{9}$$

ein, wo U von u allein abhängt, λ, g Constanten bedeuten, und h entweder constant oder gleich x ist, so ergiebt sich die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(\lambda-1)\int_g^h (u-x)^{\lambda-2}\, u\, U\, du\\ -\lambda(\varrho+\lambda-1)&\int_g^h (u-x)^{\lambda-1}\, U\, du-\int_g^h (u-x)^\lambda\, U\, du\end{aligned}\right\}=0.$$

Mittelst der Formel der theilweisen Integration findet man

$$\lambda\int_g^h (u-x)^{\lambda-1}\, U\, du=[(u-x)^\lambda\, U]_{u=g}^{u=h}-\int_g^h (u-x)^\lambda\frac{dU}{du}\, du$$

und durch zweimalige Anwendung derselben Formel

$$\lambda(\lambda-1)\int_g^h (u-x)^{\lambda-2}\, u\, U\, du$$

$$=\left[\lambda(u-x)^{\lambda-1}\, u\, U-(u-x)^\lambda\frac{d(uU)}{du}\right]_{u=g}^{u=h}+\int_g^h (u-x)^\lambda\frac{d^2(uU)}{du^2}\, du.$$

Wird also durch M der Ausdruck

$$M=\lambda(u-x)^{\lambda-1}\, u\, U-(u-x)^\lambda\left\{\frac{d(uU)}{du}+(\varrho+\lambda-1)\, U\right\}$$

bezeichnet, so folgt aus (8) die Gleichung

$$[M]_{u=g}^{u=h}+\int_g^h (u-x)^\lambda\left\{\frac{d^2(uU)}{du^2}+(\varrho+\lambda-1)\frac{dU}{du}-U\right\}du=0.$$

Die Grösse U werde als Function von u durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2(uU)}{du^2}+(\varrho+\lambda-1)\frac{dU}{du}-U=0 \tag{10}$$

bestimmt. Dann ist das Integral (9) eine particuläre Lösung von (8), unter der Bedingung, dass die Grenzen g und h so gewählt werden, dass

$$[M]_{u=h}-[M]_{u=g}=0 \tag{11}$$

ist.

Aus (10) erhält man durch die Substitution $u=t^2$ die Gleichung

$$\frac{d^2(tU)}{dt^2}+(2\varrho+2\lambda-1)\frac{dU}{dt}-4tU=0,$$

die, wenn

$$(12)\qquad 2\varrho + 2\lambda - 1 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \varrho$$

genommen wird, in eine lineare Differentialgleichung für tU mit constanten Coefficienten übergeht. Es ist hiernach

$$tU = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t},$$

also

$$(13)\qquad U = \frac{1}{\sqrt{u}} \left\{ C_1 e^{2\sqrt{u}} + C_2 e^{-2\sqrt{u}} \right\},$$

wo C_1 und C_2 willkürliche Constanten bedeuten. Für U sollen nach einander die zwei Ausdrücke

$$(14)\qquad U = \frac{1}{\sqrt{u}} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}} \right)$$

und

$$(15)\qquad U = \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-2\sqrt{u}}$$

angewendet werden, die aus (13) für $C_1 = C_2 = 1$, resp. $C_1 = 0$ $C_2 = 1$ entstehen. Die Grösse M hat, wenn für U die Function (14) gesetzt wird, den Werth

$$(16)\qquad M = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \varrho\right)(u-x)^{-\frac{1}{2}-\varrho} \sqrt{u} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right) \\ -(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \left(e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}\right), \end{cases}$$

und, wenn U gleich der Function (15) ist, den Werth

$$(17)\qquad M = e^{-2\sqrt{u}} \left[\left(\frac{1}{2} - \varrho\right)(u-x)^{-\frac{1}{2}-\varrho} \sqrt{u} + (u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \right].$$

Man nehme zunächst den reellen Bestandtheil der Constante $\frac{1}{2} + \varrho$ als negativ an. Dann haben die Summen (16) und (17) für $u = x$ den Werth Null. Der Ausdruck (16) verschwindet ausserdem für $u = 0$, so dass die Bedingung (11), wenn U gleich der Function (14) ist, durch die Werthe $g = 0$, $h = x$ befriedigt wird. Demnach stellt das bestimmte Integral

$$(18)\qquad \int_0^x \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \frac{du}{\sqrt{u}}$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (8) dar. Der Ausdruck (17) verschwindet für $u = \infty$, unter der Voraussetzung, dass bei $\sqrt{u}$ das positive Vorzeichen gewählt werde, so dass der Exponent von e negativ ist. Man kann daher bei Anwendung der Function (15) den Werth ∞ als Integralgrenze in (9) nehmen, worauf in § 4 näher eingegangen wird.

Integrirt man die Gleichung (8) durch eine Potenzreihe

$$y = x^{\varkappa} + \gamma_1 x^{\varkappa+1} + \gamma_2 x^{\varkappa+2} + \cdots,$$

so ergeben sich die particulären Integrale

$$(19)\qquad \mathfrak{F}(\varrho; x) = 1 + \frac{x}{1.\varrho} + \frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.\varrho(\varrho+1)(\varrho+2)} + \cdots$$

und

$$(20)\qquad x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho; x) = x^{1-\varrho}\left\{1 + \frac{x}{1.(2-\varrho)} + \frac{x^2}{1.2.(2-\varrho)(3-\varrho)} + \cdots\right\}.$$

Der Ausdruck (19) ist das eindeutige, der Ausdruck (20) das mehrdeutige Hauptintegral der Gleichung (8). Die Reihen $\mathfrak{F}(\varrho; x)$ und $\mathfrak{F}(2-\varrho; x)$ haben, da die Constante ϱ als nicht ganzzahlig vorausgesetzt wird, für jedes endliche x einen bestimmten endlichen Werth. Von der Reihe (20) unterscheidet sich nun, wie gezeigt werden soll, das Integral (18) nur durch einen constanten Factor.

Man wendet auf das Integral (18), als dessen Integrationsweg die vom Punkte 0 zum Punkte x gezogene Gerade gewählt werden möge, die Substitution $u = wx$ an, wodurch dasselbe sich in den Ausdruck

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, x^{1-\varrho}\int_0^1 \left(e^{2\sqrt{wx}} + e^{-2\sqrt{wx}}\right) w^{-\frac{1}{2}}\,(1-w)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, dw$$

verwandelt. Da aber

$$e^{2\sqrt{wx}} + e^{-2\sqrt{wx}} = 2\left\{1 + \frac{2^2 wx}{1.2} + \frac{2^4 w^2 x^2}{1.2.3.4} + \cdots + \frac{2^{2\nu} w^{\nu} x^{\nu}}{(2\nu)!} + \cdots\right\}$$

ist, so entsteht aus (18) die Reihe

$$2(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, x^{1-\varrho}\left\{\begin{array}{l} E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) + \frac{2^2 x}{1.2} E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) \\ + \cdots + \frac{2^{2\nu} x^{\nu}}{(2\nu)!} E\left(\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) + \cdots \end{array}\right\},$$

wo durch $E(p, q)$ das Euler'sche Integral erster Art

$$E(p, q) = \int_0^1 w^{p-1}(1-w)^{q-1}\, dw$$

bezeichnet wird. Der allgemeine Term dieser Reihe geht nach Benutzung der Formel

$$E\left(\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) = \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{2^{\nu}(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right)$$

in den Quotienten

$$\frac{2(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, x^{1-\varrho+\nu}\, E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right)}{1.2.3\ldots\nu.(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}$$

über, in welchem man den Factor $(-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ fortzulassen hat, falls in (18) die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ durch $(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ ersetzt wird. Man erhält daher die Gleichung

$$(21)\qquad \begin{cases} \int_0^x (e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}})\,(x-u)^{\frac{1}{2}-\varrho}\,\frac{du}{\sqrt{u}} \\ = 2E\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) x^{1-\varrho}\,\mathfrak{F}(2-\varrho; x). \end{cases}$$

Es wurde bisher angenommen, dass der reelle Bestandtheil der Constante ϱ unterhalb des Werthes $-\frac{1}{2}$ liege. Die Convergenz des Integrals (18) erfordert jedoch nur, dass der reelle Theil von ϱ kleiner als $\frac{3}{2}$ sei; ebenso wird in der Gleichung (21) nur $\varrho < \frac{3}{2}$ vorausgesetzt. Die letztere Gleichung zeigt, dass das Integral (18), sobald es überhaupt einen Sinn hat, der Differentialgleichung (8) genügt. Daher wird die mehrdeutige Hauptlösung von (8) nicht nur im Fall $\varrho < -\frac{1}{2}$, sondern auch im Fall $-\frac{1}{2} \leqq \varrho < \frac{3}{2}$ durch das Integral (18) angegeben.

§ 3.

In (18) wurde eine gerade Linie als Integrationsweg angewendet. Indem man dieselbe durch eine geschlossene Curve ersetzt, erhält man eine allgemein gültige Darstellung der mehrdeutigen Hauptlösung von (8) durch ein bestimmtes Integral.

Man wähle für das Integral (9), nachdem für U die Function (14) und für λ der Werth (12) gesetzt worden sind, als Integrationsweg eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Curve, die im Nullpunkt beginnt und endigt und den Punkt x umschliesst. Das hierdurch entstehende Integral, welches kurz durch

$$(22)\qquad \overline{\int_0^{(x)}} (e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}})\,(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\,\frac{du}{\sqrt{u}}$$

bezeichnet wird, ist, da der Bedingung (11) Genüge geschieht, eine particuläre Lösung der Gleichung (8). Es werde wiederum $u = wx$ substituirt, und an Stelle von $e^{2\sqrt{wx}} + e^{-2\sqrt{wx}}$ die in § 2 genannte Reihe eingeführt. Dann findet man für das Integral (22) die Entwickelung

$$2x^{1-\varrho}\left\{G_0 + \frac{2^2 x}{1.2}\,G_1 + \frac{2^4 x^2}{4!}\,G_2 + \cdots + \frac{2^{2\nu}x^\nu}{(2\nu)!}\,G_\nu + \cdots\right\},$$

in der G_ν das constante Integral

$$G_\nu = \int_0^{\overline{(1)}} w^{\nu-\frac{1}{2}} (w-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, dw$$

bedeutet. Die Grösse G_ν gehört zu den von Hankel definirten Integralen, die sich von den entsprechenden Euler'schen Integralen nur durch den geschlossenen Integrationsweg unterscheiden. Der Integrationsweg von G_ν, der vom Punkte 0 ausgeht und den Punkt 1 umschliesst, schneide die positive reelle Axe in einem Punkte $w = \gamma$. Man setzt fest, dass in letzerem Punkte die Potenzen $w^{\nu-\frac{1}{2}}$ und $(w-1)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ die Werthe $e^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\log\gamma}$ und $e^{\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)\log(\gamma-1)}$ haben sollen, in denen $\log\gamma$ und $\log(\gamma-1)$ reell sind. Dann ist, bei Anwendung der vom Verfasser in § 2 des Aufsatzes „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" angegebenen Bezeichnung*),

$$G_\nu = \overline{E}\left(\nu+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right),$$

oder, wenn die Formel (l. c., pag. 511)

$$\overline{E}(a+\nu, b) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{(a+b)(a+b+1)\ldots(a+b+\nu-1)}\, \overline{E}(a, b)$$

berücksichtigt wird,

$$G_\nu = \frac{1}{2^\nu}\, \frac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{(2-\varrho)(3-\varrho)\ldots(\nu+1-\varrho)}\, \overline{E}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right).$$

Hierdurch erhält man für das Integral (22), in welchem ϱ eine beliebige Constante sein darf, die zu (21) analoge Gleichung

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{\overline{(x)}} \left(e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\, \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\overline{E}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-\varrho\right) x^{1-\varrho}\, \mathfrak{F}(2-\varrho; x). \end{aligned}\right.$$

Von der in § 1 gemachten Voraussetzung, dass die Constante ϱ nicht ganzzahlig sein soll, kann hier insofern abgesehen werden, als die Gleichungen (21) und (23) — wie die obige Rechnung zeigt — auch in dem Falle gültig bleiben, wo ϱ gleich 1, 0 oder einer negativen ganzen Zahl ist. Man bemerke ferner, dass wenn für ϱ eine positive ganze Zahl m, die grösser als 1 ist, gesetzt wird, das Integral (22) bis auf einen constanten Factor mit der Reihe (19) übereinstimmt. Denn die Grösse $\overline{E}(a, b)$ verschwindet, sowohl wenn b eine positive ganze Zahl, als auch wenn $a+b$ eine negative, ganze Zahl oder Null ist (l. c. pag. 511 und 512). Im Falle $\varrho = m$ hat also die

*) Diese Annalen, Bd. 35, pag. 510, Gleichung (24).

Constante G_ν, $=\overline{E}\left(\nu+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-m\right)$, da $a+b$ gleich $\nu+2-m$ wird, den Werth Null für $\nu=0,1,2,\ldots, m-2$. Indem man im Uebrigen $\nu=m-1+\mu$ setzt, findet man (für $\mu=0,1,2$, etc.)

$$G_\nu = G_{m-1+\mu} = \overline{E}\left(m-\frac{1}{2}+\mu,\ \frac{3}{2}-m\right)$$

$$=\frac{(2m-1)(2m+1)\ldots(2m+2\mu-3)}{1.2.3\ldots\mu.2^\mu}\,\overline{E}\left(m-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-m\right)$$

oder, wegen $\overline{E}(a,b)=\overline{E}(a,\,1-a-b)$ und $\overline{E}(a,0)=2\pi i$,

$$G_\nu=\frac{(2m-1)(2m+1)\ldots(2m+2\mu-3)}{1.2.3\ldots\mu}\,\frac{2\pi i}{2^\mu}.$$

Mithin ist

$$\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}\,G_\nu=\frac{2^{2m-2}}{(2m-2)!}\,\frac{2\pi i}{\mu!\;m(m+1)\ldots(m+\mu-1)}.$$

Hieraus folgt aber, dass das Integral (22) sich für $\varrho=m$ in das Product aus der Reihe $\mathfrak{F}(m;x)$ und der Constante $\frac{2^{2m}\pi i}{(2m-2)!}$ verwandelt.

Die Integrale (18) und (22) wurden aus (9) erhalten, indem man für U den Ausdruck (14) einsetzte. Dieselben können jedoch auch als Integrale von der Form (9), in denen U den Werth (15), $\frac{1}{\sqrt{u}}\,e^{-2\sqrt{u}}$, hat, geschrieben werden, wenn man die Integrationswege in gewisser Weise ändert. Man nenne zur Abkürzung $\Phi(u,x)$ die Function

$$(24)\qquad \Phi(u,x)=e^{-2\sqrt{u}}\,(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{u}}$$

und integrire dieselbe nach u längs einer geschlossenen, vom Punkte x ausgehenden Curve, welche den Nullpunkt umschliesst. Das hierdurch entstehende Integral

$$(25)\qquad \overline{\int_x^{(0)}}\Phi(u,x)\,du,$$

bei welchem $\varrho<\frac{3}{2}$ vorausgesetzt wird, ist, abgesehen vom Vorzeichen, mit dem Integral (18) identisch. Denn wenn man um den Nullpunkt einen unendlich kleinen Kreis $\mathfrak{K}$ legt und vom Punkte x eine Gerade zu einem Punkte $\mathfrak{p}$ dieses Kreises zieht, so kann der Integrationsweg des Integrals (25) durch die gerade Strecke $x\mathfrak{p}$, den Kreis $\mathfrak{K}$ und die Strecke $\mathfrak{p}x$ ersetzt werden. Das Integral längs des Kreises $\mathfrak{K}$ ist aber verschwindend klein, und da die Grösse $\sqrt{u}$ durch den Umlauf um den Nullpunkt den Factor -1 aufnimmt, so ist das Integral (25) in der That gleich dem Ausdruck

$$\int_x^0\left(e^{-2\sqrt{u}}+e^{+2\sqrt{u}}\right)(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\,\frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Man bilde ferner (nach § 1 der Abh. „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“ in Bd. 35 dieser Annalen) das geschlossene Integral

$$(26) \qquad \overline{\int}_{c}^{(x,0,x-,0-)} \Phi(u, x)\, du,$$

dessen Integrationsweg von einem beliebigen Punkte $\mathfrak{c}$ ausgeht und nach je einem positiven Umlauf um den Punkt x und um den Punkt 0 auch einen negativen Umlauf um den Punkt x und einen negativen Umlauf um den Punkt 0 enthält. Der Bedingung (11) wird bei Anwendung dieses Integrationsweges genügt. Der Werth des Integrals (26) hängt, da der schliessliche Werth der zu integrirenden Function mit dem Anfangswerthe derselben übereinstimmt, von der Wahl der unteren Integralgrenze nicht ab. Man kann daher den Punkt $\mathfrak{c}$ durch den zuvor genannten Punkt $\mathfrak{p}$, der dem Nullpunkte unendlich nahe ist, ersetzen und für die zwei Umläufe um den Nullpunkt den kleinen Kreis $\mathfrak{K}$ benutzen; dann liefern letztere nur einen unendlich kleinen Beitrag zu dem betrachteten Integral. Die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ hat im Endpunkte des negativen Umlaufes um den Punkt x ihren anfänglichen Werth wiedererlangt, so dass, wenn unter Hinzufügung des Factors -1 die Richtung dieses Umlaufes in die positive verwandelt wird, für $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ dieselben Werthe wie bei dem positiven Umlauf um x zur Anwendung kommen. Dagegen hat sich bei $\sqrt{u}$ durch den dazwischen liegenden Umlauf um den Nullpunkt das Vorzeichen geändert. Demnach ist das Integral (26) mit dem Ausdruck

$$\overline{\int}_{\mathfrak{p}}^{(x)} (e^{-2\sqrt{u}} + e^{+2\sqrt{u}})(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

d. h. mit (22) identisch.

§ 4.

Um die eindeutige Hauptlösung der Differentialgleichung (8) durch ein Integral von der Form (9) darzustellen, wendet man, nachdem für U die Function (15) substituirt ist, für (9) einen geschlossenen, vom unendlich entfernten Punkte der positiven reellen Axe ausgehenden Integrationsweg an.

Es werde um den Nullpunkt als Mittelpunkt ein Kreis $\mathfrak{L}$ gelegt, dessen Radius l grösser als mod. x ist, so dass die Verbindungslinie der Punkte 0 und x, welche $\mathfrak{A}$ heissen möge, innerhalb $\mathfrak{L}$ liegt. Der Schnittpunkt des Kreises $\mathfrak{L}$ mit der positiven reellen Axe wird $\mathfrak{b}$ genannt. Man bilde nun ein Integral der Function $\Phi(u, x)$ in der

Art, dass die Variable u zunächst die positive reelle Axe von ∞ bis zum Punkte $\mathfrak{b}$, hierauf zweimal hintereinander den Kreis $\mathfrak{L}$ in positiver Drehungsrichtung durchläuft und sodann vom Punkte $\mathfrak{b}$ längs der positiven reellen Axe zum Werthe ∞ zurückkehrt. Zugleich wird

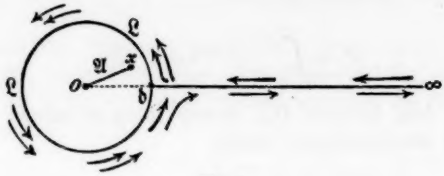


Fig. 1.

bestimmt (cfr. § 2), dass an der unteren Integralgrenze das positive Vorzeichen bei $\sqrt{u}$ genommen werde. Man wendet für das so definirte Integral, da der Integrationsweg zwei positive Umläufe um die Linie $\mathfrak{A}$ enthält, die abgekürzte Bezeichnung

$$\int_{\infty}^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}} \tag{27}$$

an. Das Integral (27) ist convergent; denn wegen der zweimaligen Umkreisung des Nullpunktes gilt auch in dem letzten Abschnitt des Integrationsweges das positive Vorzeichen für $\sqrt{u}$, so dass die Exponentialgrösse $e^{-2\sqrt{u}}$ sich dem Werthe Null nähert. Für die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ kann in (27), weil mod. u in jedem Punkte des Integrationsweges grösser als mod. x ist, die Reihe

$$(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho} = u^{\frac{1}{2}-\varrho}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{\frac{1}{2}-\varrho}$$

$$= u^{\frac{1}{2}-\varrho}\left\{1-\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_1\frac{x}{u}+\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_2\frac{x^2}{u^2}-\cdots+(-1)^\nu\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_\nu\frac{x^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}$$

eingesetzt werden. Dann treten die Potenzen von x vor die Integralzeichen, und es bleibt als singulärer Werth der zu integrirenden Functionen nur der Werth $u=0$ übrig. Auf diese Weise erhält man für das Integral (27), da der Binomialcoefficient $\left(\frac{1}{2}-\varrho\right)_\nu$ als der Quotient

$$(-1)^\nu\frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)(2\varrho+3)\cdots(2\varrho+2\nu-3)}{2^\nu\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots\nu}$$

geschrieben werden kann, die Reihenentwickelung

$$(28)\quad \begin{cases} H_0 + \frac{2\varrho-1}{1} H_1 \frac{x}{2} + \frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)}{1\cdot 2} H_2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \cdots \\ + \frac{(2\varrho-1)(2\varrho+1)(2\varrho+3)\cdots(2\varrho+2\nu-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu} H_\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \cdots \text{ inf.}, \end{cases}$$

woselbst H_ν das constante Integral

$$(29)\qquad H_\nu = \overline{\int_\infty^{(0,0)}} e^{-2\sqrt{u}}\, u^{-\varrho-\nu}\, du$$

bedeutet. In dem Integral H_ν, dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (27) übereinstimmt, werde

$$2\sqrt{u} = t, \quad e^{-2\sqrt{u}}\, u^{-\varrho-\nu} du = e^{-t} \left(\frac{t}{2}\right)^{1-2\varrho-2\nu} dt$$

gesetzt. Dann nimmt die Variable t in dem ersten Theil des Integrationsweges, welcher den Werthen der Variable u von $+\infty$ bis $+l$ entspricht, die Werthe von $+\infty$ bis $+2\sqrt{l}$ an. Während u den Kreis $\mathfrak{L}$ zweimal durchläuft, legt t den Kreis mit dem Radius $2\sqrt{l}$ einmal zurück, und in dem letzten Theil des Integrationsweges kommen bei t wiederum die reellen positiven Werthe zwischen $+2\sqrt{l}$ und $+\infty$ vor. Demgemäss ist

$$(29\text{a})\qquad H_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t}\, t^{1-2\varrho-2\nu} dt.$$

Es wird nun nach § 3 des Aufsatzes des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" im 35ten Bande dieser Annalen (Gleichung (34)) durch $\overline{\Gamma}(a)$ das geschlossene Integral

$$(30)\qquad \overline{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{a-1}\, dt$$

bezeichnet, dessen Integrationsweg derselbe wie bei dem Integral (29a) ist. Die in dem Integral $\overline{\Gamma}(a)$ (welches sich von dem entsprechenden Hankel'schen Integral nur formell unterscheidet) vorkommende Potenz t^{a-1} wird dadurch näher bestimmt, dass in dem ersten Theil des Integrationsweges für t^{a-1} der Werth $e^{(a-1)\log t}$, in welchem $\log t$ den reellen Logarithmus bedeutet, anzuwenden ist. Indem man in dem Integral H_ν die analoge Bestimmung für die Potenz $t^{1-2\varrho-2\nu}$ gelten lässt, hat man, da $e^{\pi i(2-2\varrho-2\nu)} = e^{-2\pi i\varrho}$ ist, die Gleichung

$$(31)\qquad H_\nu = 2^{2\varrho+2\nu-1} e^{-2\pi i\varrho}\, \overline{\Gamma}(2-2\varrho-2\nu).$$

Man nehme zunächst an, dass $2-2\varrho$ keine positive ganze Zahl sei. Dann folgt aus der Formel

$$(32)\qquad \bar{\Gamma}(a-n)=(-1)^n\frac{\bar{\Gamma}(a)}{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}$$

(l. c. pag. 515), wenn $n=2\nu$ gesetzt wird, für H_ν der Werth

$$(31\text{a})\qquad H_\nu=\frac{2^{2\varrho+2\nu-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho)}{(2\varrho-1)\,2\varrho(2\varrho+1)\cdots(2\varrho+2\nu-2)}.$$

In dem allgemeinen Term der Reihe (28) heben sich, wenn dieser Werth von H_ν eingeführt wird, die Factoren $2\varrho-1$, $2\varrho+1$, $2\varrho+3,\ldots,2\varrho+2\nu-3$ und $2^{2\nu}$ fort, wodurch die Reihe (28) sich in den Ausdruck

$$2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho)\left\{\begin{array}{l}1+\dfrac{x}{1\cdot\varrho}+\dfrac{x^2}{1\cdot 2\cdot\varrho(\varrho+1)}+\cdots\\ +\dfrac{x^\nu}{1\cdot 2\cdots\nu\cdot\varrho(\varrho+1)\cdots(\varrho+\nu-1)}+\cdots\end{array}\right\}$$

verwandelt. Also besteht für das Integral (27) die Gleichung

$$(33)\qquad \bar{\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}} e^{-2\sqrt{u}}(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}\frac{du}{\sqrt{u}}=2^{2\varrho-1}e^{-2\pi i\varrho}\bar{\Gamma}(2-2\varrho)\,\mathfrak{F}(\varrho;x).$$

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (8) kann demnach, wenn man für die mehrdeutige Hauptlösung die Form (26) anwendet, durch die Summe

$$(34)\qquad C_1\bar{\int_\infty^{(\mathfrak{A},\mathfrak{A})}}\Phi(u,x)\,du+C_2\bar{\int_c^{(x,0,x-,0-)}}\Phi(u,x)\,du$$

dargestellt werden, in der $\Phi(u,x)$ die Function (24) bedeutet, während C_1 und C_2 willkürliche Constanten sind.

In (33) wurde vorausgesetzt, dass die Constante $2-2\varrho$ keine positive ganze Zahl sei, d. h. dass ϱ weder die Form $\frac{1}{2}-m$, noch die Form $-m$ habe, wo unter m eine positive ganze Zahl oder der Werth Null verstanden wird. Ist $\varrho=-m$, so beginnt die Reihe (28) mit der $(m+1)^{\text{ten}}$ Potenz von x. Denn das Integral $\bar{\Gamma}(a)$ stimmt für positive Argumente a mit dem Producte

$$(e^{\pi i a}-e^{-\pi i a})\Gamma(a)=2i\sin(\pi a)\Gamma(a),$$

woselbst $\Gamma(a)$ das Euler'sche Integral bedeutet, überein; dasselbe nimmt also für positive ganzzahlige Argumente den Werth Null an. Hieraus folgt, dass die Coefficienten $H_0, H_1,\ldots,H_m$ verschwinden, da sie (nach (31)) bezw. die Factoren $\bar{\Gamma}(2+2m)$, $\bar{\Gamma}(2m),\ldots,\bar{\Gamma}(2)$ enthalten. Indem man sodann in (31) $\nu=m+1+\mu$ setzt, findet man für $\mu=0,1,2,\ldots$ die Gleichung

$$H_\nu = H_{m+1+\mu} = 2^{2\mu+1}\overline{\Gamma}(-2\mu) = \frac{2^{2\mu+2}\pi i}{1.2.3\ldots 2\mu},$$

welche zeigt, dass die Reihe (28) im Falle $\varrho = -m$ in den Ausdruck

$$(-1)^{m+1}\frac{1.3.5\ldots(2m+1)\pi i}{1.2.3\ldots(m+1)2^{m-1}}\,x^{m+1}\mathfrak{F}(m+2;\,x)$$

d. h.

$$\text{Const.}\; x^{1-\varrho}\mathfrak{F}(2-\varrho;\,x)$$

übergeht. Man gelangt hierdurch zu dem Resultat, dass sobald ϱ ganzzahlig ist, die zwei bestimmten Integrale (22) und (27) sich nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden. Beide Integrale kommen, abgesehen von constanten Factoren, für $\varrho = 0$, -1, -2, etc. (cfr. die Gleichung (23) und die daran geknüpfte Bemerkung) auf die Reihe (20), für $\varrho = 2, 3$, etc. auf die Reihe (19) zurück, und für $\varrho = 1$ werden die Reihen (19) und (20) einander gleich. Als Ergänzung tritt bekanntlich im Allgemeinen ein logarithmisches particuläres Integral der Gleichung (8) hinzu.

Es bleibt übrig, den Fall zu betrachten, wo $\varrho = \frac{1}{2} - m$ ist. In diesem Falle verschwindet das Integral (27) für einen beliebigen Werth von x. Denn aus (31) folgt wiederum $0 = H_0 = H_1 = \cdots = H_m$, und da die Potenz $(u-x)^{\frac{1}{2}-\varrho}$ gleich $(u-x)^m$ wird, so kommen in der Reihe (28) nur die m ersten Potenzen von x vor. Der genannte Fall gehört zu denen, wo das allgemeine Integral der Differentialgleichung (8) sich auf einfachere Functionen von x reducirt. Wie schon S. Spitzer*) gezeigt hat, lässt sich die in (8) definirte Function y durch niedere Transcendenten ausdrücken, sobald die Constante ϱ ein positives oder negatives ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Hierauf soll noch in Kürze eingegangen werden.

Wenn man von den Ausdrücken

$$\frac{e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}}{2} = 1 + \frac{2^2x}{1.2} + \cdots + \frac{2^{2\nu}x^\nu}{(2\nu)!} + \cdots + \frac{2^{2m+2\nu}x^{m+\nu}}{(2m+2\nu)!} + \cdots,$$

$$\frac{e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}}{2} = \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{2^3x^{\frac{3}{2}}}{3!} + \cdots + \frac{2^{2\nu+1}x^{\nu+\frac{1}{2}}}{(2\nu+1)!} + \cdots,$$

welche mit $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2};\,x\right)$, resp. $2\sqrt{x}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2};\,x\right)$ identisch sind, den ersteren m Mal, den letzteren $m+1$ Mal nach x differenzirt und die Gleichungen

*) „Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen", Wien, C. Gerold's Sohn, 1878, §§ 36—38.

$$\frac{2^{2m+2\nu}}{(2m+2\nu)!}(m+\nu)(m+\nu-1)(m+\nu-2)\cdots(\nu+1)$$
$$=\frac{2^m}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{1}{\nu!\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(m+\nu-\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{2^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\nu+\frac{1}{2}-m\right)$$
$$=\frac{(-1)^m\,1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m\nu!\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(\frac{3}{2}-m\right)\cdots\left(\nu-m-\frac{1}{2}\right)}$$

beachtet, so ergiebt sich

$$(35)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+m;x\right)=\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^{m+1}}\,\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m},$$

$$(36)\qquad \mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}-m;x\right)=\frac{(-1)^m\,2^{m-1}x^{\frac{1}{2}+m}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}}.$$

Im Falle $\varrho=\frac{1}{2}-m$ lauten nun die particulären Integrale (19) und (20)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}-m;x\right),\qquad x^{\frac{1}{2}+m}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}+m;x\right).$$

Dieselben haben also die Form

$$\text{Const.}\;x^{\frac{1}{2}+m}\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}}$$

und

$$\text{Const.}\;x^{\frac{1}{2}+m}\frac{d^{m+1}\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^{m+1}},$$

woselbst m neben positiven ganzen Zahlen auch den Werth Null annimmt.

Ist $\varrho=\frac{1}{2}+m$, so reduciren sich nach (35) und (36) die particulären Lösungen (19), (20)

$$\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+m;x\right),\qquad x^{\frac{1}{2}-m}\,\mathfrak{F}\left(\frac{3}{2}-m;x\right)$$

auf die Functionen

$$\text{Const.}\,\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}+e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m},\qquad \text{Const.}\,\frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}}-e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}.$$

Das letztere Resultat lässt sich auch aus den in §§ 2 und 3 erhaltenen Gleichungen ableiten. Das particuläre Integral (22) der Differentialgleichung (8) geht für $\varrho = \frac{1}{2} + m$ in den Ausdruck

$$\int_0^{(x)} \frac{e^{2\sqrt{u}} + e^{-2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} \frac{du}{(u-x)^m}$$

über, welcher nach dem bekannten Satze von Cauchy

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{1.2.3\ldots k}{2\pi i} \int_c^{(x)} \frac{f(u)\,du}{(u-x)^{k+1}}$$

den Differentialquotienten

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} \left(\frac{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right)$$

darstellt. Durch Anwendung der Gleichung

$$\frac{e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{d\left(e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx}$$

findet man also für das Integral (22) im genannten Falle den Werth

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}.$$

Da ferner die Function M (§ 2) sich jetzt nur noch im Punkte $u = 0$ verzweigt, bei dem Punkte $u = x$ dagegen eindeutig (wenn auch unstetig) ist, so kann man für U auch den Ausdruck

$$U = \frac{1}{\sqrt{u}}\left(e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}\right)$$

wählen und der Bedingung (11) durch einen Umlauf der Variable u um den Punkt x genügen. Auf diese Weise erhält man das particuläre Integral

$$\int_0^{(x)} \frac{e^{2\sqrt{u}} - e^{-2\sqrt{u}}}{\sqrt{u}} \frac{du}{(u-x)^m}, \tag{37}$$

das nach dem Cauchy'schen Satze mit dem Differentialquotienten

$$\frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^m\left(e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\right)}{dx^m}$$

identisch ist.

§ 5.

Es soll nunmehr die in § 1 angeführte Differentialgleichung (3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{dy}{dx}+(a_2x+b_2)y=0$$

behandelt werden, welche keinen anderen singulären Werth als den Werth $x=\infty$ besitzt.

Ist die Constante a_1 von Null verschieden, so setzt man

$$x=x'\sqrt{\frac{2}{a_1}}.$$

Hierdurch entsteht aus (3) die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx'^2}+(2x'+b_1')\frac{dy}{dx'}+(a_2'x'+b_2')y=0,$$

in der b_1', a_2', b_2' constant sind. Die Substitution

$$y=e^{-\frac{1}{2}a_2'x'},\qquad x'=\xi+\frac{a_2'-b_1'}{2}$$

ergiebt dann

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+2\xi\frac{d\eta}{d\xi}+\left[\left(\frac{a_2'}{2}\right)^2-\frac{a_2'b_1'}{2}+b_2'\right]\eta=0,$$

so dass, wenn man die Constante $\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_2'}{2}\right)^2-\frac{a_2'b_1'}{2}+b_2'\right]$ durch α bezeichnet, und statt ξ,η wieder x,y schreibt, die Differentialgleichung (3) auf die Form

$$(38)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+2\alpha y=0$$

zurückgeführt ist.

Im Falle $a_1=0$ geht die Differentialgleichung (3) durch die Substitution $y=e^{-\frac{1}{2}b_1x}\eta$ in

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+(a_2x+b)\eta=0$$

über, wo b die Constante $b_2-\frac{1}{4}b_1^2$ bedeutet. Wird nun x mit einer Variable ξ durch die Gleichung

$$x=-\frac{\xi}{(3a_2)^{\frac{1}{3}}}-\frac{b}{a_2}$$

verbunden, — was zulässig ist, da a_2 hier als verschieden von Null angesehen werden darf, — so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{1}{3}\xi\eta = 0, \tag{39}$$

welche auf die Scherk'sche (oder Lobatto'sche) Differentialgleichung zurückkommt. Die letztere Gleichung ist in § 2 des nachfolgenden Aufsatzes „Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" (dieser Band, pag. 247) einer näheren Betrachtung unterzogen worden. Daher wird hier auf denjenigen Fall der Gleichung (3), wo $a_1 = 0$ ist, nicht weiter eingegangen.

Integrirt man die Gleichung (38) durch die Potenzreihe

$$y = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \cdots + \gamma_\nu x^\nu + \cdots,$$

so ergeben sich bei Anwendung der abgekürzten Bezeichnung

$$F(a;\, r;\, z) = 1 + \frac{a}{1 \,.\, r} z + \frac{a(a+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, r(r+1)} z^2 + \cdots + \text{inf.} \tag{40}$$

die Reihen

$$F\left(\frac{\alpha}{2};\, \frac{1}{2};\, -x^2\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 \cdot \frac{1}{2}} x^2 + \frac{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} x^4 - \cdots \tag{41}$$

$$= 1 - \frac{\alpha}{1 \,.\, 2} 2x^2 + \frac{\alpha(\alpha+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} 2^2 x^4 - \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} 2^3 x^6 + \cdots$$

und

$$x \cdot F\left(\frac{\alpha+1}{2};\, \frac{3}{2};\, -x^2\right) = x\left\{1 - \frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{1 \cdot \frac{3}{2}} x^2 + \frac{\frac{\alpha+1}{2}\,\frac{\alpha+3}{2}}{1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} x^4 - \cdots\right\} \tag{42}$$

$$= x - \frac{\alpha+1}{2 \,.\, 3} 2x^3 + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} 2^2 x^5 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} 2^3 x^7 + \cdots$$

als particuläre Integrale von (38). Dieselben sind transcendente ganze Functionen von x.

Die Substitution des bestimmten Integrals (9)

$$y = \int_g^h (u-x)^\lambda U\, du$$

lässt aus (38) die Gleichung

$$\lambda(\lambda-1)\int_g^h (u-x)^{\lambda-2} U\, du - 2\lambda \int_g^h (u-x)^{\lambda-1} u\, U\, du$$
$$+ 2(\lambda+\alpha)\int_g^h (u-x)^\lambda U\, du = 0$$

entstehen, die, wenn der erste Summandus durch theilweise Integration umgeformt, und für λ der Werth $-\alpha$ gewählt wird, sich in

$$\left[(u-x)^{-\alpha-1} U\right]_{u=g}^{u=h} - \int_g^h (u-x)^{-\alpha-1} \left\{\frac{dU}{du} + 2u\, U\right\} du = 0$$

verwandelt. Es sei

$$\frac{dU}{du} + 2uU = 0,$$

woraus für U der Werth

$$U = e^{-u^2}$$

folgt. Dann gilt für g und h die Bedingung

(43) $$[e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}]_{u=h} - [e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}]_{u=g} = 0.$$

Wird diese erfüllt, so ist der Ausdruck

(44) $$y = \int_g^h e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha}\,du$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (38). Bevor jedoch die Integrale der letzteren Form behandelt werden, möge eine kurze Bemerkung Platz finden, welche sich auf die in (30) angegebene Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ bezieht.

Nach (30) ist $\bar{\Gamma}(a)$ gleich dem Integral

$$e^{-\pi i a}\bar{\int}_{+\infty}^{(0)} e^{-t}t^{a-1}dt,$$

in welchem die Variable t zuerst von $+\infty$ aus längs der positiven reellen Axe fortschreitet, dann einen Kreis um den Nullpunkt in positiver Drehungsrichtung beschreibt und längs der positiven reellen Axe zu $+\infty$ zurückkehrt. Ebenso wie bei den gewöhnlichen Integralen die Grenzen vertauscht werden dürfen, wenn man zugleich mit -1 multiplicirt, so ist bei den Integralen mit geschlossener Integrationscurve, unter Hinzufügung des Factors -1, die Aenderung der Richtung zulässig, in welcher die geschlossene Curve durchlaufen wird. Wird bei dem Integral (30) der Integrationsweg in dieser Weise umgekehrt, so ändert sich derselbe nur insofern, als die Variable t dann den Nullpunkt in negativer Drehungsrichtung umkreist. Indessen ist gleichzeitig der Anfangswerth der zu integrirenden Function ein anderer geworden; denn die Potenz t^{a-1} ist auf derjenigen Strecke, welche nunmehr den ersten Theil des Integrationsweges bildet, mit dem Factor $e^{2\pi i a}$ behaftet. Wird der letztere Factor vor das Integralzeichen genommen, so erhält man für $\bar{\Gamma}(a)$ den Ausdruck

(45) $$\bar{\Gamma}(a) = -e^{\pi i a}\bar{\int}_{+\infty}^{(0-)} e^{-t}t^{a-1}dt,$$

in welchem (wie in (30)) die Bestimmung gilt, dass die Potenz t^{a-1} auf dem ersten Theil des Integrationsweges den Werth $e^{(a-1)\log t}$ annimmt, wo $\log t$ den reellen Logarithmus bedeutet.

Da das Product $e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha-1}$ sowohl für $u=-\infty$ als für $u=+\infty$ verschwindet, so sind für das Integral (44) die Grenzen $g=-\infty$, $h=+\infty$ anwendbar. Man ziehe, wie in § 4, um den Nullpunkt einen Kreis $\mathfrak{L}$, der den Punkt x umschliesst, und dessen Radius durch l bezeichnet wird, und nenne von den zwei Halbkreisen, in welche der Kreis $\mathfrak{L}$ durch die reelle Axe getheilt wird, den unteren $\mathfrak{H}_1$, den oberen $\mathfrak{H}_2$. Dann kann in (44) der Weg der Variable u aus

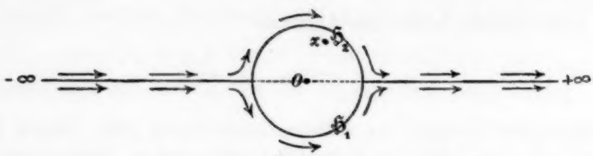


Fig. 2.

dem Abschnitt der negativen reellen Axe von $-\infty$ bis zum Punkte $u=-l$, aus einem der Halbkreise $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ und aus dem Stück der positiven reellen Axe vom Punkte $u=+l$ bis $+\infty$ zusammengesetzt werden. Man erhält auf diese Weise zwei Integrale von der Form

$$(46)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}(u-x)^{-\alpha}\,du,$$

welche Y_1 und Y_2 heissen mögen, und zwar sei Y_1 das Integral, bei dessen Weg der Halbkreis $\mathfrak{H}_1$, und Y_2 dasjenige, wo der Halbkreis $\mathfrak{H}_2$ vorkommt. Die Functionen Y_1 und Y_2 geben zusammen das vollständige Integral der Differentialgleichung (38) an. Da in Y_1 und Y_2 die Ungleichheit mod. $x <$ mod. u für jeden Werth von u erfüllt ist, so lässt sich die Potenz $(u-x)^{-\alpha}$ in die Reihe

$$u^{-\alpha}\left\{1+\frac{\alpha}{1}\,\frac{x}{u}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}\,\frac{x^\nu}{u^\nu}+\cdots\right\}$$

entwickeln. Hierdurch gehen Y_1 und Y_2 in die Ausdrücke

$$Y_1=R_0+\frac{\alpha}{1}R_1x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}R_\nu x^\nu+\cdots,$$

$$Y_2=S_0+\frac{\alpha}{1}S_1x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)}{1.2\ldots\nu}S_\nu x^\nu+\cdots$$

über, in denen R_ν und S_ν constante Integrale von der Form

$$(47)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}u^{-\alpha-\nu}\,du$$

bezeichnen; in R_ν bildet der Halbkreis $\mathfrak{H}_1$, in S_ν der Halbkreis $\mathfrak{H}_2$ den mittleren Theil des Integrationsweges. Wird in (47)

$$u = \sqrt{t}\,,\quad u^2 = t\,,\quad e^{-u^2} u^{-\alpha-\nu} du = \frac{1}{2} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt$$

gesetzt, so durchläuft die Variable t zuerst das Stück der positiven reellen Axe von $+\infty$ bis zum Punkte $t = l^2$, hierauf den ganzen Kreis mit dem Radius l^2, endlich wiederum die positive reelle Axe vom Punkte l^2 bis $+\infty$. Bei R_ν wird der Kreis in positiver, bei S_ν in negativer Drehungsrichtung zurückgelegt. Man hat also die Gleichungen

$$R_\nu = \frac{1}{2} \int_\infty^{(0)} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt,$$

$$S_\nu = \frac{1}{2} \int_\infty^{(0-)} e^{-t} t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}} dt.$$

Für die Potenz $t^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}}$ möge, sowohl in R_ν als auch in S_ν, auf dem ersten Abschnitt des Integrationsweges derjenige Werth $e^{-\frac{\alpha+\nu+1}{2}\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, genommen werden. Dann folgt aus (30) und (45)

$$R_\nu = \quad \frac{1}{2} e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha-\nu)} \Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{-\frac{\pi i}{2}(\alpha+\nu)} \Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right),$$

$$S_\nu = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{2}(1-\alpha-\nu)} \Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right) = \frac{i}{2} e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha+\nu)} \Gamma\left(\frac{1-\alpha-\nu}{2}\right),$$

so dass

$$S_\nu = e^{\pi i(\alpha+\nu)} R_\nu = (-1)^\nu e^{\pi i \alpha} R_\nu$$

ist. Man unterscheidet nun, ob ν eine gerade oder eine ungerade Zahl bezeichnet. Für $\nu = 2k$ findet man, wenn man die Formel (32) berücksichtigt,

$$R_{2k} = \frac{i}{2\beta} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \frac{(-2)^k}{(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2k-1)},$$

wo zur Abkürzung $\beta = e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}$ gesetzt ist. Im Falle $\nu = 2k+1$ wird

$$R_{2k+1} = \frac{1}{2\beta} \Gamma\left(\frac{-\alpha}{2}\right) \frac{(-2)^k}{(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2k)}.$$

Diese Werthe von R_{2k} und R_{2k+1} werden in die obige Entwickelung des Integrals Y_1 substituirt. Dann ergiebt sich, dass Y_1 mit den Reihen (41) und (42) durch die Gleichung

$$(48)\qquad Y_1 = \begin{cases} \quad \frac{i}{2\beta} \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha}{2};\ \frac{1}{2};\ -x^2\right) \\ + \frac{\alpha x}{2\beta} \Gamma\left(\frac{-\alpha}{2}\right) F\left(\frac{\alpha+1}{2};\ \frac{3}{2};\ -x^2\right) \end{cases}$$

verbunden ist. Da ferner S_ν sich von R_ν nur durch den Factor $(-1)^\nu \beta^2$ unterscheidet, so entsteht die Reihe, durch welche Y_2 dargestellt wird, aus der mit β^2 multiplicirten rechten Seite von (48), falls man das Vorzeichen der ungeraden Potenzen von x ändert. Das Integral Y_2 ist folglich gleich der Summe

$$(49) \qquad Y_2 = \begin{cases} \dfrac{i\beta}{2}\,\overline{\Gamma}\left(\dfrac{1-\alpha}{2}\right) F\left(\dfrac{\alpha}{2};\ \dfrac{1}{2};\ -x^2\right) \\ -\dfrac{\alpha\beta x}{2}\,\overline{\Gamma}\left(\dfrac{-\alpha}{2}\right) F\left(\dfrac{\alpha+1}{2};\ \dfrac{3}{2};\ -x^2\right), \end{cases}$$

in der β die Constante $e^{\frac{\pi i \alpha}{2}}$ bedeutet.

Kiel, im September 1890.

Ueber eine binomische lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Den Gegenstand der nachstehenden Untersuchung bilden die Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = xy, \tag{1}$$

die von Scherk*), Jacobi**), Lobatto***), Petzval†) behandelt worden ist, und die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = x^p y, \tag{2}$$

welche Herr Kummer††) durch p-fache bestimmte Integrale gelöst hat†††). Die Substitution $x = \alpha x'$ lässt aus (1) und (2) die Gleichungen

*) „Ueber die Integration der Gleichung $\frac{d^n y}{dx^n} = (\alpha + \beta x)\, y$", Crelle's Journ., Bd. 10, pag. 92.

**) „Bemerkung zu der Abhandlung etc.", Crelle's Journ., Bd. 10, pag. 279.

***) „Sur l'intégration des équations etc.", § 1, Crelle's Journ., Bd. 17, pag. 363.

†) „Integration der linearen Differentialgleichungen etc.", Wien, Braumüller, 1853.

††) „Note sur l'intégration de l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ par des intégrales définies", Crelle's Journ., Bd. 19, pag. 286.

†††) Die Abhandlung von S. Spitzer „Ueber die Integration etc.", Crelle's Journ., Bd. 57, pag. 82, enthält die Lösung der Differentialgleichung $x^m \frac{d^n y}{dx^n} = \pm y$ durch bestimmte Integrale im Fall $m \geqq 2n$. Aber diese Gleichung geht durch die Substitution $x = \frac{1}{\xi}$, $y = \xi^{1-n} \eta = x^{n-1} \eta$ in die Gleichung

$$\frac{d^n \eta}{d\xi^n} = \pm (-1)^n \xi^{m-2n} \eta$$

über. Spitzer giebt, ohne es zu bemerken, im Wesentlichen nur eine Wiederholung der Kummer'schen Rechnung in einer etwas modificirten Form.

$$\frac{d^n y}{dx'^n} = \alpha^{n+1} x' y, \qquad \frac{d^n y}{dx'^n} = \alpha^{n+p} x'^p y$$

entstehen. Man kann also durch passende Wahl von α einen beliebigen constanten Factor zu den rechten Seiten von (1) und (2) hinzutreten lassen. Den folgenden Rechnungen sind die Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{n+1} xy,$$

$$(4) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(n+p)^p} x^p y$$

(p eine beliebige positive ganze Zahl) zu Grunde gelegt worden. Nachdem in § 1 eine einfache Umformung eines bestimmten Integrals vorausgeschickt ist, wird in § 2 die Gleichung (3) und in §§ 3—4 die Gleichung (4) betrachtet.

§ 1.

In der Ebene, welche die complexen Werthe darstellt, sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 1. Der Schnittpunkt des Kreises mit der positiven reellen Axe heisse $\mathfrak{b}_0$. Dann wird nach § 3 der Abhandlung des Verfassers „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" (diese Annalen Bd. 35, pag. 515) durch $\bar{\Gamma}(a)$ das Integral

$$(5) \qquad \bar{\Gamma}(a) = e^{-\pi i a} \int_{+\infty}^{(0)} e^{-t} t^{a-1} dt$$

bezeichnet, in welchem die Variable t den Abschnitt der positiven reellen Axe von $+\infty$ bis $\mathfrak{b}_0$, den Kreis $\mathfrak{K}$ in positiver Drehungsrichtung und wiederum die Strecke von $\mathfrak{b}_0$ bis $+\infty$ durchläuft. Auf dem ersten Theil des Integrationsweges kommt, wie vorausgesetzt wird, für die Potenz t^{a-1} derjenige Werth $e^{(a-1)\log t}$, in welchem $\log t$ reell ist, zur Anwendung. Es seien ferner $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{s-1}$ die $s-1$ vom Nullpunkte ausgehenden Geraden, welche mit der positiven reellen Axe die respectiven Winkel

$$\frac{2\pi}{s}, \quad \frac{4\pi}{s}, \quad \frac{6\pi}{s}, \ldots, \frac{2(s-1)\pi}{s}$$

bilden; s bedeutet eine beliebige positive ganze Zahl. Die Schnittpunkte der Geraden $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{s-1}$ mit dem Kreise $\mathfrak{K}$, welche $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_{s-1}$ heissen mögen, und der Punkt $\mathfrak{b}_0$ theilen den Kreis in s gleiche Bogen. Der unendlich entfernte Punkt der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ werde $\mathfrak{q}_\nu$ genannt; ebenso sei $\mathfrak{q}_0$ der unendlich entfernte Punkt der positiven reellen Axe. Man setzt also

$$(6) \qquad \mathfrak{b}_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}, \qquad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty} \left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}\right).$$

Die Grössen $\mathfrak{b}_s$, $\mathfrak{q}_s$ sind mit $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{q}_0$ identisch.

Es soll nun ein Integral

$$(7) \qquad J = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-v^s} v^{m-1} dv$$

betrachtet werden, dessen Integrationsweg sich aus dem Abschnitt der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ von $\mathfrak{q}_\nu$ bis $\mathfrak{b}_\nu$, dem Kreisbogen $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{b}_{\nu+1}$ und dem Abschnitt der Geraden $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ von $\mathfrak{b}_{\nu+1}$ bis $\mathfrak{q}_{\nu+1}$ zusammensetzt; m ist irgend

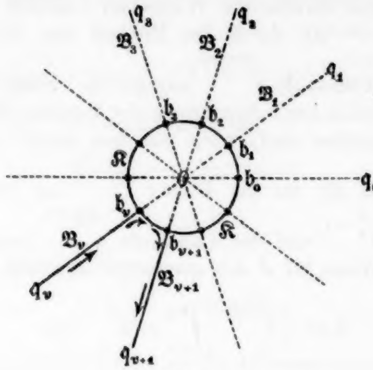


Fig. 1.

eine positive ganze Zahl. Für die Punkte der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ hat man, wenn mod. v durch ϱ bezeichnet wird,

$$v = \varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{s}}, \qquad dv = e^{\frac{2\nu\pi i}{s}} d\varrho$$

zu nehmen, also

$$(8) \qquad v^{m-1} dv = e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}} \varrho^{m-1} d\varrho.$$

Man wendet auf das Integral J die Substitution

$$v = t^{\frac{1}{s}}, \qquad v^s = t$$

an, woraus

$$e^{-v^s} v^{m-1} dv = \frac{1}{s} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt$$

folgt. Setzt man $v = \varrho e^{\lambda i}$, $t = \varrho' e^{\lambda' i}$, so ist $\varrho' = \varrho^s$ und $\lambda' = s\lambda$. Sowohl dem genannten Abschnitte der Geraden $\mathfrak{B}_\nu$ als auch dem der Geraden $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ entspricht in dem Wege der Variable t die Strecke der positiven reellen Axe zwischen 1 und ∞, und während v längs des Kreisbogens $\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{b}_{\nu+1}$ variirt, durchläuft t den ganzen Kreis $\mathfrak{K}$. Demnach ist J gleich dem Integral

$$(9) \qquad \frac{1}{s} \int_{+\infty}^{\overline{+\infty}(0)} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt,$$

dessen Integrationsweg mit dem des Integrals (5) übereinstimmt. Wegen der Gleichung $\varrho' = \varrho^s$ ist, so lange t auf der positiven reellen Axe fortschreitet, der reelle Werth von $\frac{1}{s} t^{\frac{m}{s}-1} dt$ gleich der Grösse

$$\frac{1}{s} \varrho'^{\frac{m}{s}-1} d\varrho' = \varrho^{m-1} d\varrho.$$

Aber auf der ersten Strecke des Weges der Variable v wird nach (8) der Werth von $v^{m-1}dv$ durch das Product aus der reellen Grösse $\varrho^{m-1}d\varrho$ und der Constante $e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}}$ angegeben. Folglich hat man (da durch die Substitution keine Aenderung des Werthes der zu integrirenden Function eintreten darf) auch auf dem ersten Theile des Integrationsweges von (9) für die Potenz $t^{\frac{m}{s}-1}$ das Product aus dem reellen Werthe $t^{\frac{m}{s}-1}$ und der Constante $e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}}$ anzuwenden. Man findet auf diese Weise für J den genaueren Ausdruck

$$(10) \qquad J = \frac{1}{s} e^{\frac{2\nu m\pi i}{s}} \overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt,$$

in welchem $t^{\frac{m}{s}-1}$ während des anfänglichen Fortschreitens von t längs der reellen Axe reell und positiv ist. Mit Rücksicht auf die Gleichung (5) kann nun in (10)

$$\overline{\int_{+\infty}^{(0)}} e^{-t} t^{\frac{m}{s}-1} dt = e^{\frac{m\pi i}{s}} \bar{\Gamma}\left(\frac{m}{s}\right)$$

gesetzt werden, da $t^{\frac{m}{s}-1}$ den in (5) vorkommenden Zweig der Potenz t^{a-1} für $a = \frac{m}{s}$ bedeutet. Also gilt für J die Gleichung

$$(11) \qquad \int_{q_\nu}^{q_{\nu+1}} e^{-v^s} v^{m-1} dv = \frac{1}{s} e^{\frac{2\nu+1}{s} m\pi i} \bar{\Gamma}\left(\frac{m}{s}\right).$$

Ist m ein Vielfaches von s, so wird das Integral J gleich Null, da die Grösse $\bar{\Gamma}(a)$ für positive ganzzahlige Argumente a verschwindet.

§ 2.

Man setze in die Differentialgleichung (3)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{n+1} xy$$

für y das bestimmte Integral

$$y = \int_g^h e^{vx} V\, dv$$

ein, in welchem V nur von v abhängt, und g, h Constante sind. Dann ergiebt sich

$$(n+1)\int_g^h e^{vx} v^n V\, dv - \int_g^h e^{vx} x V\, dv = 0$$

oder, wenn der zweite Summandus durch theilweise Integration umgeformt wird,

$$\int_g^h e^{vx}\left\{\frac{dV}{dv} + (n+1)v^n V\right\} dv - \left[e^{vx} V\right]_{v=g}^{v=h} = 0.$$

Man stellt für V die Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dv} + (n+1)v^n V = 0$$

auf, die durch

$$V = e^{-v^{n+1}}$$

befriedigt wird. Das Integral

$$(12) \qquad y = \int_g^h e^{-v^{n+1}+vx} dv$$

ist folglich eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (3), falls die Constanten g und h so gewählt werden, dass

$$(13) \qquad e^{-h^{n+1}+hx} - e^{-g^{n+1}+gx} = 0$$

ist.

Die Exponentialgrösse $e^{-v^{n+1}+vx}$ nähert sich (unter der Voraussetzung, dass x endlich bleibt) dem Werthe Null, wenn v reell, positiv und unbegrenzt gross ist. Dasselbe gilt, wenn man

$$v = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}\right)$$

setzt. Es mögen, indem in (6) $s = n+1$ genommen wird, durch $\mathfrak{b}_\nu$, $\mathfrak{q}_\nu$ jetzt die Werthe

$$(14) \qquad \mathfrak{b}_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}, \quad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho e^{\frac{2\nu\pi i}{n+1}}\right)$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ bezeichnet werden. Da der Bedingung (13) genügt ist, wenn man für g und h irgend zwei der in (14) genannten Werthe $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n+1}$ wählt, so existiren n particuläre Integrale der Gleichung (3) von der Form

$$(15) \qquad Y_\nu = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}+vx} dv,$$

deren Integrationsweg dem des Integrals (7) analog ist. Diese

Functionen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bilden zusammen das vollständige Integral der Gleichung (3).

Die obige Entwickelung kommt im Wesentlichen auf die Rechnungen zurück, welche Jacobi, Lobatto, Petzval in Bezug auf die Gleichung (3) angestellt haben. Jacobi und Lobatto beschränken sich (l. c.) auf reelle Integrationswege, multipliciren aber die Grösse v successiv mit den Einheitswurzeln $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_n$. Petzval dagegen benutzt (l. c. Bd. I, pag. 57) die Integralgrenzen $\mathfrak{b}_1.\infty, \mathfrak{b}_2.\infty, \ldots, \mathfrak{b}_{n+1}.\infty$, wo unter ∞ der reelle positive unendliche Werth verstanden wird. In der von ihm angegebenen Lösung der Gleichung (3)

$$C_1\int_0^{\mathfrak{b}_1.\infty} e^{-v^{n+1}+vx}dv + C_2\int_0^{\mathfrak{b}_2.\infty} e^{-v^{n+1}+vx}dv$$
$$+\cdots+C_{n+1}\int_0^{\mathfrak{b}_{n+1}.\infty} e^{-v^{n+1}+vx}dv$$

sind die im Uebrigen willkürlichen Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$ durch die (zuerst von Jacobi aufgestellte) Relation

$$C_1 + C_2 + \cdots + C_{n+1} = 0$$

mit einander verbunden. Setzt man also

$$0 = C_1 = C_2 = \cdots = C_{\nu-1} = C_{\nu+2} = C_{\nu+3} = \cdots = C_{n+1},$$

so erhält man, da $C_\nu = -C_{\nu+1}$ wird, das particuläre Integral

$$C_{\nu+1}\left\{\int_0^{q_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}+vx}dv - \int_0^{q_\nu} e^{-v^{n+1}+vx}dv\right\}.$$

Letzterer Ausdruck ist aber gleich $C_{\nu+1}Y_\nu$. Statt die Variable v die Linien $\mathfrak{B}_\nu$ und $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ (von q_ν bis 0 und von 0 bis $q_{\nu+1}$, Fig. 1) durchlaufen zu lassen, kann man, da $v = 0$ kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function ist, den in (7) bezeichneten Integrationsweg anwenden*).

Die Differentialgleichung (3) hat die Eigenschaft, dass, wenn für y die Reihe

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

substituirt wird, die Coefficienten der Potenzen

$$x^n,\ x^{2n+1},\ x^{3n+2},\ \ldots,\ x^{\varkappa(n+1)-1},\ \ldots$$

verschwinden. Zwischen $c_\varkappa$ und $c_{\varkappa+n+1}$ besteht (für ein beliebiges $\varkappa$) die Relation

$$c_{\varkappa+n+1} = \frac{1}{n+1}\ \frac{c_\varkappa}{(\varkappa+2)(\varkappa+3)\ldots(\varkappa+n+1)}.$$

Man findet, da $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ willkürlich bleiben, als particuläre Lösungen der Differentialgleichung (3) die n unendlichen Reihen

---

*) Cfr. C. Jordan, „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique", Tome III, 1887 (Paris, Gauthier-Villars § 195.

$$(16)\qquad \eta_l = \begin{cases} \dfrac{x^l}{l!} + \dfrac{\alpha_l x^{l+n+1}}{(l+n+1)!} + \dfrac{\alpha_l(\alpha_l+1)x^{l+2n+2}}{(l+2n+2)!} \\ + \cdots + \dfrac{\alpha_l(\alpha_l+1)(\alpha_l+2)\ldots(\alpha_l+\varkappa-1)x^{l+\varkappa(n+1)}}{(l+\varkappa n+\varkappa)!} + \cdots, \end{cases}$$

woselbst für l nach einander die Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ zu setzen sind, und α_l die Constante

$$(17)\qquad \alpha_l = \frac{l+1}{n+1}$$

bedeutet. Durch $m!$ wird das Product $1.2\ldots m$ (durch $0!$ der Werth 1) bezeichnet.

Man gelangt nun unmittelbar zu den zwischen den Integralen Y_ν und den Reihen $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ bestehenden Beziehungen, wenn man in (15) für e^{vx} die Reihe

$$e^{vx} = 1 + \frac{vx}{1} + \frac{v^2x^2}{1.2} + \cdots + \frac{v^kx^k}{k!} + \cdots$$

einführt. Hierdurch ergiebt sich für Y_ν die Reihenentwickelung

$$(18)\qquad Y_\nu = P_0 + P_1\frac{x}{1} + P_2\frac{x^2}{1.2} + \cdots + P_k\frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

in der zur Abkürzung

$$P_k = \int_{q_\nu}^{q_{\nu+1}} e^{-v^{n+1}} v^k\, dv$$

gesetzt ist. Da das letztere Integral aus (7) für $s=n+1$, $m=k+1$ entsteht, so folgt aus der Formel (11), wenn durch δ die Constante

$$(19)\qquad \delta = e^{\frac{2\nu+1}{n+1}\pi i}$$

bezeichnet wird, die Gleichung

$$P_k = \frac{\delta^{k+1}}{n+1}\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right).$$

Die verschiedenen Werthe von k sind je nach dem Reste, der bei der Division von $k+1$ durch $n+1$ verbleibt, in $n+1$ Gruppen zu theilen. In dem Falle, wo $k+1$ ein Multiplum von $n+1$ ist, hat man

$$P_k = 0,$$

da die Grösse $\bar{\Gamma}$ für positive ganzzahlige Argumente verschwindet. Ist $k+1$ kein Vielfach von $n+1$, so nenne man $l+1$ den Rest, der sich bei der Division $k+1 : n+1$ ergiebt. Es wird also

$$k+1 = \varkappa(n+1) + l + 1,\quad k = \varkappa(n+1) + l$$

gesetzt, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, und l einer der Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ ist. Durch Anwendung der Formel (Bd. 35 dieser Annalen, pag. 515)

$$(20)\qquad \bar{\Gamma}(a+\varkappa) = (-1)^\varkappa a(a+1)\cdots(a+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(a)$$

findet man dann für $\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right), = \bar{\Gamma}\left(\frac{l+1}{n+1}+\varkappa\right)$, den Ausdruck

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right) = (-1)^\varkappa \alpha_l(\alpha_l+1) \cdots (\alpha_l+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(\alpha_l),$$

wo α_l, wie in (17), den positiven ächten Bruch $\frac{l+1}{n+1}$ bedeutet. Da ferner $\delta^{n+1} = -1$ ist, so folgt

$$\delta^{k+1} = \delta^{\varkappa(n+1)+l+1} = (-1)^\varkappa \delta^{l+1}.$$

Mithin gilt für P_k die Gleichung

$$(21) \quad P_k = P_{\varkappa(n+1)+l} = \frac{\delta^{l+1}}{n+1} \alpha_l(\alpha_l+1) \cdots (\alpha_l+\varkappa-1)\bar{\Gamma}(\alpha_l).$$

Dieser Werth von P_k wird in die Reihe (18) substituirt. Nimmt man dann diejenigen Summanden zusammen, deren Indices k zu demselben l gehören, so entsteht die Formel

$$(22) \quad Y_\nu = \frac{\delta}{n+1}\left\{\bar{\Gamma}\left(\frac{1}{n+1}\right)\eta_0 + \bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+1}\right)\delta\eta_1 + \bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+1}\right)\delta^2\eta_2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \bar{\Gamma}\left(\frac{n}{n+1}\right)\delta^{n-1}\eta_{n-1}\right\},$$

in welcher δ die Constante (19), und $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ die Reihen (16) bezeichnen.

§ 3.

Die Differentialgleichung (4) soll zunächst für den Fall, dass $p = 2$ ist, betrachtet werden. Dieselbe lautet dann

$$(23) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(n+2)^2} x^2 y.$$

Man nenne g, h, g', h' Constante, V eine Function von v allein, W eine Function von w allein und substituire in (23) für y das Doppelintegral

$$(24) \qquad y = \int_{g'}^{h'} W\,dw \int_g^h e^{vwx}\, V\,dv.$$

Dann entsteht die Gleichung

$$(25) \quad \begin{cases} (n+2)^2 \int_{g'}^{h'} w^n\, W\,dw \int_g^h e^{vwx} v^n\, V\,dv \\ = x^2 \int_{g'}^{h'} W\,dw \int_g^h e^{vwx}\, V\,dv. \end{cases}$$

Das rechts stehende Integral, dem man die Gestalt

$$x \int_{g'}^{h'} \frac{W}{w}\,dw \int_g^h e^{vwx} wx\, V\,dv$$

geben kann, wird durch zweimalige Anwendung der Formel der theilweisen Integration transformirt. Es ist

$$\int_g^h e^{vwx}\, wx\, V\, dv = \left[e^{vwx} V\right]_{v=g}^{v=h} - \int_g^h e^{vwx} \frac{dV}{dv} dv.$$

Unterwirft man also die Constanten g und h der Bedingung

$$\left[e^{vwx} V\right]_{v=g}^{v=h} = 0 \tag{26}$$

und kehrt die Reihenfolge der Integration (nach v und w) um, so wird die rechte Seite von (25) gleich dem Ausdruck

$$-\int_g^h \frac{1}{v} \frac{dV}{dv} dv \int_{g'}^{h'} e^{vwx}\, vx \frac{W}{w} dw.$$

Dass die Aenderung der Integrationsfolge zulässig ist, ergiebt sich aus der schliesslichen Wahl der Functionen V und W. Man setzt nun

$$\int_{g'}^{h'} e^{vwx}\, vx \frac{W}{w} dw$$

$$= \left[e^{vwx} \frac{W}{w}\right]_{w=g'}^{w=h'} - \int_{g'}^{h'} e^{vwx} \frac{d\frac{W}{w}}{dw} dw$$

und beschränkt g', h' durch die Bedingung

$$\left[e^{vwx} \frac{W}{w}\right]_{w=g'}^{w=h'} = 0. \tag{27}$$

Dann wird aus (25) die Gleichung

$$(n+2)^2 \int_{g'}^{h'} w^n\, W\, dw \int_g^h e^{vwx}\, v^n\, V\, dv$$

$$= \int_{g'}^{h'} \frac{d\frac{W}{w}}{dw} dw \int_g^h e^{vwx} \frac{1}{v} \frac{dV}{dv} dv$$

erhalten, der Genüge geschieht, wenn V und W durch die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} (n+2)\, v^n V = -\dfrac{1}{v} \dfrac{dV}{dv}, \\ (n+2)\, w^n W = -\dfrac{d\frac{W}{w}}{dw}, \end{cases} \tag{28}$$

d. h.

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dv} = \frac{d \log V}{dv} = -(n+2) v^{n+1},$$

$$\frac{w}{W} \frac{d\frac{W}{w}}{dw} = \frac{d \log \frac{W}{w}}{dw} = -(n+2) w^{n+1}$$

bestimmt werden. Es ist hiernach

$$V = e^{-v^{n+2}}, \qquad W = w e^{-w^{n+2}}. \tag{29}$$

Nennt man ferner (für $\nu = 1, 2, \ldots, n+2$)

$$(30)\qquad \mathfrak{q}_\nu = \lim_{\varrho=\infty}\left(\varrho\, e^{\frac{2\nu\pi i}{n+2}}\right)$$

und wählt für g, h und für g', h' je zwei der Werthe $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n+2}$, so sind die Bedingungen (26) und (27) erfüllt. Das Doppelintegral

$$(31)\qquad Y_{\mu,\nu} = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-w^{n+2}}\, w\, dw \int_{\mathfrak{q}_\mu}^{\mathfrak{q}_{\mu+1}} e^{-v^{n+2}+vwx}\, dv,$$

in welchem sowohl v als w einen Integrationsweg von der in (7) angegebenen Art durchlaufen mögen, ist also, für beliebige Werthe der Indices μ und ν, eine Lösung der Differentialgleichung (23).

Wird in (31)

$$e^{vwx} = 1 + \frac{vwx}{1} + \cdots + \frac{v^k w^k x^k}{k!} + \cdots$$

gesetzt, so folgt

$$(32)\qquad Y_{\mu,\nu} = Q_0 + Q_1 \frac{x}{1} + \cdots + Q_k \frac{x^k}{k!} + \cdots,$$

wo Q_k die Constante

$$Q_k = \int_{\mathfrak{q}_\nu}^{\mathfrak{q}_{\nu+1}} e^{-w^{n+2}} w^{k+1}\, dw \int_{\mathfrak{q}_\mu}^{\mathfrak{q}_{\mu+1}} e^{-v^{n+2}} v^k\, dv$$

bedeutet. Die Grösse Q_k stellt das Product zweier einfacher Integrale dar, deren Werth sich aus der Formel (11) (für $s = n+2$, $m = k+1$, resp. $k+2$) ergiebt. Man findet, wenn durch A und ε die von k unabhängigen Constanten

$$(33)\qquad A = \frac{1}{(n+2)^2}\, e^{\frac{2\mu+1+2(2\nu+1)}{n+2}\pi i}, \qquad \varepsilon = e^{\frac{\mu+\nu+1}{n+2}2\pi i}$$

bezeichnet werden, für Q_k den Ausdruck

$$(34)\qquad Q_k = A\,\varepsilon^k\, \bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+2}\right) \bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right).$$

Die Grösse Q_k verschwindet, sobald k die Form $\varkappa(n+2) - 2$ oder $\varkappa(n+2) - 1$ annimmt, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl ist; denn hierfür wird $\bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right)$, resp. $\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+2}\right)$, gleich Null. In der Entwickelung (32) des Integrals $Y_{\mu,\nu}$ fehlen daher die Potenzen

$$x^n,\ x^{n+1},\ x^{2n+2},\ x^{2n+3}, \ldots,\ x^{\varkappa(n+2)-2},\ x^{\varkappa(n+2)-1}, \ldots.$$

Es sei im Uebrigen

$$k = \varkappa(n+2) + l,$$

wo l eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$ bedeutet. Dann gelten nach (20) die Gleichungen

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)=\bar{\Gamma}(\beta_l+\varkappa)=(-1)^{\varkappa}\beta_l(\beta_l+1)\ldots(\beta_l+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(\beta_l),$$

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+2}\right)=\bar{\Gamma}(\gamma_l+\varkappa)=(-1)^{\varkappa}\gamma_l(\gamma_l+1)\ldots(\gamma_l+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(\gamma_l),$$

in denen zur Abkürzung

$$(35)\qquad \beta_l=\frac{l+1}{n+2},\qquad \gamma_l=\frac{l+2}{n+2}$$

gesetzt ist. Für Q_k ergiebt sich, wenn man beachtet, dass nach (33)

$$\varepsilon^{n+2}=1,\quad \varepsilon^k=\varepsilon^{\varkappa(n+2)+l}=\varepsilon^l$$

ist, hieraus der Werth

$$(36)\qquad Q_k=Q_{\varkappa(n+2)+l}$$
$$=A\varepsilon^l\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)\ldots(\beta_l+\varkappa-1)(\gamma_l+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(\beta_l)\,\bar{\Gamma}(\gamma_l).$$

Indem man nun in (32) diejenigen Terme, deren Index k bei der Division durch $n+2$ denselben Rest l liefert, zu Theilsummen vereinigt, und durch ζ_l für $l=0,1,2,\ldots,n-1$ die Reihe

$$(37)\quad \zeta_l=\left\{\begin{aligned}&\frac{x^l}{l!}+\frac{\beta_l\gamma_l x^{l+n+2}}{(l+n+2)!}+\frac{\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)x^{l+2(n+2)}}{(l+2n+4)!}\\&+\cdots+\frac{\beta_l\gamma_l(\beta_l+1)(\gamma_l+1)\ldots(\beta_l+\varkappa-1)(\gamma_l+\varkappa-1)x^{l+\varkappa(n+2)}}{(l+n\varkappa+2\varkappa)!}+\cdots\end{aligned}\right.$$

bezeichnet, findet man, dass das Integral $Y_{\mu,\nu}$ mit den Reihen ζ^l durch die Gleichung

$$(38)\quad Y_{\mu,\nu}=A\left\{\begin{aligned}&\Gamma\left(\frac{1}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+2}\right)\zeta_0+\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+2}\right)\varepsilon\zeta_1\\&+\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{4}{n+2}\right)\varepsilon^2\zeta_2+\cdots+\bar{\Gamma}\left(\frac{n}{n+2}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\varepsilon^{n-1}\zeta_{n-1}\end{aligned}\right\}$$

verbunden ist.

§ 4.

In die Differentialgleichung (4)

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\frac{1}{(n+p)^p}x^p y$$

werde für y das p-fache Integral

$$(39)\qquad \int_{g_p}^{h_p}T_p\,dt_p\int_{g_{p-1}}^{h_{p-1}}T_{p-1}dt_{p-1}\ldots\int_{g_2}^{h_2}T_2\,dt_2\int_{g_1}^{h_1}e^{t_1t_2\cdots t_p x}T_1\,dt_1$$

eingesetzt, in welchem T_ν (für $\nu=1,2,\ldots,p$) eine Function von t_ν allein ist, und $g_1, h_1, \ldots, g_p, h_p$ Constante bedeuten. Es entsteht dann die Gleichung

$$(40)\quad (n+p)^p \int_{g_p}^{h_p} t_p^n T_p\, dt_p \ldots \int_{g_2}^{h_2} t_2^n T_2\, dt_2 \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_1^n T_1\, dt_1$$
$$= x^p \int_{g_p}^{h_p} T_p\, dt_p \ldots \int_{g_2}^{h_2} T_2\, dt_2 \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} T_1\, dt_1,$$

auf deren rechte Seite man die Formel der theilweisen Integration p Mal, und zwar nach einander in Bezug auf die Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ anwendet. Hierbei werde die Reihenfolge der Integrationen regelmässig in der Art geändert, dass diejenige Integration, wo partiell integrirt werden soll, die zuerst auszuführende ist. Für das Integral nach t_1 erhält man, indem man gleichzeitig bei $T_2, T_3, \ldots, T_p$ die Factoren $t_2^{-1}, t_3^{-1}, \ldots, t_p^{-1}$ hinzufügt, den Ausdruck

$$\int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_2 t_3 \ldots t_p x\, T_1\, dt_1$$
$$= [e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} T_1]_{t_1=g_1}^{t_1=h_1} - \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{dT_1}{dt_1} dt_1.$$

Die Constanten g_1 und h_1 werden der Bedingung

$$[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} T_1]_{t_1=g_1}^{t_1=h_1} = 0$$

unterworfen. Analog schreibt man

$$\int_{g_2}^{h_2} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_1 t_3 t_4 \ldots t_p \frac{T_2}{t_2} dt_2$$
$$= \left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_2}{t_2}\right]_{t_2=g_2}^{t_2=h_2} - \int_{g_2}^{h_2} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{d\frac{T_2}{t_2}}{dt_2} dt_2$$

und bestimmt, dass

$$\left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_2}{t_2}\right]_{t_2=g_2}^{t_2=h_2} = 0$$

sein soll. Bei der theilweisen Integration nach t_ν hat man zu berücksichtigen, dass zu T_ν bereits der Factor $\frac{1}{t_\nu^{\nu-1}}$ hinzugetreten ist (wegen der vorausgegangenen theilweisen Integrationen nach $t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}$), so dass sich die Gleichung

$$\int_{g_\nu}^{h_\nu} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_1 t_2 \ldots t_{\nu-1} t_{\nu+1} \ldots t_p x \frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}} dt_\nu$$
$$= \left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}\right]_{t_\nu=g_\nu}^{t_\nu=h_\nu} - \int_{g_\nu}^{h_\nu} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{d\frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} dt_\nu$$

ergiebt. Durch die späteren theilweisen Integrationen nach

$$t_{\nu+1},\ t_{\nu+2}, \ldots, t_p$$

tritt zu $\dfrac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu}$ noch der Factor $\dfrac{1}{t_\nu^{p-\nu}}$ hinzu. Für die Constanten g_ν und h_ν wird $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ die Bedingung

$$\left[e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}\right]_{t_\nu = g_\nu}^{t_\nu = h_\nu} = 0 \tag{41}$$

aufgestellt. Auf diese Weise entsteht aus (40) die Gleichung

$$(n+p)^p \int_{g_p}^{h_p} t_p^n T_p \, dt_p \ldots \int_{g_\nu}^{h_\nu} t_\nu^n T_\nu \, dt_\nu \ldots \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} t_1^n T_1 \, dt_1$$

$$= (-1)^p \int_{g_p}^{h_p} \frac{d\dfrac{T_p}{t_p^{p-1}}}{dt_p} dt_p \cdots \int_{g_\nu}^{h_\nu} \frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} \frac{dt_\nu}{t_\nu^{p-\nu}} \cdots$$

$$\cdots \int_{g_2}^{h_2} \frac{d\dfrac{T_2}{t_2}}{dt_2} \frac{t_2}{t_2^{p-2}} \int_{g_1}^{h_1} e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} \frac{dT_1}{dt_1} \frac{dt_1}{t_1^{p-1}}.$$

Um derselben zu genügen, definirt man (für $\nu = 1, 2, \ldots, p$) die Function T_ν durch die Differentialgleichung

$$\frac{1}{t_\nu^{p-\nu}} \frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = -(n+p) t_\nu^n T_\nu. \tag{42}$$

Durch Multiplication mit $\dfrac{1}{T_\nu} t_\nu^{p-1}$ folgt hieraus

$$\frac{t_\nu^{\nu-1}}{T_\nu} \frac{d\dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = \frac{d \log \dfrac{T_\nu}{t_\nu^{\nu-1}}}{dt_\nu} = -(n+p) t_\nu^{n+p-1},$$

also

$$T_\nu = t_\nu^{\nu-1} e^{-t_\nu^{n+p}}. \tag{43}$$

Die Bedingungen (41) sind erfüllt, wenn für die Integralgrenzen $g_1, h_1, \ldots, g_p, h_p$ Werthe aus der Reihe $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{n+p}$ genommen werden, wo $\mathfrak{q}_m$ (für $m = 1, 2, \ldots, n+p$) die Grösse

$$\mathfrak{q}_m = \lim_{\varrho = \infty} \left(\varrho e^{\frac{2m\pi i}{n+p}}\right) \tag{44}$$

bedeutet. Es mögen, indem man unter $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ beliebige der $n+p$ Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n+p$ versteht, die Werthe

$$g_1 = \mathfrak{q}_\alpha, \; h_1 = \mathfrak{q}_{\alpha+1}, \; g_2 = \mathfrak{q}_\beta, \; h_2 = \mathfrak{q}_{\beta+1}, \ldots, g_p = \mathfrak{q}_\mu, \; h_p = \mathfrak{q}_{\mu+1} \tag{45}$$

zur Anwendung kommen. Bezeichnet man also zur Abkürzung durch Φ die Function

(46) $$\Phi = e^{-t_1^{n+p} - t_2^{n+p} - \cdots - t_p^{n+p} + t_1 t_2 \cdots t_p x}\, t_2 t_3^2 \ldots t_p^{p-1}$$

und wählt für sämmtliche Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_p$ Integrationswege, die dem Weg der Variable v in (7) analog sind, so erhält man den Ausdruck

(47) $$Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = \int_{\mathfrak{a}_\mu}^{\mathfrak{a}_{\mu+1}} dt_p \ldots \int_{\mathfrak{a}_\beta}^{\mathfrak{a}_{\beta+1}} dt_2 \int_{\mathfrak{a}_\alpha}^{\mathfrak{a}_{\alpha+1}} \Phi\, dt_1$$

als particuläre Lösung der Differentialgleichung (4).

Die Integration der Gleichung (4) durch die Potenzreihe

(48) $$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

liefert n particuläre Lösungen von der Form

(49) $$\omega_l = \frac{x^l}{l!} + \frac{\sigma_l^{(1)} \sigma_l^{(2)} \ldots \sigma_l^{(p)} x^{l+n+p}}{(l+n+p)!} + \frac{\sigma_l^{(1)}(\sigma_l^{(1)}+1)\sigma_l^{(2)}(\sigma_l^{(2)}+1)\ldots\sigma_l^{(p)}(\sigma_l^{(p)}+1)x^{l+2(n+p)}}{(l+2n+2p)!}$$
$$+ \frac{\sigma_l^{(1)}(\sigma_l^{(1)}+1)(\sigma_l^{(1)}+2)\sigma_l^{(2)}(\sigma_l^{(2)}+1)(\sigma_l^{(2)}+2)\ldots\sigma_l^{(p)}(\sigma_l^{(p)}+1)(\sigma_l^{(p)}+2)x^{l+3(n+p)}}{(l+3n+3p)!} + \cdots,$$

woselbst l die Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ nach einander annimmt, und $\sigma_l^{(1)}, \sigma_l^{(2)}, \ldots, \sigma_l^{(p)}$ die Constanten

(50) $$\sigma_l^{(1)} = \frac{l+1}{n+p},\ \sigma_l^{(2)} = \frac{l+2}{n+p}, \cdots, \sigma_l^{(p)} = \frac{l+p}{n+p}$$

bedeuten; $m!$ ist $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$ (und $0!$ gleich 1). Die Potenzen

$$\begin{array}{llll} x^n, & x^{n+1}, & \ldots, & x^{n+p-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x^{\varkappa(n+p)-p}, & x^{\varkappa(n+p)-(p-1)}, & \ldots, & x^{\varkappa(n+p)-1}, \text{ etc.} \end{array}$$

($\varkappa$ eine beliebige positive ganze Zahl) kommen in den letzteren Entwickelungen nicht vor.

Da die unendlichen Reihen $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ das vollständige Integral von (4) angeben, so kann man die Grösse $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ als lineare Function derselben darstellen. Um einen solchen Ausdruck für $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ abzuleiten, substituirt man in (46)

$$e^{t_1 t_2 \cdots t_p x} = 1 + \frac{t_1 t_2 \ldots t_p x}{1} + \cdots + \frac{t_1^k t_2^k \ldots t_p^k x^k}{k!} + \cdots.$$

Dann ergiebt sich

(51) $$Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = S_0 + S_1 \frac{x}{1} + S_2 \frac{x^2}{2!} + \cdots + S_k \frac{x^k}{k!} + \cdots + \text{inf.},$$

wo S_k das Product der p Integrale

$$S_k = \int_{\mathfrak{a}_\alpha}^{\mathfrak{a}_{\alpha+1}} e^{-t_1^{n+p}} t_1^k dt_1 \int_{\mathfrak{a}_\beta}^{\mathfrak{a}_{\beta+1}} e^{-t_2^{n+p}} t_2^{k+1} dt_2 \ldots$$
$$\ldots \int_{\mathfrak{a}_\mu}^{\mathfrak{a}_{\mu+1}} e^{-t_p^{n+p}} t_p^{k+p-1} dt_p$$

bezeichnet. Aus der Formel (11) folgt aber, wenn man B und θ die von k unabhängigen Constanten

$$(52)\qquad \begin{cases} B = \dfrac{1}{(n+p)^p}\, e^{\frac{2\alpha+1+2(2\beta+1)+\cdots+p(2\mu+1)}{n+p}\pi i}, \\ \theta = e^{\frac{2(\alpha+\beta+\cdots+\mu)+p}{n+p}\pi i} \end{cases}$$

nennt, für S_k der Werth

$$(53)\qquad S_k = B\theta^k\, \bar{\Gamma}\left(\frac{k+1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{k+2}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{k+p}{n+p}\right).$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass S_k verschwindet, sobald eine der Zahlen

$$k+1,\ k+2, \ldots, k+p$$

ein Multiplum von $n+p$ ist. Setzt man also

$$k = \varkappa(n+p) + l,$$

wo $\varkappa$ und l positive ganze Zahlen sind, und $l < n+p$, so entsprechen die von Null verschiedenen Werthe der Grösse S_k den Fällen $l = 0$, $l = 1, \ldots, l = n-1$; für $l = n$, $l = n+1, \ldots$ werden $k+p$, $k+p-1, \ldots$ Vielfache von $n+p$. Durch Benutzung der Formel (20) findet man (für $\nu = 1, 2, \ldots, p$), wenn man nach (50) den Quotienten $\frac{l+\nu}{n+p}$ kurz $\sigma_l^{(\nu)}$ nennt,

$$\bar{\Gamma}\left(\frac{k+\nu}{n+p}\right) = \bar{\Gamma}\left(\frac{l+\nu}{n+p} + \varkappa\right) = \bar{\Gamma}(\sigma_l^{(\nu)} + \varkappa)$$
$$= (-1)^\varkappa \sigma_l^{(\nu)}(\sigma_l^{(\nu)}+1)\cdots(\sigma_l^{(\nu)}+\varkappa-1)\,\bar{\Gamma}(\sigma_l^{(\nu)}).$$

Für θ^k gilt, da nach (52) θ^{n+p} den Werth $(-1)^p$ hat, die Gleichung

$$\theta^k = \theta^{\varkappa(n+p)+l} = (-1)^{p\varkappa}\theta^l.$$

Folglich ist S_k, d. h. $S_{\varkappa(n+p)+l}$, gleich dem Producte aus der von $\varkappa$ unabhängigen Grösse

$$B\theta^l\, \bar{\Gamma}\left(\frac{l+1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{l+2}{n+p}\right)\cdots\left(\frac{l+p}{n+p}\right)$$

und dem Ausdrucke

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=p} \sigma_l^{(\nu)}(\sigma_l^{(\nu)}+1)(\sigma_l^{(\nu)}+2)\cdots(\sigma_l^{(\nu)}+\varkappa-1).$$

Dieser Werth von S_k ist in (51) einzusetzen. Werden zur Abkürzung durch $G_1, G_2, \ldots, G_n$ die Constanten

$$G_1 = \bar{\Gamma}\left(\frac{1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{p}{n+p}\right),$$
$$G_2 = \bar{\Gamma}\left(\frac{2}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{3}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{4}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{p+1}{n+p}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$G_n = \bar{\Gamma}\left(\frac{n}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+1}{n+p}\right)\bar{\Gamma}\left(\frac{n+2}{n+p}\right)\cdots\bar{\Gamma}\left(\frac{n+p-1}{n+p}\right)$$

bezeichnet, so ergiebt sich für das Integral $Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu}$ die Gleichung

$$(54)\qquad Y_{\alpha,\beta,\ldots,\mu} = B\left\{G_1\omega_0 + G_2\vartheta\omega_1 + G_3\vartheta^2\omega_2 + \cdots + G_n\vartheta^{n-1}\omega_{n-1}\right\},$$

in der $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ die Reihen (49), und B, ϑ die Constanten (52) bedeuten. Die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \mu$ beeinflusst auf der rechten Seite dieser Gleichung nur die Werthe B und ϑ.

Kiel, im September 1890.

Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen.

Von

Friedrich Schur in Dorpat.

Im Folgenden soll eine Vereinfachung und Weiterführung derjenigen Untersuchungen über Transformationsgruppen gegeben werden, welche im 35. Bande dieser Annalen*) begonnen wurden. Die Vereinfachung bezieht sich zunächst auf den Nachweis der Gruppeneigenschaft in endlicher Form aus den grundlegenden Differentialgleichungen für die die Gruppe darstellenden Functionen. Es konnte so die Weitläufigkeit der Rechnung vermieden werden, an welcher meine erste Darstellung leidet. Was die Weiterführung betrifft, so sind die Hauptresultate schon in den Berichten der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften**) veröffentlicht worden. Sie finden ihren wesentlichen Ausdruck in dem Satze, dass *sich die Componenten der infinitesimalen Transformationen jeder transitiven Gruppe in ihrer kanonischen Form als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen darstellen lassen, also eindeutige Functionen sind.* In § 2 wird eine von den betreffenden Entwicklungen meiner ersten Abhandlung unabhängige Begründung dieses Satzes für die Parametergruppe gegeben, wobei ebenfalls complicirtere Formeln vermieden werden konnten. Doch wurde die frühere Tendenz festgehalten, direct auf die Integration der Differentialgleichungen für die Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe auszugehen. Was endlich den erwähnten Satz für alle transitiven Gruppen betrifft, so gelang es mir inzwischen, einen Beweis desselben zu finden, welcher nur mit eindeutigen Functionen operirt und den Durchgang durch die im Allgemeinen mehrdeutigen, die Parametergruppe in ihrer endlichen Form darstellenden Functionen vermeidet, wie ich denn überhaupt das Princip befolgt habe, nicht über die jedem Probleme eigenthümlichen analytischen Hülfsmittel

*) F. Schur, Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen, diese Ann. Bd. 35, S. 161 ff.

**) F. Schur, Beweis für die Darstellbarkeit u. s. w. Ber. der Sächs. Ges. d. Wiss. vom 13. Jan. 1890.

hinauszugehen. So gelang es z. B. bei der Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung, die Entscheidung über die Anzahl ihrer wesentlichen Parameter der Thatsache entsprechend, dass diese Frage nur von der Zusammensetzung abhängt, auch rein algebraisch durchzuführen. Meinen ursprünglichen Plan, Ergänzungen zu dem letzten Paragraphen meiner ersten Abhandlung über die identische Transformation zu geben, behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor, weil hierzu Untersuchungen ganz anderer Natur gehören, als es diejenigen dieser Schrift der Hauptsache nach sind. Ich bemerke noch, dass für das Verständniss derselben eigentlich nur die beiden ersten Seiten von § 1 meiner ersten Schrift erforderlich sind.

§ 1.

Ueber die grundlegenden Differentialgleichungen.

Im ersten Paragraphen meiner o. a. Abhandlung wurde der folgende Satz bewiesen:

Satz 1. *Soll die Schaar von Transformationen:*

$$x_{\mathfrak{a}}' = f_{\mathfrak{a}}(x_1, x_2, \ldots, x_n;\, u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (1)$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Gruppe bilden, soll also sein:

$$f_{\mathfrak{a}}\big(f(x;u);v\big) = f_{\mathfrak{a}}\big(x;\varphi(u;v)\big) \qquad (2)$$

so sind hierfür die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen die, dass die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ und $\varphi_{\mathfrak{a}}(x;u)$ den Differentialgleichungen

$$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\big(\varphi(u;v)\big) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) \qquad (3)$$
$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r)$$

und:

$$\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\big(f(x;u)\big) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) \qquad (4)$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n;\ \mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, r)$$

genügen, und es ist die Gruppe durch die Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ und $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, welche letzteren den Anfangsbedingungen $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ genügen, vollständig bestimmt.

Hier bedeutet $\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wie im Folgenden immer, eine Grösse, welche die Werthe 1 oder 0 hat, je nachdem die beiden Indices $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander gleich oder von einander verschieden sind. Was die Nothwendigkeit dieser Bedingungen anlangt, so lässt sich der Beweis davon

schwerlich einfacher geben, als dort geschehen. Aber dass dieselben zugleich hinreichend sind, d. h. dass ein Functionensystem $x'_\mathfrak{a} = f_\mathfrak{a}(x; u)$, welches den Differentialgleichungen (4) genügt und für $u_\mathfrak{c} = 0$ in $x'_\mathfrak{a} = x_\mathfrak{a}$ übergeht, die Functionalgleichungen (2) befriedigt, lässt sich auch ohne die dort durchgeführte umfangreiche Rechnung beweisen.

Dies ist sehr einfach, wenn es uns nur darum zu thun ist, die im Satze angegebenen Bedingungen als hinreichend nachzuweisen. Setzen wir nämlich voraus, es seien einmal die Functionen $\varphi_\mathfrak{a}(u; v)$ den Differentialgleichungen (3) und den Anfangsbedingungen $\varphi_\mathfrak{a}(u; 0) = u_\mathfrak{a}$ gemäss und ferner die Functionen $f_\mathfrak{a}(x; u)$ den Differentialgleichungen (4) und den Anfangsbedingungen $f_\mathfrak{a}(x; 0) = x_\mathfrak{a}$ gemäss bestimmt, wodurch diese Functionen, falls überhaupt die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, vollständig definirt sind, so folgt aus (4) unter Berücksichtigung von (3):

$$(5) \qquad \xi^\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\big(f(x; \varphi(u; v))\big) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big)}{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u; v)}\, \omega^\mathfrak{b}_\mathfrak{c}\big(\varphi(u; v)\big)$$

$$= \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{\partial f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big)}{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u; v)}\, \frac{\partial \varphi_\mathfrak{c}(u; v)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega^\mathfrak{b}_\mathfrak{d}(v)$$

$$= \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \frac{\partial f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big)}{\partial v_\mathfrak{d}}\, \omega^\mathfrak{b}_\mathfrak{d}(v).$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass die $f_\mathfrak{a}\big(x; \varphi(u; v)\big)$ dieselben Functionen der $v_\mathfrak{c}$ und der $f_\mathfrak{b}\big(x; \varphi(u; 0)\big) = f_\mathfrak{a}(x; u)$ sind wie die $f_\mathfrak{a}(x; u)$ von den $u_\mathfrak{c}$ und den $f_\mathfrak{b}(x; 0) = x_\mathfrak{b}$, d. h. dass die Gleichungen (2) bestehen.

Aber es ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass die Integrabilitätsbedingungen des Systems (4) zugleich diejenigen des Systems (3) zur Folge haben. Um dies einzusehen, schreiben wir das System (4) in der Form:

$$(6) \qquad \frac{\partial f_\mathfrak{a}(x; u)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi^\mathfrak{c}_\mathfrak{a}\big(f(x; u)\big)\, E^\mathfrak{b}_\mathfrak{c}(u),$$

wo also die $E^\mathfrak{b}_\mathfrak{c}(u)$ definirt sind durch die Gleichungen:

$$(7) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \omega^\mathfrak{c}_\mathfrak{a}(u)\, E^\mathfrak{b}_\mathfrak{c}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

woraus folgt, dass auch:

$$(8) \qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E^\mathfrak{c}_\mathfrak{a}(u)\, \omega^\mathfrak{b}_\mathfrak{c}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}};$$

offenbar ist dann auch:

$$(9)\qquad E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)=\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

weil $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)=\delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ ist. Die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (6) ergeben sich nun direct in der Form:

$$(10)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\sum_{\mathfrak{e}=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(f(x;u))}{\partial f_{\mathfrak{e}}(x;u)}\,\xi_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(f(x;u)) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(f(x;u))}{\partial f_{\mathfrak{e}}(x;u)}\,\xi_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(f(x;u))\right\}E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)$$
$$+\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(f(x;u))\left\{\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}\right\}=0.$$

Setzt man:

$$(11)\qquad \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(0)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}=c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}},$$

sodass $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}=-c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{a}}$, so ergiebt sich zunächst für $u_1=u_2=\cdots=u_r=0$:

$$(12)\qquad \sum_{\mathfrak{e}=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{e}}}\,\xi_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}_1}(x)-\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{e}}}\,\xi_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\}=\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\,\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x).$$

Hierdurch geht (10) über in:

$$(13)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(f(x;u))\left\{\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}+\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{r}c_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}}\,E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\,E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\right\}=0,$$

oder nach (4) in:

$$(14)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}}(u)\left\{\frac{\partial E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}-\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r}c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}\,E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\,E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\right\}.$$

Erwägen wir, dass, wenn anders unsre Transformationsgruppe r-gliedrig sein soll, nicht Gleichungen*) von der Form:

$$(15)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,w_{\mathfrak{c}}=0.$$

bestehen dürfen, so folgt, dass die Coefficienten der $\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}$ in den Gleichungen (14) sämmtlich verschwinden müssen, dass also, weil die Determinante $|\,\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,|$ nicht identisch verschwindet, sein muss:

$$(16)\qquad \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}-\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}}=\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\,E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\text{**)}.$$

---

*) Vergl. meine o. a. Annalenarbeit S. 164.

**) Vergl. Maurer, Ueber allgemeinere Invariantensysteme, Ber. der bayer. Akad. d. W. 1888, S. 117.

Bestehen die Gleichungen (12) und (16), so sind umgekehrt die vollständigen Integrabilitätsbedingungen (10) des Systems (6) erfüllt.

Aus (7) folgt durch Differentiation:

$$(17)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) + \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\frac{\partial E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}}\right\} = 0,$$

also in Folge von (16):

$$(18)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\right\} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{r} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u) c_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}} E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u) E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u).$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\omega_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{l}}(u)\cdot\omega_{\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{l}_1}(u)$ und summirt über $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$ von 1 bis r, so folgt:

$$(19)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left\{\frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u) - \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\right\} = \sum c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}}^{\mathfrak{c}}\,\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u).$$

Ebenso nun wie die Gleichungen (12) und (16) die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (6) oder des mit ihm äquivalenten Systems (4) sind, so sind auch die Gleichungen (19) und die mit ihnen identischen Gleichungen (16) die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (3) oder des mit ihm äquivalenten Systems:

$$(20)\qquad \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)}{\partial v_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}\big(\varphi(u;v)\big)E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v),$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Was die Integration dieser Systeme betrifft, so kann sie mit Hülfe simultaner Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen geschehen. Denn aus (6) folgt:

$$(21)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;a_1t,\ldots,a_rt)}{dt} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=1}^{r}\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}\big(f(x;at)\big)E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(at)a_{\mathfrak{b}}.$$

Integrirt man dieselben unter der Bedingung, dass für $t=0$: $f_{\mathfrak{a}}(x;at)$ in $x_{\mathfrak{a}}$ übergehe, und setzt dann wieder $a_{\mathfrak{c}}t = u_{\mathfrak{c}}$, so kennt man die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$. Würden wir daher im Besonderen annehmen, dass:

$$(22)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r}E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)u_{\mathfrak{b}} = u_{\mathfrak{a}},$$

so würde das obige System in das folgende übergehen:

$$(23)\qquad \frac{df_{\mathfrak{a}}(x;at)}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r}\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\big(f(x;at)\big)a_{\mathfrak{b}},$$

welches von den Functionen $E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(at)$ ganz unabhängig ist.

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, dass man die $E_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u)$ den Gleichungen (16) und (22) gemäss bestimmen kann, ja dass diese Functionen dadurch vollständig definirt sind. Da man nun jedes Lösungssystem der Differentialgleichungen (19) in jedes andere durch Einführung neuer Parameter überführen kann*), so *wird man die unsere Gruppe definirenden Functionen* $f_\mathfrak{a}(x; u)$ *immer auf Grund des Systems* (23) *aus den Componenten* $\xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ *ihrer infinitesimalen Transformationen bestimmen können.*

§ 2.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe in ihrer kanonischen Form.

Die Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe oder die Functionen $\omega_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u)$ werden auf Grund der Gleichungen (8) mit den Functionen $E_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u)$ bekannt sein. Diese sind definirt durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial E_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} - \frac{\partial E_\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}\, E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(u)\, E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(u). \tag{16}$$

Die vollständigen Integrabilitätsbedingungen dieses Systems werden wir offenbar erhalten, wenn wir dasselbe nach $u_{\mathfrak{b}_2}$ differentiiren, dann $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ cyklisch vertauschen und die so erhaltenen Gleichungen zu einander addiren. Wir erhalten so:

$$\begin{aligned}
(24)\quad 0 = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} \Big\{ & E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(u) \left(\frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_2}} - \frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_2}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} \right) \\
& + E_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_1}(u) \left(\frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_2}(u)}{\partial u_\mathfrak{b}} - \frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_2}} \right) \\
& + E_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_2}(u) \left(\frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} - \frac{\partial E_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \right) \Big\} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{e}\mathfrak{f}}^\mathfrak{d} \left\{ E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(u) E_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}_1}(u) E_\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}_2}(u) + E_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_1}(u) E_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}_2}(u) E_\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}}(u) + E_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}_2}(u) E_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}}(u) E_\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}_1}(u) \right\}$$

$$= \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} E_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(u) E_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}_1}(u) E_\mathfrak{f}^{\mathfrak{b}_2}(u) \left\{ c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^\mathfrak{d} + c_{\mathfrak{f},\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}}^\mathfrak{d} + c_{\mathfrak{e},\mathfrak{d}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{f},\mathfrak{c}}^\mathfrak{d} \right\}$$

So ergeben sich schliesslich als die vollständigen Integrabilitätsbedingungen des Systems (16):

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left(c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^\mathfrak{d} + c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^\mathfrak{d} + c_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}^\mathfrak{a}\, c_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}}^\mathfrak{d} \right) = 0. \tag{25}$$

*) Vergl. S. 277 dieser Abhandlung.

Setzen wir in der That:

$$(26)\qquad E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} u_{\mathfrak{b}_1} u_{\mathfrak{b}_2} \cdots u_{\mathfrak{b}_m},$$

$$\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_m = 1, 2, \ldots, r\}$$

so besagen diese Bedingungen, dass die Ausdrücke, welche die Differentialgleichungen (16) für die Differenzen:

$$E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m} - E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m}$$

durch die Coefficienten der Glieder niederer Ordnung liefern, nicht im Widerspruche mit einander stehen. Betrachten wir nun die $m+1$ Coefficienten:

$$E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m},\ E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_m},\ \ldots,\ E^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_m,\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\cdots\mathfrak{b}_{m-1}},$$

so können wir hiernach die m letzten durch den ersten ausdrücken; da aber, falls die Gleichungen:

$$(22)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) u_{\mathfrak{b}} = u_{\mathfrak{a}}$$

bestehen sollen, die Summe dieser $m+1$ Coefficienten verschwinden muss, und jeder Coefficient nur in einer dieser Summen auftritt, so sehen wir, dass wirklich die Functionen $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ durch die Gleichungen (16), (22) und die Anfangsbedingungen (9) vollständig und gerade bestimmt sind.

Zur wirklichen Bestimmung differentiiren wir die Gleichungen (22) und erhalten:

$$(27)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}_1}} u_{\mathfrak{b}} + E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1},$$

also nach (16) und (22):

$$(28)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} u_{\mathfrak{b}} + E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u) + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} E_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}_1}(u) u_{\mathfrak{c}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1},$$

Bezeichnen wir daher den Complex der Glieder m^{ter} Dimension von $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ mit $\frac{1}{(m+1)!} U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ und bedenken, dass:

$$(29)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \frac{\partial U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial u_{\mathfrak{c}}} u_{\mathfrak{c}} = m\, U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

so finden wir:

(30) $$U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(1)} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}} u_{\mathfrak{c}},$$

und:

(31) $$U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(1)} U_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}^{(m-1)},$$

also:

(32) $$U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)} = \sum_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\cdots,\mathfrak{b}_{m-1}=1}^{r} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}_1}^{(1)} U_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}^{(1)} \cdots U_{\mathfrak{b}_{m-1},\mathfrak{b}}^{(1)}.$$

Nehmen wir daher an, dass die absoluten Beträge der $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}$ unterhalb g liegen, so ist:

$$|U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(1)}| < u \cdot g,$$

wo:

$$u = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_r|,$$

also:

$$|U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)}| < \frac{1}{r}(ugr)^m.$$

So finden wir, dass die Functionen $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ beständig convergente Potenzreihen der $u_{\mathfrak{b}}$ sind, da ihre Glieder wachsen wie die der Function:

$$\frac{e^x - 1}{x}.$$

Bedenken wir nun, dass:

(33) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}^{(l)} U_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}^{(m)} = U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(l+m)},$$

so findet man aus:

(8) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\, \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

dass:

(34) $$\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)},$$

wo:

(35) $$U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(0)} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

zu setzen ist, und es sind hierbei die λ_m die Coefficienten der Entwickelung von:

$$\frac{x}{e^x - 1}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\frac{x}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + \frac{ix}{2}\cot\left(\frac{ix}{2}\right)$$
$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_3}{4!}x^4 + \frac{B_5}{6!}x^6 \mp \cdots,$$

wo $B_1, B_3, B_5, \ldots$ die Bernouilli'schen Zahlen sind; es ist daher:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -\tfrac{1}{2}, \quad \lambda_{2q} = (-1)^{q+1} \frac{B_{2q-1}}{(2q)!}, \quad \lambda_{2q+1} = 0.$$

Wir erhalten daher das folgende Resultat:

Satz 2. *Sobald die Grössen $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die Bedingungen $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = -c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ und:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left(c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} + c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}\right) = 0 \tag{25}$$

erfüllen, sind die Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe von obiger Zusammensetzung in ihrer kanonischen Form gegeben durch die Reihen:

$$\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \tag{34}$$

wo:

$$U^{(0)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \quad U^{(1)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} u_{\mathfrak{c}},$$

$$U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2,\ldots,\mathfrak{c}_{m-1}=1}^{r} U^{(1)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}_1} U^{(1)}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} \cdots U^{(1)}_{\mathfrak{c}_{m-2},\mathfrak{c}_{m-1}} U^{(1)}_{\mathfrak{c}_{m-1},\mathfrak{b}},$$

ferner:

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_{2q} = (-1)^{q+1} \frac{B_{2q-1}}{(2q)!} \quad \text{und} \quad \lambda_{2q+1} = 0.$$

Gleichzeitig genügen die $\omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ den Gleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(u)\, \omega^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \tag{8}$$

wo die:

$$E^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} U^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \tag{36}$$

also beständig convergente Potenzreihen sind. Die Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe in ihrer kanonischen Form sind demnach eindeutige Functionen.

§ 3.

Ueber die der Parametergruppe reciproke Gruppe.

Unter der der Parametergruppe reciproken Gruppe verstehen wir die Gruppe:

$$v'_{\mathfrak{a}} = \varphi_{\mathfrak{a}}(u; v). \tag{37}$$

Für die Componenten ihrer infinitesimalen Transformationen:

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v) = \frac{\partial \varphi_{\mathfrak{a}}(0; v)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} \tag{38}$$

ergeben sich aus dem Systeme (3), wenn wir dasselbe nach $u_{\mathfrak{b}_1}$ differentiiren und dann $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$ setzen, die folgenden Differentialgleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left\{ \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v) - \frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) \right\} = 0. \tag{39}$$

Um nun die Untersuchungen über die Componenten der infinitesimalen Transformationen unabhängig zu machen von der Bestimmung der Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$, welche im Allgemeinen nicht eindeutig sind, denken wir uns die $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ durch diese Gleichungen und die Festsetzung, dass $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, definirt. Wollen wir den Zusammenhang dieser dadurch vollständig bestimmten Functionen mit den $\varphi_{\mathfrak{a}}(u; v)$ betonen, so führt diese Definition auf Grund der Gleichungen, aus welchen die Gleichungen (39) durch Nullsetzen der $u_{\mathfrak{c}}$ entstanden sind, wieder auf die in den Formeln (38) liegende Definition der $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ als Componenten der infinitesimalen Transformationen der Gruppe (37).

Um die Gleichungen (39) zur Bestimmung der $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ zu benutzen, multipliciren wir dieselben mit $E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(v)\, E_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{e}}(v)$ und summiren über $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Wir erhalten so auf Grund der Gleichungen (7):

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\; 1}^{r} E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(v) \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v) E_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{e}}(v) - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{r} E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(x) \frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{e}}} = 0; \tag{40}$$

wegen der durch Differentiation von (8) entstehenden Gleichungen

$$\sum_{\mathfrak{a}=1}^{r} \left(E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(v) \frac{\partial \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v) \right) = 0 \tag{41}$$

ergiebt sich hieraus:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left(\frac{\partial E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{c}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v) + E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}}(v) \frac{\partial \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{e}}} \right) = 0. \tag{42}$$

Hieraus wiederum folgt auf Grund des Systems (16), wenn wir noch $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{a}$ bezeichnen:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \left(\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{e}}} \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) + E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(v) \frac{\partial \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{e}}} \right) \\ &\qquad + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{d},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}} E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{e}}(v) E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{c}}(v) \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Führen wir daher die Bezeichnung ein:

(44) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(v)\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) = e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v),$$

so ergeben sich für die Functionen $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ die folgenden Differentialgleichungen:

(45) $$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{e}}(v) = \frac{\partial e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{e}}}.$$

Da nun mit Hülfe der Gleichungen (44) die $\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v)$ umgekehrt durch die $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ ausgedrückt werden können, es ist nämlich:

(46) $$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(v)\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v),$$

so können wir die Bestimmung der $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ auf die der $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ zurückführen; diese Functionen sind ihrerseits durch die Differentialgleichungen (45) vollständig bestimmt, wenn noch festgesetzt wird, dass $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$. Zuvor aber wolle man sich davon überzeugen, dass die Integrabilitätsbedingungen des Systems (45) erfüllt sind. Es ist nämlich:

(47) $$\frac{\partial^2 e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)}{\partial v_{\mathfrak{b}_1} \partial v_{\mathfrak{b}_2}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) \frac{\partial E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v)}{\partial v_{\mathfrak{b}_2}} + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{c}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(v) E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_2}(v) E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v).$$

Es ergeben sich demnach auf Grund von (16) als die gesuchten Integrabilitätsbedingungen:

(48) $$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(v) E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}_1}(v) E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_2}(v)$$
$$+ \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} (c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{c}} + c_{\mathfrak{c},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}})\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(v) E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_2}(v) E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v) = 0,$$

oder:

(49) $$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(v) E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_2}(v) E_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(v) \left\{ c_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{c}} + c_{\mathfrak{c},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}} + c_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}}^{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{f},\mathfrak{d}}^{\mathfrak{c}} \right\} = 0,$$

welche Gleichungen wegen (25) sicher erfüllt sind.

Zur wirklichen Bestimmung der Functionen $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ multipliciren wir die Gleichungen (45) mit $v_{\mathfrak{e}}$ und summiren über $\mathfrak{e}$. Wir erhalten dann:

(50) $$\sum_{\mathfrak{e}=1}^{r} \frac{\partial e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{e}}} u_{\mathfrak{e}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}^{(1)}\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u).$$

Bezeichnen wir daher den Complex des Gliedes m^{ter} Dimension in der Entwickelung von $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ mit $e_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)}(u)$, so folgt hieraus:

(51) $$m\, e_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)}(u) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}^{(1)}\, e_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}^{(m-1)}(u);$$

es ist daher $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ die beständig convergente Potenzreihe:

(52) $$e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\, U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)}.$$

In der That sind die Gleichungen (45), wenn man sie mit $x_{\mathfrak{b}}$ multiplicirt und über $\mathfrak{b}$ von 1 bis r summirt, nichts anderes als die grundlegenden Differentialgleichungen (6) für die sogenannte adjungirte Gruppe; doch konnte von dieser Gruppe hier nicht ausgegangen werden, weil sie im Allgemeinen nicht r-gliedrig ist.

Da nun auf Grund von (33):

(53) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(-u)\, e_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

und ebenso:

(54) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(-u)\, E_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) = E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(-u),$$

so folgt aus (44):

(55) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(-u)\, \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

also in Rücksicht auf (8):

(56) $$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(-u).$$

Wir hätten dies Resultat auch auf kürzerem Wege erhalten können, doch war es uns wesentlich auch um die Differentialgleichungen (14) zu thun. Da hiernach:

(57) $$\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) - \omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u) = U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(1)},$$

so ergiebt sich hieraus ein bemerkenswerther Zusammenhang zwischen den Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}}(u;\, v)$ in ihrer kanonischen Form und der adjungirten Gruppe. Es ist nämlich:

(58) $$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\, x_{\mathfrak{c}} = \varphi_{\mathfrak{a}}\big(u;\, \varphi(x;\, -u)\big),\ ^{*)}$$

wie man sofort durch Differentiation nach $u^{\mathfrak{b}}$ und die nachherige Substitution $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$ erkennt.

*) Vergl. damit die bekannte Auffassung der adjungirten Gruppe als derjenigen, welche die Transformationen der gegebenen Gruppe unter einander vertauscht.

Aus (56) ergiebt sich, dass nun auch:

$$(59)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r}\left(\frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(u)-\frac{\partial \eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(u)}{\partial u_{\mathfrak{c}}}\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\right)=\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{c}}\,\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u).$$

Die Anwendungen dieser Gleichungen auf die erste Definition der $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ durch die Gleichungen (44) wird uns eine für die Folge wichtige Relation für die $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ ergeben. Differentiiren wir nämlich das System (44) nach $u_{\mathfrak{d}}$, multipliciren mit $\eta_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)$ und summiren über $\mathfrak{b}$, so folgt wegen (45):

$$(60)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r}\left(\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,\eta_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)+E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\,\frac{\partial \eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)}{\partial u_{\mathfrak{d}}}\,\eta_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\right)$$

$$=\sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\,e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\,E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(u)\,\eta_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)=\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\,e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\,e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(u).$$

Vertauschen wir hierin $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ und ziehen das Resultat dieser Vertauschung von (60) ab, so ergiebt sich wegen (16) und (59):

$$(61)\qquad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r}\left(\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)\,\eta_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(u)\,c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\,E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}}(u)\,E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(u)+E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{d}}\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{d}}(u)\right)$$

$$=2\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\,e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\,e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(u).$$

Hieraus endlich folgt wegen (44):

$$(62)\qquad \sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{d}}\,e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{d}}(u)=\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\,e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(u)\,e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(u).$$

Als Resultat dieses Paragraphen wollen wir nur dies hervorheben:

Satz 3. *Die Componenten $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(v)$ der infinitesimalen Transformationen der zur Parametergruppe $u_{\mathfrak{a}}'=\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ reciproken Gruppe $v_{\mathfrak{a}}'=\varphi_{\mathfrak{a}}(u;v)$ in ihrer kanonischen Form sind gegeben durch die Gleichungen:*

$$(44)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(u)\,\eta_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(u)=e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u),$$

wo:

$$(52)\qquad e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\,U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)},$$

woraus folgt, dass $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)=\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(-u)$.

§ 4.

Bestimmung der Componenten der infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung.

Die Bestimmung aller transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung kommt darauf hinaus, das System von Differentialgleichungen:

$$(63)\quad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)-\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\}=\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{c}}\,\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x),\text{*)}$$

wo $n \leqq r$ unter der Bedingung zu integriren, dass nicht alle Determinanten $n$ter Ordnung der Matrix:

$$\left\| \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x) \right\| \quad \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}=1,2,\ldots,n \\ \mathfrak{b}=1,2,\ldots,r \end{Bmatrix}$$

identisch verschwinden. Wir wollen annehmen, dass für

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

etwa die Determinante:

$$\left| \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) \right| \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{b}=1,2,\ldots,n)$$

von Null verschieden sei. Man kann dann immer solche neue Parameter in die Functionen $f_{\mathfrak{a}}(x;u)$ einführen, dass:

$$(64)\qquad \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Führen wir nämlich die neuen Parameter ein auf Grund der Gleichungen:

$$(65)\qquad u_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}\, s_{\mathfrak{b}},$$

wo die Determinante $|a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}|$ von Null verschieden ist, so gehen die $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ über in:

$$(66)\qquad \left(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x;u)}{\partial s_{\mathfrak{b}}}\right)_{s=0} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}};$$

setzen wir daher $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(0) = b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$, so ergeben sich für die $a_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}$ die Bedingungen:

$$(67)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} b_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}} a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a}=1,2,\ldots,n \\ \mathfrak{b}=1,2,\ldots,r \end{pmatrix}.$$

---

*) Um für später das häufige Minuszeichen unter dem Functionszeichen zu vermeiden, gehen wir statt von den Gleichungen (12) von denjenigen aus, welche durch Vertauschung des Vorzeichens der $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}$ entstehen; wir wählen also als Parametergruppe die reciproke Gruppe.

Fügen wir diesen $r(r-n)$ weitere Gleichungen hinzu, indem wir für $\mathfrak{a} > n$ $b_\mathfrak{a}^\mathfrak{c} = \delta_\mathfrak{a}^\mathfrak{c}$ setzen, so sind dadurch die $a_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ eindeutig in der erforderlichen Weise bestimmt. Wir können daher die Parameter immer so gewählt denken, dass die Gleichungen (64) erfüllt sind.

Nunmehr folgt aus den Differentialgleichungen (63), *dass:*

$$c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}} = 0, \tag{68}$$

sobald $\mathfrak{a} \leq n$ *und* $\mathfrak{b}$ *zugleich mit* $\mathfrak{b}_1 > n$ *ist; dies besagt, dass unsere Gruppe eine* $(r-n)$*-gliedrige Untergruppe enthalten muss, welche entsteht, wenn man* $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ *setzt.*

Nehmen wir nun an, wir hätten ein solches Lösungssystem gefunden, so können wir hieraus sofort dadurch neue ableiten, dass wir in unsere Gruppe neue Variable einführen vermittelst der Gleichungen:

$$z_\mathfrak{a} = h_\mathfrak{a}(x), \quad x_\mathfrak{a} = H_\mathfrak{a}(z), \tag{69}$$

wo:

$$h_\mathfrak{a}(0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial h_\mathfrak{a}(0)}{\partial x_\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}. \tag{70}$$

Da dann nämlich unsere Gruppe die Form annimmt:

$$z_\mathfrak{a}' = h_\mathfrak{a}\Big(f\big(H(z);\, u\big)\Big), \tag{71}$$

so sind die Componenten der infinitesimalen Transformationen derselben:

$$\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}}\, \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x), \tag{72}$$

wo $x_\mathfrak{a} = H_\mathfrak{a}(z)$ zu setzen ist. Hieraus folgt:

$$\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{n}=1}^{n} \frac{\partial \zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)}{\partial z_\mathfrak{b}} \frac{\partial z_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{e}}\, \xi_\mathfrak{e}^\mathfrak{b}(x) = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{e}=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c} \partial x_\mathfrak{e}}\, \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x) + \frac{\partial h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}} \frac{\partial \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x)}{\partial x_\mathfrak{e}} \right) \xi_\mathfrak{e}^{\mathfrak{b}_1}(x), \tag{73}$$

oder:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \frac{\partial \zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)}{\partial z_\mathfrak{b}}\, \zeta_\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}_1}(z) = {} & \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{n} \frac{\partial^2 h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c} \partial x_\mathfrak{b}}\, \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x)\, \xi_\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}_1}(x) \\ & + \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{n} \frac{\partial h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}} \frac{\partial \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x)}{\partial x_\mathfrak{b}}\, \xi_\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}_1}(x). \end{aligned} \tag{74}$$

Daraus erkennen wir auch direct, dass die durch die Gleichungen (72), (69) und (70) definirten Functionen $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ die Gleichungen (63) und (64) erfüllen, falls dasselbe von den $\xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}$ bekannt ist.

Wir können aber auch umgekehrt sehen, dass *jedes Lösungssystem von* (63), *welches die Anfangsbedingungen* (64) *befriedigt, auf obige Weise aus einem derselben abgeleitet werden kann.* Zunächst kann man leicht sehen, dass von den nr Differentialgleichungen für die n Func-

tionen $h_\mathfrak{a}(x)$ diejenigen für $\mathfrak{b} > n$ aus den übrigen folgen. Wären nämlich die Gleichungen (72) für $\mathfrak{b} \leqq n$ erfüllt, so setzen wir für $\mathfrak{b} > n$:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}} \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x) = \bar{\xi}_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z). \tag{75}$$

Alsdann bilden nach dem Obigen die Functionen $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ für $\mathfrak{b} \leqq n$ mit diesen $\bar{\zeta}_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ zusammen ein Lösungssystem von (63), welches auch die Anfangsbedingungen (64) erfüllt. Nun sind aber von den ein Lösungssystem von (63) mit den Anfangsbedingungen (64) bildenden Functionen $\xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ diejenigen für $\mathfrak{b} > n$ durch diejenigen für $\mathfrak{b} \leqq n$ vollständig bestimmt, und zwar drücken sich die Coefficienten ihrer Glieder m^{ter} Dimension durch die Coefficienten der Glieder niederer Dimension in der Entwickelung der $\xi_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ für $\mathfrak{b} \leqq n$ rational und ganz aus. Demnach müssen die $\bar{\zeta}_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ nothwendig mit $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ für $\mathfrak{b} > n$ identisch sein, oder die Gleichungen (72) für $\mathfrak{b} > n$ sind eine Folge derjenigen für $\mathfrak{b} \leqq n$. Im Besonderen sieht man, dass, falls die Coefficienten der Glieder bis zur m^{ten} Dimension inclusive in der Entwicklung der $h_\mathfrak{a}(x)$ so bestimmt wären, dass in:

$$\tau_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x) = \zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z) - \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_\mathfrak{a}(x)}{\partial x_\mathfrak{c}} \xi_\mathfrak{c}^\mathfrak{b}(x) \tag{76}$$

für $\mathfrak{b} \leqq n$ die Glieder bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Dimension inclusive fortfallen, dasselbe auch für $\mathfrak{b} > n$ gilt. Denn diejenigen $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$, welche wir erhalten, wenn wir die $h_\mathfrak{a}(x)$ mit den Gliedern m^{ter} Dimension abbrechen, stimmen mit den für beliebig fortgesetzte $h_\mathfrak{a}(x)$ erhaltenen $\zeta_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(z)$ in den Gliedern bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Dimension inclusive überein, weil auch die Coefficienten der Glieder bis zur m^{ten} Dimension in der Entwickelung von $x_\mathfrak{a} = H_\mathfrak{a}(z)$ sich rational und ganz durch diejenigen von $h_\mathfrak{a}(x)$ bis zu derselben Ordnung ausdrücken lassen.

Nun beweist man leicht, dass sich die Coefficienten der Glieder $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung in den $h_\mathfrak{a}(x)$ widerspruchslos so bestimmen lassen, dass in den $\tau_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)$ auch die Glieder m^{ter} Ordnung fortfallen. Die Bedingungen hierfür sind nämlich, dass in:

$$\sum_{\mathfrak{d}=1}^{r} \left(\frac{\partial \tau_\mathfrak{a}^\mathfrak{b}(x)}{\partial x_\mathfrak{d}} \xi_\mathfrak{d}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \tau_\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_\mathfrak{d}} \xi_\mathfrak{d}^\mathfrak{b}(x) \right) \tag{77}$$

die Glieder $(m-1)^{\text{ter}}$ Dimension fortfallen; denn daraus würde folgen, dass man z. B. für den Coefficienten von $x_\mathfrak{b} x_{\mathfrak{b}_1} \ldots x_{\mathfrak{b}_m}$ in der Entwickelung von $h_\mathfrak{a}(x)$ aus (72) denselben Werth erhält wie aus der-

selben Gleichung, wenn man darin $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ vertauscht. Auf Grund unserer Voraussetzungen geht aber (77) über in:

$$(78)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}\,\tau^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(x) - \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n}\left(\frac{\partial \zeta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(z)}{\partial z_{\mathfrak{b}}}\,\tau^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{b}}(x) - \frac{\partial \zeta^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{a}}(z)}{\partial z_{\mathfrak{b}}}\,\tau^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}}(x)\right).$$

Fallen also in den $\tau^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ für $\mathfrak{b} \leqq n$ und in Folge dessen auch für $\mathfrak{b} > n$ alle Glieder bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Dimension inclusive fort, so gilt dasselbe für den Ausdruck (77), d. h. die Gleichungen, welche ausdrücken, dass auch die Glieder m^{ter} Dimension in $\tau^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ für $\mathfrak{b} \leqq n$ fortfallen, stehen mit einander nicht im Widerspruch und können zur eindeutigen Bestimmung der Glieder $(m+1)^{\text{ter}}$ Dimension der $h_{\mathfrak{a}}(x)$ benutzt werden. Hieraus geht hervor, dass man zunächst rein formal n Potenzreihen $h_{\mathfrak{a}}(x)$ bestimmen kann, welche alle Gleichungen (72) befriedigen.

Die wirkliche Bestimmung derselben und der Nachweis ihrer Convergenz kann dann auf die Integration eines simultanen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden. Versteht man unter $F^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ durch die Gleichungen:

$$(79)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \xi^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(x)\,F^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(x) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} F^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(x)\,\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(x) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, n)$$

definirte ebenfalls in der Nähe des Nullpunktes convergente Potenzreihen, so sind diese Differentialgleichungen:

$$(80)\qquad \frac{dh_{\mathfrak{a}}(at)}{dt} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=1}^{n} \zeta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}\big(h(at)\big)\,F^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}}(at)\,a_{\mathfrak{c}}.$$

Nehmen wir z. B. an, die $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ seien die Functionen $\eta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(u)$ in ihrer kanonischen Form, also $n = r$, und die $\zeta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(z)$ irgend ein anderes Lösungssystem der Gleichungen (59), welche den Anfangsbedingungen $\zeta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(0) = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ genügen, so gehen diese Gleichungen über in:

$$(81)\qquad \frac{dh_{\mathfrak{a}}(at)}{dt} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \zeta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}\big(h(at)\big)\,a_{\mathfrak{b}},$$

welche von den Componenten der infinitesimalen Transformationen der Parametergruppe in ihrer kanonischen Form ganz unabhängig sind. Wir sehen hieraus, *dass man die Parametergruppe durch Einführung neuer Parameter immer auf die kanonische Form bringen kann.*

Aber auch für irgend eine transitive Gruppe giebt es eine solche canonische Form, durch deren Nachweis nach dem eben Bewiesenen das Problem der Integration des Systems (63) für transitive Gruppen

vollständig gelöst sein wird. *Die betreffenden Functionen* $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ *sind definirt durch die Gleichungen:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) = e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x0), \tag{82}$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, n)$$

wo zur Abkürzung funct. $(x0)$ für funct. $(x_1 x_2 \ldots x_n 0 \ldots 0)$ gesetzt ist. Wir beweisen zuerst, dass diese Functionen das System (63) befriedigen.*)

Durch Differentiation nach $x_{\mathfrak{d}}$, Multiplication mit $\xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x)$ und Summation nach $\mathfrak{d}$ folgt wegen (45):

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{n} \left(\frac{\partial E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)}{\partial x_{\mathfrak{d}}}\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x) + E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0) \frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{d}}} \right) \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x) \tag{83}$$
$$= \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x).$$

Durch Vertauschung von $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ und Subtraction folgt hieraus wegen (16):

$$\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x)\, c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{c}}(x0)\, E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(x0) \tag{84}$$
$$+ \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{n} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0) \left\{ \frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{d}}}\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{d}}}\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(x) \right\}$$
$$= \sum_{\mathfrak{d}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(x0) \left\{ e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}_1}(x0)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(x) \right\}.$$

Die erste Summe der linken Seite können wir auf Grund von (82) und (68), weil hier $\mathfrak{a}$ immer $\leqq n$ ist, folgendermassen zerlegen:

$$\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{n} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0) + \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{f}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{d}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}_1}(x)$$
$$+ \sum_{\mathfrak{d},\mathfrak{f}=1}^{n} \sum_{\mathfrak{e}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0)\, E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{d}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}(x);$$

*) Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass dieser Beweis unabhängig davon ist, dass die $\omega_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, $E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$, $\eta_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ und $e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(u)$ in ihrer kanonischen Form gegeben sind. Denkt man sich dann die letzten Functionen durch die Gleichungen (44) mit Hülfe der infinitesimalen Transformationen zweier reciproker einfach transitiver Gruppen definirt, so haben wir genau das Problem, welches sich Herr Lie im 22. Cap. des ersten Abschnittes seines Werkes gestellt hat. Die Gleichungen (82) lehren daher, dass dies Problem ohne jede Integration erledigt werden kann.

ebenso zerlegt sich die Summe auf der rechten Seite in:

$$2\sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{n} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0) + \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{e}=1}^{n}\sum_{\mathfrak{f}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, E_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}_1}(x)$$
$$+\sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}=1}^{n}\sum_{\mathfrak{e}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0)\, E_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x)$$
$$+\sum_{\mathfrak{e}=n+1}^{r}\sum_{\mathfrak{f}=1}^{n} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0)$$
$$+\sum_{\mathfrak{f}=n+1}^{r}\sum_{n=1}^{n} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0).$$

Somit gehen die Gleichungen (84) über in:

$$(85)\quad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{n} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\} = \sum_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}=1}^{r} c_{\mathfrak{e},\mathfrak{f}}^{\mathfrak{a}}\, e_{\mathfrak{e}}^{\mathfrak{b}}(x0)\, e_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{b}_1}(x0),$$

also wegen (62) und weil $\mathfrak{a} \leqq n$ ist:

$$(86)\quad \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}=1}^{n} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)\left\{\frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}_1}(x) - \frac{\partial \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}_1}(x)}{\partial x_{\mathfrak{b}}}\,\xi_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}}(x)\right\} = \sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{b}}\, e_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x0)$$
$$= \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n}\sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)\, c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{b}}\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x).$$

Da nun die Determinante $|E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)|$ nicht identisch verschwindet, so ergiebt sich in der That, dass die durch die Gleichungen (82) als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen definirten Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ ein Lösungssystem der Differentialgleichungen (63) bilden.

Dass diese $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ die Anfangsbedingungen (64) erfüllen, ist evident. Man sieht aber auch, dass sie die kanonische Form haben, d. h. dass:

$$(87)\qquad \sum_{\mathfrak{b}=1}^{n} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)\, x_{\mathfrak{b}} = x_{\mathfrak{a}}.$$

Denn aus (82) folgt:

$$(88)\qquad \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}=1}^{n} E_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x0)\, \xi_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}(x)\, x_{\mathfrak{b}} = x_{\mathfrak{a}},$$

also die Gleichungen (87). Das simultane System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches irgend ein Lösungssystem von (63) mit den Anfangsbedingungen (64) in diese kanonische Form überzuführen erlaubt, kann demnach die vereinfachte Form (81) erhalten, wo nun allerdings die Summation nur bis n auszudehnen ist.

Nicht ohne Interesse ist die Bemerkung, dass, falls die endlichen Transformationen der Parametergruppe in ihrer kanonischen Form vorliegen, die endlichen Transformationen der zu den $\xi_a^b(x)$ gehörigen Gruppe ohne Integration durch blosse Elimination gefunden werden können. Die betreffenden Gleichungen sind:

$$(89)\qquad \varphi_a\big(-x_1', \cdots, -x_n', 0 \cdots 0;\ \varphi(u_1 \cdots u_r;\ x_1 \cdots x_n\ 0 \cdots 0)\big) = 0. \qquad (a = 1, 2, \cdots, n)$$

In der That ergiebt sich hieraus durch Differentiation nach u_b:

$$(90)\qquad \sum_{c=1}^{n} \frac{\partial \varphi_a\big(-x'0;\ \varphi(u;x0)\big)}{\partial x_c'} \frac{\partial x_c'}{\partial u_b} = \sum_{b=1}^{r} \frac{\partial \varphi_a\big(-x'0;\ \varphi(u;x0)\big)}{\partial \varphi_b(u;x0)} \frac{\partial \varphi_b(u;x0)}{\partial u_b}.$$

Für $u_1 = u_2 = \cdots = u_r = 0$ geht dies über in:

$$(91)\qquad \sum_{c=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_a(x'0;x0)}{\partial x_c'}\right)_{x'=-x} \xi_c^b(x) = \sum_{b=1}^{r} \left(\frac{\partial \varphi_a(x'0;x0)}{\partial x_b}\right)_{x'=-x} \eta_b^b(x0).$$

Nun folgt aus dem Systeme (3):

$$(92)\qquad \sum_{c=1}^{r} \left(\frac{\partial \varphi_a(u;v)}{\partial v_c}\right)_{u=-v} \omega_c^b(v) = \delta_{a,b},$$

weil $\varphi_a(u;\ -u) = 0$; ebenso folgt aus dem Systeme:

$$(93)\qquad \eta_a^b\big(\varphi(u;v)\big) = \sum_{c=1}^{r} \frac{\partial \varphi_a(u;v)}{\partial u_c} \eta_c^b(u),$$

dass:

$$(94)\qquad \sum_{c=1}^{r} \left(\frac{\partial \varphi_a(u;v)}{\partial u_c}\right)_{u=-v} \omega_c^b(v) = \delta_{a,b}.$$

Es ist demnach:

$$(95)\qquad \sum_{c=1}^{n} E_a^c(x0)\, \xi_c^b(x) = \sum_{b=1}^{r} E_a^b(x0)\ \eta_b^b(x0) = e_a^b(x0),$$

wie zu beweisen war. Uebrigens lässt sich auch direct nachweisen, dass durch die Gleichungen (89) eine Gruppe dargestellt ist, falls für $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$ eine in der Parametergruppe enthaltene $(r - n)$-gliedrige Untergruppe resultirt.*)

*) Vergl. meine o. a. Schrift aus den Ber. d. Sächs. Ges. d. W., wobei ich bemerke, dass für den dortigen Beweis die Annahme unwesentlich ist, dass diese Untergruppe keine invariante Untergruppe enthalte; diese Annahme kommt, wie das Folgende lehrt, erst bei der Entscheidung über die Anzahl der wesentlichen Parameter in Betracht.

Nun haben wir aber noch die wichtige Frage zu entscheiden, ob und in welchen Fällen diese Functionen $\xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)$ wirklich die Componenten der infinitesimalen Transformationen einer r-gliedrigen oder nicht vielmehr einer $(r-p)$-gliedrigen Gruppe darstellen. In letzterem Falle müssten bekanntlich die Gleichungen:*)

$$\sum_{\mathfrak{b}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x)\, a_{\mathfrak{b}} = 0 \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \cdots, n) \tag{96}$$

für alle $x_{\mathfrak{c}}$ p von einander unabhängige Lösungen haben. Nun folgt zunächst aus den Anfangsbedingungen (64), dass $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ sein muss, p kann also höchstens gleich $r-n$, unsere Gruppe muss mindestens n-gliedrig sein; das folgt ja schon aus ihrer Transitivität. Die Bedingungen (96) verwandeln sich auf Grund von (82) und (52) in:

$$\sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)}\, a_{\mathfrak{b}} = 0, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \cdots, n) \tag{97}$$

wo:

$$X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(m)} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} X_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}}^{(1)}\, X_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}^{(m-1)}, \tag{98}$$

und:

$$X_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}^{(1)} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}\, x_{\mathfrak{c}}. \tag{99}$$

Wir erhalten so aus (97) für $m = 1$:

$$\sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}\, a_{\mathfrak{b}} = 0. \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{c} = 1, 2, \cdots, n) \tag{100}$$

Wir wollen nun annehmen, dies System von n^2 homogenen linearen Gleichungen für die $a_{\mathfrak{b}}$ besitze gerade p und nicht mehr von einander unabhängige Lösungssysteme $c_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{d} = r-p+1, \cdots, r)$, sodass etwa die Determinante $|c_{\mathfrak{d}}^{\mathfrak{b}}|$ $(\mathfrak{b}, \mathfrak{d} = r-p+1, \cdots, r)$ von Null verschieden sei, wobei p, da es sich nur um $r-n$ Grössen handelt, höchstens $= r-n$ sein kann. Setzen wir nun:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} \xi_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{c}}(x)\, a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}} = \bar{\xi}_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}}(x), \qquad (\mathfrak{b} = 1, 2, \cdots, r) \tag{101}$$

wo die Determinante $|a_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{b}}|$ von Null verschieden, so bilden auch diese Functionen ein Lösungssystem von (63), wenn wir die $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}^{\mathfrak{a}}$ ersetzen durch:

*) S. meine o. a. Annalenarbeit S. 172.

$$(102)\qquad \bar{c}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{e}=1}^{r} c^{\mathfrak{e}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\, a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}\, a^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{d}}\, \alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}},$$

wo die $\alpha^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{e}}$ die durch die Determinante $|a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}|$ dividirten ersten Unterdeterminanten derselben. Wir setzen nun in unserem Falle $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}} = c^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}}$, sobald $\mathfrak{b} > n$ und zugleich $\mathfrak{b} > r - p$, und für die übrigen Indices $a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$; dann ist auch $\alpha^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}}$, sobald $\mathfrak{b} \leqq r - p$, und ebenso immer, wenn $\mathfrak{b} \leqq n$. Bei dieser Substitution bleiben nun sicher die Anfangsbedingungen (64) erfüllt, ebenso auch die Bedingungen (87), weil $\bar{\xi}^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x) = \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$, so lange als $\mathfrak{b} \leqq n$. Ferner folgt aus (102), was ja eigentlich selbstverständlich, dass $\bar{c}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = 0$, sobald $\mathfrak{a} \leqq n$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{b}_1$ zugleich $> n$; endlich aber folgt aus (100), dass diese Grössen auch verschwinden, wenn $\mathfrak{a} \leqq n$, $\mathfrak{b} \leqq n$ und $\mathfrak{b}_1 > r - p$, weil dann:

$$\bar{c}^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = \sum_{\mathfrak{d}=n+1}^{r} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{d}}\, c^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{d}}$$

wird. Wir können uns daher unter den obigen Voraussetzungen die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ mit Hülfe von Substitutionen der Form (102) auf eine solche Form gebracht denken, dass $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1}$ verschwindet, sobald $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \leqq n$, $\mathfrak{b}_1$ dagegen $> r - p$. Nunmehr sind die Gleichungen (100) sicher erfüllt, wenn $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{r-p} = 0$, während die übrigen p Grössen $a_{\mathfrak{b}}$ irgend welche Werthe haben. Da diese nun gerade p von einander unabhängige Werthsysteme annehmen können, so folgt hieraus, dass die Gleichungen (100) auch nur dann erfüllt sein können, wenn $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{r-p} = 0$. Nun gehen aber die Bedingungen (25) für die $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, wenn wir annehmen, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b} \leqq n$, $\mathfrak{b}_1 > n$ und $\mathfrak{b}_2 > r - p$ auf Grund unserer Voraussetzungen in die folgenden Gleichungen über:

$$(103)\qquad \sum_{\mathfrak{c}=n+1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2}\, c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} = 0.$$

Das sind aber Gleichungen von der Form (100), es ist daher $c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} = 0$, sobald $\mathfrak{c} \leqq r - p$, $\mathfrak{b}_2 > r - p$, während $\mathfrak{b}_1$ alle Werthe von 1 bis r haben hann; es besagt dies, dass man für $u_1 = u_2 = \cdots = u_{r-p} = 0$ *eine in unserer Gruppe invariante Untergruppe* erhält.

Es ist leicht zu sehen, dass nun wirklich alle Bedingungen (97) für $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{r-p} = 0$ erfüllt sind. Dann verschwinden nämlich die $X^{(1)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$, sobald $\mathfrak{a} \leqq r - p$ und $\mathfrak{b} > r - p$, dasselbe gilt daher auch von den $X^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ bei denselben Werthen der Indices. Die Gleichungen (82) lehren nun, die $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ für $\mathfrak{b} > r - p$ identisch verschwinden, sodass von selbst nur die Componenten der infinitesimalen

Transformationen einer $(r-p)$-gliedrigen Gruppe übrig bleiben. In der That sind jetzt die Gleichungen (25) auch erfüllt, sobald $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c} \leqq r - p$ sind.

Wir erhalten so schliesslich das folgende Resultat:

Satz 4: *Ist die sogenannte Zusammensetzung einer r-gliedrigen Transformationsgruppe, d. h. ein System von Constanten $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ gegeben, welche den Gleichungen:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} (\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{c}} + \gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} + \gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b}_2,\mathfrak{b}} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{c}}) = 0$$

und $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = -\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ *genügen, so findet man folgendermassen die Componenten der infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von dieser Zusammensetzung. Man bringe zuerst die Constanten* $\gamma^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ *auf jede mögliche Art mit Hülfe der Substitution:*

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} c^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} a^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}=1}^{r} \gamma^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}} a^{\mathfrak{b}_1}_{\mathfrak{d}},$$

wo die Determinante $|a^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}|$ *von Null verschieden sein muss, auf eine solche Form, dass* $c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{b}_1} = 0$, *sobald* $\mathfrak{a} \leqq n$ *und* $\mathfrak{b}$ *mit* $\mathfrak{b}_1$ *zugleich* $> n$, *wo* $n \leqq r$. *Bildet man dann die eindeutigen Functionen:*

$$E^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1!)} X^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

und

$$e^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}},$$

wo:

$$X^{(0)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \delta_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}, \quad X^{(1)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} c^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} x_{\mathfrak{c}}$$

und

$$X^{(m)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{r} X^{(1)}_{\mathfrak{a},\mathfrak{c}} X^{(m-1)}_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}},$$

so sind die durch die Gleichungen:

$$\sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} E^{\mathfrak{c}}_{\mathfrak{a}}(x)\, \xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{c}}(x) = e^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x) \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \cdots, n)$$

als Quotienten beständig convergenter Potenzreihen definirten Functionen $\xi^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{a}}(x)$ *die Componenten der infinitesimalen Transformationen einer transitiven Gruppe der gegebenen Zusammensetzung in ihrer kanonischen Form.*

Diese Gruppe ist $(r - p)$*-gliedrig, wenn es* p *von einander unabhängige Werthsysteme der* $a_\mathfrak{b}$ *giebt, welche die Gleichungen:*

$$\sum_{\mathfrak{b}=n+1}^{r} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}}^{\mathfrak{a}}\, a_\mathfrak{b} = 0 \qquad (\mathfrak{a}, \mathfrak{c} = 1, 2, \cdots, n)$$

erfüllen. Ist $x_\mathfrak{a} = H_\mathfrak{a}(z_1 \cdots z_n)$ *irgend eine Transformation, deren Umkehrung* $z_\mathfrak{a} = h_\mathfrak{a}(x)$ *ist, so sind in der Form:*

$$\xi_\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}(z) = \sum_{\mathfrak{c}=1}^{n} \frac{\partial h_\mathfrak{a}(H(z))}{\partial H_\mathfrak{c}(z)}\, \xi_\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}}\big(H(z)\big)$$

die Componenten der infinitesimalen Transformationen aller transitiven Gruppen von der gegebenen Zusammensetzung enthalten.

Die Aufstellung von Criterien über die etwaige Aehnlichkeit der so erhaltenen Gruppen unter einander in algebraischer Form erfordert Untersuchungen, für welche bis jetzt noch wenig geschehen ist. In transcendenter Form sind diese Kriterien a. a. O. von Herrn Lie gegeben worden, was sich auch aus meiner Darstellungsweise mit Hülfe der Functionen $e_\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}(u)$ erreichen lässt.

Dorpat, im November 1890.

Einige Hauptsätze aus der Lehre von den Curven dritter Ordnung.

Von

Ernst Kötter in Berlin.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich, auf einer eigenthümlichen Weiterbildung der trilinearen Zuordnungsweise fussend, rein geometrische Beweise für die unendlich vielfache projectivische Erzeugbarkeit der algebraischen ebenen Curven gegeben. Diese Entwickelung lässt sich für die Curven dritter Ordnung zu bemerkenswerther Einfachheit abkürzen; angesichts der zahlreichen, auch neueren Publicationen**) über diesen Gegenstand scheint es mir wohl am Platze zu sein, einige Worte auf diesen Beweis zu verwenden.

I.

Die unendlich vielfache Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch projectivische Gebilde.

Den Ausgangspunkt bildet folgender Satz:

Ein Kegelschnittbüschel $K_1\, K_2\, K_3 \ldots$ mit den vier Grundpunkten A, B, C, D schneide auf einem beliebigen von A ausgehenden Strahle $a^{(\lambda)}$

---

*) „Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven", Abhandlungen der Berliner Akademie, vom Jahre 1887.

**) Während Herr Schröter in seiner neuesten Publication {„Die ebenen Curven dritter Ordnung" etc. Leipzig, Teubner, 1888} die Definition als Tripelcurve zu Grunde legt, giebt Herr Küpper einen ganz neuen, nicht eben einfachen Beweis des Fundamentaltheorems, der auf eigenartiger Benutzung einer quadratisch-involutorischen Verwandtschaft beruht. Vergl.: „Einleitung in die projectivische Geometrie der Ebene, nach Vorträgen des Herrn C. Küpper herausgegeben von K. Bobek". Leipzig, Teubner 1889. Die eigentliche trilineare Verwandtschaft benutzt Herr Castelnuovo zum Beweise des Theorems. Vorzugsweise wird noch der Hülfssatz gebraucht und bewiesen, dass zwei Kegelschnittbüschel eine Curve dritter Ordnung erzeugen, wenn sie zwei Grundpunkte gemein haben, und die Geradenpaare einander entsprechen, in denen die Verbindungslinie derselben vorkommt. Vergl. den Aufsatz „Studio sulla omografia del seconda spezie" Ven. Jst. Atti (6) V. § 3.

die Punktreihe $E_1^{(\lambda)}E_2^{(\lambda)}E_3^{(\lambda)}\ldots$, *auf einem beliebigen durch* B, C, D *gelegten Kegelschnitte* $\mathfrak{K}$ *die Punktreihe* $P_1\ P_2\ P_3\ldots$ *aus. Alsdann treffen sich die Geraden* $E_1^{(\lambda)}P_1,\ E_2^{(\lambda)}P_2,\ E_3^{(\lambda)}P_3,\ldots$ *in einem Punkte* $R^{(\lambda)}$ *von* $\mathfrak{K}$. $a^{(\lambda)}$ und $R^{(\lambda)}$ *beschreiben projectivische Gebilde:*

$$a'\,a''\,a'''\ldots\,\overline{\wedge}\,R'\,R''\,R'''\ldots.$$

Andererseits ist natürlich

$$K_1K_2K_3\ldots\,\overline{\wedge}\,P_1P_2P_3\ldots.$$

Der Satz ist einleuchtend, weil

$$P_\mu(E'_\mu E''_\mu E'''_\mu\ldots)\,\overline{\wedge}\,P_\nu(E'_\nu E''_\nu E'''_\nu\ldots)$$

ist, und beide Gebilde einen Kegelschnitt erzeugen, der B, C, D, P_μ, P_ν enthält und demgemäss mit $\mathfrak{K}$ identisch ist. Die Reihe $R'\,R''\,R'''\ldots$ hat also die Eigenschaft, dass die projectivischen Büschel

$$a'\,a''\,a'''\ldots\,\overline{\wedge}\,P_\mu(R'\,R''\,R'''\ldots)$$

den bestimmten Kegelschnitt K_μ erzeugen.*)

Eine Curve dritter Ordnung C sei nun das Erzeugniss der beiden projectivischen Büschel

$$K_1\,K_2K_3\ldots\,\overline{\wedge}\,o_1o_2o_3\ldots;$$

das letztere Strahlbüschel habe das Centrum O. Sind P_1 und P_2 zwei Punkte des Erzeugnisses, die mit O nicht in gerader Linie und deshalb auf zwei verschiedenen Kegelschnitten K_1 und K_2 des Büschels liegen, so erhält man auf dem durch B, C, D, P_1, P_2 bestimmten Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ die beiden Reihen

$$R'\,R''\,R'''\ldots\,\overline{\wedge}\,a'\,a''\,a'''\ldots,$$
$$P_1P_2P_3\ldots\,\overline{\wedge}\,K_1K_2K_3\ldots\,\overline{\wedge}\,o_1o_2o_3\ldots.$$

Die Curve ist der Ort der Punkte, in denen sich Strahlenpaare o_μ, $a^{(\lambda)}$ mit den zugehörigen Geraden $P_\mu R^{(\lambda)}$ treffen. Bezeichnet man mit $L^{(\lambda)}$ das Erzeugniss der Büschel

$$R^{(\lambda)}(P_1\,P_2\,P_3\ldots)\,\overline{\wedge}\,o_1\,o_2\,o_3\ldots,$$

so ist die Curve C das Erzeugniss der eindeutig auf einander bezogenen Reihen

$$a'\,a''\,a'''\ldots\quad\text{und}\quad L'\,L''\,L'''\ldots.$$

Da OP_1 mit o_1, OP_2 mit o_2 bezeichnet werden kann, so begegnen sich alle Kegelschnitte $L^{(\lambda)}$ in O, P_1 und P_2. Ist X der letzte Schnittpunkt von L' und L'', so entsprechen $R'X$ und $R''X$ bei der Erzeugung derselben dem Strahle OX. Daher liegt X auf $\mathfrak{K}$, entspricht OX in

*) Augenscheinlich liegt hier eine Verallgemeinerung der zweiten Steiner'schen Erzeugungsweise des Büschels vor. Diese selbst würde sich ergeben, wenn man $\mathfrak{K}$ in BC und eine von D ausgehende Gerade zerfallen liesse. Vergl. „Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie". Zweiter Theil, herausgegeben von H. Schröter. 2. Aufl. Leipzig, Teubner 1876, § 41.

der Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und ist allen Kegelschnitten $L', L'', L''', \ldots$ gemeinsam, $L' L'' L''' \ldots$ ist mithin ein zu $a' a'' a''' \ldots$ projectivisches Büschel, und es gilt der Satz:

Ist eine Curve das Erzeugniss eines Strahlbüschels und eines dazu projectivischen Kegelschnittbüschels, so kann sie auch erzeugt werden mit Hülfe eines Strahlbüschels, das einen der Grundpunkte des alten Büschels zum Centrum hat, und eines Kegelschnittbüschels, welches das alte Centrum zum Grundpunkt hat, während zwei andere auf der Curve willkürlich sind, und der letzte dann unzweideutig bestimmt ist.

Durch dreimalige Anwendung dieses Satzes ergiebt sich augenblicklich:

Eine Curve dritter Ordnung kann erzeugt werden mit Hülfe eines Büschels, denen Grundpunkte auf der Curve willkürlich sind, und eines zu ihm projectivischen Strahlbüschels, das den Gegenpunkt der vier Grundpunkte zum Centrum hat.

Auf der Grundlage der v. Staudt'schen Imaginärentheorie bezieht sich das obige gleichmässig auf reelle und nicht reelle Punkte. Hält man aber an einer mehr elementaren Betrachtungsweise fest, so würde sich das Vorhergehende nur auf die reellen Punkte der vorliegenden Curve beziehen. Ich will zeigen, wie einfach auch bei diesem Standpunkte Paare imaginärer Punkte in die Betrachtung eintreten. Zwei Strahlbüschel, welche zwei ineinanderliegende projectivische Punktreihen projiciren, erzeugen bekanntlich einen Kegelschnitt, der beider Doppelpunkte enthält, auch dann, wenn die letzteren imaginär sein sollten. Da nun L' das Erzeugniss von

$$R'(E_1' E_2' E_3' \ldots) \equiv R'(P_1 P_2 P_3 \ldots) \quad \text{und} \quad o_1 o_2 o_3 \ldots$$

ist, so wird bei der obigen Ueberlegung, wie man auch P_1 und P_2 auf der vorliegenden Curve gewählt hat, dem Strahle a' ein Kegelschnitt zugeordnet, der mit ihm dieselben beiden reellen oder imaginären Punkte gemein hat, nämlich die Doppelpunkte der Reihen, die $o_1 o_2 o_3 \ldots$ und $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf a' ausschneiden. Macht man nun einmal den umgekehrten Schluss und dann ihn selbst, so folgt der Satz:

Ein Strahl habe nur einen reellen Punkt A mit der Curve gemein. Man wähle A als Centrum des Strahlbüschels und drei beliebige Punkte der Curve als Grundpunkte des zugehörigen Büschels. Bei der durch die reellen Curvenpunkte vermittelten projectivischen Zuordnung beider Büschel wird dem Strahle eine Curve zugewiesen, welche zwei ganz bestimmte imaginäre Punkte auf ihm ausschneidet. Rechnet man alle diese imaginären Punkte der Curve zu, so hat sie mit jeder Geraden drei Punkte gemein, da eine leichte Stetigkeitsbetrachtung mindestens einen reellen gemeinsamen Punkt ergiebt.

Dass conjugirt imaginäre Punkte in die Basis eines erzeugenden

Büschels aufgenommen werden können, zeigt man durch folgende Betrachtung. Die imaginären Punkte E^0, F^0 mögen mit dem Curvenpunkt S auf einer reellen Geraden s^0 liegen, die von S ausgehenden Strahlen s', s'', s''' mögen in Paaren reeller Punkte E', F'; E'', F''; E''', F''' schneiden. Die vier von einem Curvenpunkte O ausgehenden Geraden o_1, o_2, o_3, o_4 mögen in den Paaren C_1, D_1; C_2, D_2; C_3, D_3; C_4, D_4 reeller Punkte treffen. Mit dem letzten Schnittpunkt von OS mögen die reellen Punkte A, B von C in einer Geraden liegen. Fasst man S als Centrum des Strahlbüschels, A, B, C_μ, D_μ als Grundpunkte des zugehörigen Kegelschnittbüschels auf, so erkennt man nach dem vorigen, dass je sechs Punkte

$$A, B, C_\mu, D_\mu, E^{(\lambda)}, F^{(\lambda)} (\lambda = 0, 1, 2, 3; \mu = 1, 2, 3, 4)$$

auf je einem Kegelschnitt $K_\mu^{(\lambda)}$ liegen. Ferner ist

$$s^0 s' s'' s''' \barwedge K_1^0 K_1' K_1'' K_1''' \barwedge K_2^0 K_2' K_2'' K_2''' \barwedge K_3^0 K_3' K_3'' K_3''' \barwedge K_4^0 K_4' K_4'' K_4'''.$$

Da man aber auch O als Centrum wählen und die Basis aus jedem der Punktepaare E', F'; E'', F''; E''', F''' in Verbindung mit A, B zusammensetzen kann, so ist andererseits

$$o_1 o_2 o_3 o_4 \barwedge K_1' K_2' K_3' K_4' \barwedge K_1'' K_2'' K_3'' K_4'' \barwedge K_1''' K_2''' K_3''' K_4'''.$$

Ferner wissen wir, dass $K_1^0, K_2^0, K_3^0, K_4^0$ einem Büschel angehören. Wir nehmen nun von allen 16 Kegelschnitten die Polaren hinsichtlich eines festen Punktes P und benutzen, dass ein Büschel ein zu ihm selbst projectivisches Büschel von Polaren bedingt.*) Hiernach ergeben sich zweimal vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4; B^0, B', B'', B''' von der Art, dass $A_\mu B^{(\lambda)}$ die Polare von $K_\mu^{(\lambda)}$ ist. Da ferner

$$A_1(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_2(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_3(B^0 B' B'' B''') \barwedge A_4(B^0 B' B'' B''')$$

ist, so liegen alle 8 Punkte auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}'$; hiernach ist

$$B^0(A_1 A_2 A_3 A_4) \barwedge B'(A_1, A_2, A_3, A_4),$$

das heisst

$$K_1^0 K_2^0 K_3^0 K_4^0 \barwedge o_1 o_2 o_3 o_4.$$

Da o_4 ein beliebiger in reellen Punkten treffender Strahl des Büschels O ist, so kann die Curve, was ihre reellen Punkte anbelangt, mit Hülfe des Strahlbüschels $o_1 o_2 o_3 \ldots$ und des Kegelschnittbüschels mit den reellen Grundpunkten A, B und den imaginären E^0, F^0 erzeugt werden. Einem Strahle o_5, der in imaginären Punkten C_5, D_5 schneidet, mögen die Kegelschnitte $K_5^0, K_5', K_5'', K_5'''$ projectivisch zugeordnet werden. Die Polaren derselben hinsichtlich P begegnen sich in dem Punkte A_5 von $\mathfrak{K}'$, für welchen

*) Vergl. Steiner-Schröter etc. § 47.

$$B^0(A_1A_2A_3A_4A_5) \barwedge B'(A_1A_2A_3A_4A_5) \barwedge \cdots \barwedge o_1o_2o_3o_4o_5$$

ist. Da nun P ein ganz beliebiger Punkt der Ebene ist, so gehören K_5^0, K_5', K_5'', K_5''' zu einem Büschel, und K_5^0 enthält C_5, D_5 ebenso wie die drei anderen Kegelschnitte. Die neuen Erzeugungsweisen ergeben also die schon vorhandenen reellen und imaginären Punkte. Die gemachten Schlüsse wiederholen sich nun Wort für Wort für zwei conjugirt imaginäre Punkte A, B und ergeben alsdann den Lehrsatz:

Hat ein Büschel seine vier Grundpunkte, unter denen zwei oder zweimal zwei conjugirt imaginäre vorkommen können, auf einer Curve dritter Ordnung, so erzeugt dasselbe mit einem projectivischen Strahlbüschel die Curve dritter Ordnung, was die reellen Punkte derselben anbelangt und die conjugirt imaginären Punkte, die mit dem Centrum des Strahlbüschels in (reellen) Geraden liegen.

Durch leichte indirecte Schlüsse gewinnt man folgende Umkehrung dieses Satzes:

Erzeugen ein Strahl- und ein Kegelschnittbüschel eine Curve dritter Ordnung, was ihre reellen Punkte anbelangt, so gehören ihr die Grundpunkte des letzteren Büschels auch dann an, wenn sie nicht reell sein sollten.

Von einem Kegelschnitt, der zwei Punkte mit der Curve gemein hat, kann gezeigt werden, dass er einem derartigen Büschel angehört und daher noch vier weitere Punkte mit der Curve gemein hat.

II.

Uebergang zu anderen Betrachtungsweisen der Curve.

Mit Leichtigkeit lässt sich mit Hülfe des benutzten Principes der Uebergang zu Herrn Reye's Definition der Curven dritter Ordnung vollziehen. Während Herr Reye*) selbst den Uebergang zu Chasles' Erzeugungsweise vollzogen hat, hat Herr Schur**) eine Construction für die Netze collinearer Strahlenebenen gegeben, durch die eine gegebene Curve dritter Ordnung erzeugt wird und nachgewiesen, dass es eine einfache Mannigfaltigkeit solcher Netze giebt. Gleichwohl dürfte die neue Vorschrift zur Construction solcher Netze nicht ohne Interesse sein, die aus unseren Entwickelungen folgen wird. Wir lassen hierzu den Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ der obigen Betrachtung in die Gerade BC und in eine zweite von D ausgehende, aber A nicht enthaltende Gerade d zerfallen. Die Punktreihe $R'R''R'''\ldots$ liegt dann auf BC,

*) Vergl. „Vorlesungen über die Geometrie der Lage". II. Bd., II. Auflage, Hannover, 1880. (Vorlesung 25).

**) Vergl. § 3 des Aufsatzes „Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen". Habilitationsschrift. Leipzig 1881.

die Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ hingegen wird vom Büschel $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf d ausgeschnitten. Nunmehr gehört nicht nur zu einer Zusammenstellung $a^{(\lambda)} o_\mu$ eine Gerade $R^{(\lambda)} P_\mu$, sondern auch umgekehrt zu einem Strahl der Ebene im allgemeinen *ein* Paar $a^{(\lambda)}$, o_μ. Der Schnittpunkt G von BC und d wird als Punkt der Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ von dem Geradenpaar BC, AD des Büschels $K_1 K_2 K_3 \ldots$ ausgeschnitten. In dem Büschel $o_1 o_2 o_3 \ldots$ gehört daher zu G der Strahl o_0, der die letzten Schnittpunkte E und F von AD und BC mit der Curve enthält. Insofern G der Reihe $R' R'' R''' \ldots$ angehört, entspricht ihm der Strahl AD des Büschels $a' a'' a''' \ldots$. Denn um zu $R^{(\lambda)}$ das zugehörige $a^{(\lambda)}$ zu erhalten, haben wir $R^{(\lambda)} P_\mu$ zum zweiten Male mit K_μ zu schneiden; alle so erhaltenen Punkte liegen auf $a^{(\lambda)}$. Die Verbindungslinien decken sich für G mit d selbst, die zweiten Schnittpunkte mit D, und $a^{(\lambda)}$ mit AD. Jedem von G ausgehenden Strahl gehört mithin OE, $AE = AD$ als Zusammenstellung o_μ, $a^{(\lambda)}$ zu. Dreht man $R^{(\lambda)} P_\mu$ um einen festen Punkt, so treten dadurch $P_1 P_2 P_3 \ldots$ und $R' R'' R''' \ldots$ in projectivische Beziehung, und es bewegt sich der Punkt $(a^{(\lambda)}, o_\mu)$ projectivisch über einen Kegelschnitt, der ausser A und O auch E enthält, weil G in einem Strahle des Büschels vorkommt. A, O und E bleiben in ihren alten Bedeutungen fest, wenn d ein beliebiger von D ausgehender Strahl ist und B, C ein beliebiges Paar, deren Verbindungslinie durch F geht. Die bei verschiedenen Annahmen von d und BC entstehenden Strahlenebenen $R^{(\lambda)} P_\mu$ sind nicht nur eindeutig, sondern collinear auf einander bezogen; denn die homologen Strahlen dieser Ebenen beschreiben projectivische Strahlbüschel, sobald der Punkt $(a^{(\lambda)}, o_\mu)$ irgend einen A, O, E enthaltenden Kegelschnitt durchläuft. Beliebig viele dieser collinearen Ebenen senden durch jeden Punkt der Curve dritter Ordnung homologe Strahlen. Dieselbe kann daher als Ort der Punkte definirt werden, in denen je drei homologe Strahlen von drei willkürlich herausgegriffenen dieser Ebenen sich treffen.

Man erhält nun zu $a^{(\lambda)}$, o_μ den entsprechenden Strahl in einer der betrachteten Ebenen, wenn man den o_μ entsprechenden, also mit ihm auf der Curve sich schneidenden Kegelschnitt K_μ mit $a^{(\lambda)}$ und d zum zweiten Male schneidet und beide Punkte verbindet. Hieraus ergiebt sich folgende Vorschrift:

Es seien O, E, F drei beliebige in einer Geraden liegende Curvenpunkte, A, D feste, mit E in einer Geraden liegende Punkte, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$; $H_\mu K_\mu$ veränderliche Punktepaare, die mit F bez. O in Geraden liegen. $K_\mu^{(\nu)}$ sei der A, D, $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$, H_μ, K_μ enthaltende Kegelschnitt; a, d seien von A bez. D ausgehende Strahlen. Die Verbindungslinie der beiden Punkte, in welchen a und d ausser in A und D $K_\mu^{(\nu)}$ schneiden, möge mit $(a, d)_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet werden. Alsdann füllen die drei Strahlen

$$(a, d_1)^{(\nu')}_{\mu},\ (a, d_2)^{(\nu'')}_{\mu},\ (a, d_3)^{(\nu''')}_{\mu},$$

wenn a und $O H_\mu K_\mu$ unabhängig von einander alle möglichen Lagen annehmen, drei collineare Strahlenebenen aus, welche die Curve dritter Ordnung erzeugen.

Von der ganzen zweifachen Mannigfaltigkeit der Strahlenebenen, die sich bei den verschiedenen Annahmen von d_1 und $B^{(\nu)}$, $C^{(\nu)}$ ergeben, fasse man jetzt je die homologen Strahlen in je eine Ebene zusammen und betrachte in den gewonnenen Strahlenebenen solche Strahlen als homolog, die zu derselben Ebene der ersten Mannigfaltigkeit gehören. Ebenen dieser Art aber werden von den Strahlen

$$(a_1, d)^{(\nu)}_{\mu};\quad (a_2, d)^{(\nu)}_{\mu'};\quad (a_3, d)^{(\nu)}_{\mu''};\ \ldots$$

erfüllt. Alle diese Ebenen sind also ebenfalls unter einander collinear, und irgend drei von ihnen erzeugen ebenfalls die Curve dritter Ordnung. Es folgt hieraus, dass wir es, nach Herrn Schur's Bezeichnung, mit zwei conjugirten Netzen collinearer Strahlenebenen zu thun haben. Jedes von beiden Netzen steht zu dem anderen in der beschriebenen Beziehung. Sucht man zu zwei festen Geraden einer Ebene die homologen in den anderen Ebenen des betreffenden Netzes, so beschreiben sie zwei collineare Ebenen des anderen Netzes.

Ist nun einmal das Netz gefunden, so können die Punkte A, O, E, auf denen seine Construction beruht, durch drei Punkte ersetzt werden, die zwei beliebigen Ebenen des Netzes entsprechend gemein sind und deshalb auf der Curve liegen. Man greife eine dritte Ebene, welche nicht zu dem Büschel aus den beiden ersten gehört, willkürlich heraus. Es seien L, M, N die entsprechend gemeinsamen Punkte der beiden ersten Ebenen; P_1, P_2, P_3 allgemein homologe Punkte der drei Ebenen. In P_1 schneiden sich zwei homologe Strahlen der beiden ersten Ebenen, nämlich die Gerade, welche $P_1 P_2$ in der ersten Ebene entspricht und $P_1 P_2$ selbst. Sucht man also zu $P_1 P_2$, betrachtet als Gerade der zweiten Ebene, den homologen Strahl p_3 in der dritten Ebene, so ist die Curve der Ort der Punkte P_1, die in den entsprechenden Geraden p_3 liegen. Bewegt sich nun P_1 über einen LMN umschriebenen Kegelschnitt, so ist dasselbe mit P_2 der Fall, und die entstehenden Punktreihen haben L, M, N entsprechend gemein. Nach einem bekannten Satze dreht sich daher $P_1 P_2$ um den letzten Schnittpunkt der beiden erhaltenen Kegelschnitte und p_3 durchmisst also ein Strahlbüschel, das zu der von P_1 beschriebenen Reihe projectivisch ist. Durchlaufen andererseits P_1 und P_2 zwei von M bez. N ausgehende Gerade, so dreht sich $P_1 P_2$ um einen auf LN bez. LM liegenden Punkt. Sind daher L_3, M_3, N_3 die zu L, M, N gehörigen Punkte, so erhält man zu den Strahlbüscheln $m' m'' m''' \ldots$ und $n_1 n_2 n_3 \ldots$ mit den Centren M und N projectivische Punktreihen $R' R'' R''' \ldots$

und $P_1 P_2 P_3 \ldots$ auf $L_3 N_3$ und $L_3 M_3$ von der Art, dass, wenn P_1 der Kreuzungspunkt von $m^{(\lambda)}$ und n_μ ist, p_3 die Verbindungslinie von $R^{(\lambda)}$ und P_μ ist. Jeder von L_3 ausgehenden Geraden aber gehört der Punkt L zu. Hier haben wir mit veränderten Bezeichnungen die Darstellung der Curve vor uns, mit deren Hülfe wir zu Herrn Reye's Definition kamen. Für A, O, E, G treten M, N, L, L_3 ein, für D der Schnittpunkt von ML und $M_3 L_3$.

Sehr einfach lässt sich übrigens der Nachweis gestalten, dass eine Curve dritter Ordnung das Erzeugniss halb-perspectivisch bezogener Strahleninvolutionen ist. O und A mögen denselben Tangentialpunkt P haben. Soll O das Centrum des Strahlbüschels sein, und sollen die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels einander in A berühren, so liegen die beiden anderen Grundpunkte B, C mit O in einer Geraden r_2. Auf jedem Kegelschnitt des Büschels $K_1 K_2 K_3 \ldots$ liegt eine Involution mit dem Centrum O; von A aus werden dieselben durch andere und andere Anordnungen derselben Involution mit den Paaren AO, AP oder p', q' und AB, AC oder $p'' q''$ projicirt. Nennt man OA als von O ausgehend r_1, so ist K_μ das Erzeugniss der beiden projectivischen Gebilde

$$p'q',\ p''q'',\ p'''q''',\ p^{(4)}q^{(4)}, \ldots \barwedge r_1,\ r_2,\ r_1''',\ r_1^{(4)}, \ldots.$$

Hieraus folgt zuerst, dass die Paare der Involution $p'q'$, $p''q''$ die Punktepaare der Curve dritter Ordnung projiciren, die mit O in gerader Linie liegen, und dass umgekehrt die mit A in gerader Linie liegenden Punktepaare von O aus durch Paare einer Involution projicirt werden. Dass diese Involutionen nicht nur eindeutig, sondern speciell projectivisch auf einander bezogen sind, erkennt man auf folgende Art. Projicirt man die Punktreihe, welche $K_1 K_2 K_3 \ldots$ auf $p^{(\lambda)}$ ausschneidet, von O aus und sucht die diesem Strahlbüschel $r_1^{(\lambda)} r_2^{(\lambda)} r_3^{(\lambda)} \ldots$ mit $o_1 o_2 o_3 \ldots$ gemeinsamen Strahlen, so erhält man das zu $p^{(\lambda)} q^{(\lambda)}$ gehörige Paar $o^{(\lambda)} r^{(\lambda)}$. Versteht man unter K_1 und K_2 die Geradenpaare AP, BC und AB, AC des Büschels, so werden $r_1^{(\lambda)}$ und $r_2^{(\lambda)}$ mit r_2 und r_1 identisch, o_1 und o_2 hingegen sind dann die Strahlen OP und OB_1C_1, wenn B_1 und C_1 die letzten Schnittpunkte von AB und AC sind. Als Doppelstrahlen der Büschel

$$o_1 o_2 o_3 o_4 \ldots \barwedge r_2 r_1 r_3^{(\lambda)} r_4^{(\lambda)} \ldots$$

bilden also $o^{(\lambda)}$ und $r^{(\lambda)}$ ein Paar der Involution $o_1 r_1$, $o_2 r_2$ oder OP, OA; OB, OB_1. Wählt man einen beliebigen von o_1 und o_2 verschiedenen Strahl des ersten Büschels, etwa o_3, beliebig aus, so fixirt der zugeordnete Strahl eindeutig das betrachtete Involutionspaar, und zwar bewegt sich letzteres zu jenem Strahl projectivisch. Da nun $r_3^{(\lambda)}$ und $p^{(\lambda)} q^{(\lambda)}$ bei ihrer Bewegung K_3 erzeugen, so bewegen sich

$$p^{(2)}q^{(2)},\ r_3^{(2)} \text{ und } r^{(2)}o^{(2)}$$

zu einander projectivisch*). Den Lagen $p'q'$ und $p''q''$ entsprechen die Lagen r_1 und r_2 von $r_3^{(2)}$. In beiden Fällen artet die projectivische Beziehung, die $r^{(2)}o^{(2)}$ liefert, aus; es ergiebt sich im ersten Fall o_1r_1, im zweiten Fall o_2r_2, so dass die Involutionen

$$o_1r_1,\ o_2r_2,\ o'''r''',\ o^{(4)}r^{(4)}, \ldots \barwedge p'q',\ p''q'',\ p'''q''',\ p^{(4)}q^{(4)}, \ldots,$$

die zur Erzeugung der Curve erhalten werden, in der That in halbperspectivischer Lage sind $\{r_1 \equiv p'\}$.

III.

Rationale Curven dritter Ordnung.

Die verschiedenen Erzeugungsweisen, die für eine Curve mit einem Doppelpunkte A gelten, lassen sich ebenfalls mit Hülfe unseres Principes in Zusammenhang bringen. Wir gehen davon aus, dass jede A enthaltende Gerade nur einmal, ausser in A, die Curve trifft. Da unser allgemeiner Satz auch hier gilt, können wir das Centrum des Strahlbüschels auf der Curve beliebig wählen, zu Basispunkten aber ausser A zwei beliebige Punkte B, C der Curve wählen. Wäre nun der vierte Grundpunkt D von A verschieden, so kämen AB und AC in zwei verschiedenen Geradenpaaren von $K_1K_2K_3\ldots$ vor. Da nur einem von beiden der Strahl OA oder o_1 entsprechen könnte, müsste entweder AB oder AC in zwei Punkten ausserhalb A schneiden, was ausgeschlossen ist. Daher müssen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ einander bis A längs einer Tangente berühren, deren letzter Schnittpunkt mit dem von BC und mit O in einer Geraden liegt. Der Geraden o_1 oder OA gehört als K_1 das Geradenpaar AB, AC zu. Dass eine auf die beschriebene Art entstandene Curve wirklich einen Doppelpunkt A hat, zeigt man durch Uebergang zu einer anderen Erzeugungsweise. Den Hülfskegelschnitt $\mathfrak{K}$ haben wir hier durch $A = D$, B, C und zwei beliebige mit O nicht in einer Geraden liegende Punkte P_2 und P_3 zu legen. Hier entsteht die von $K_1K_2K_3\ldots$ ausgeschnittene Punktreihe $P_1P_2P_3\ldots$, und zwar ist P_1 als letzter Schnittpunkt von AB, AC mit A identisch. Die zweite Reihe $R'R''R'''\ldots$ hat wieder die Eigenschaft, dass die Büschel

$$P_\mu(R'R''R'''\ldots) \barwedge a'a''a'''\ldots$$

K_μ erzeugen. Nennt man $L^{(2)}$ das Erzeugniss der Büschel

$$R^{(2)}(P_1P_2P_3\ldots) \barwedge o_1o_2o_3\ldots,$$

*) Dass die beiden Methoden der projectivischen Beziehungen von Involutionen, die hier in Frage kommen, auseinander folgen, habe ich ausführlich bewiesen. Vergl. a. a. O. §§ 24—26.

so erzeugen die beiden Büschel

$$a' a'' a''' \ldots \;\overline{\wedge}\; L' L'' L'''$$

ebenfalls die vorliegende Curve. Da nun o_1, o_2, o_3 die Punkte A oder P_1, P_2, P_3 enthalten, so sind A, P_2, P_3 und O die Grundpunkte des zweiten Büschels. Da umgekehrt ein Punkt, der Centrum des Strahlbüschels und Grundpunkt des Kegelschnittbüschels zugleich ist, ein Doppelpunkt der erzeugten Curve sein muss, so folgt:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte A entsteht, wenn einem beliebigen Strahlbüschel ein Büschel in A sich berührender Kegelschnitte zugehört, und dem Strahle OA das Geradenpaar mit dem Kreuzungspunkt A zugehört. Die beiden anderen Grundpunkte sind auf der Curve beliebig. Andererseits erzeugt das Strahlbüschel A die Curve zusammen mit einem Büschel, das neben A drei beliebige Curvenpunkte B, C, D zu Grundpunkten hat.

Um zu einer anderen Erzeugungsweise zu kommen, bezeichne man mit L', L'' die Geradenpaare AB, CD und AC, BD, mit a' und a'' die zugehörigen Strahlen, die sich mit CD und BD in den Curvenpunkten C_1 und B_1 schneiden. Um die Curvenpunkte auf dem beliebigen von D ausgehenden Strahle d_μ zu finden, haben wir die Punktreihe, welche $L' L'' L''' \ldots$ auf d_μ ausschneidet, von A aus zu projiciren. Dieses Strahlbüschel $e'_\mu e''_\mu e'''_\mu \ldots$ hat mit $a' a'' a''' \ldots$ Doppelstrahlen, welche die gesuchten Punkte projiciren. Sie bilden aber ein Paar $a_\mu e_\mu$ der Involution $a' e''_\mu$, $a'' e'_\mu$, oder da e''_μ mit e' oder AB, e'_μ mit e'' oder AC identisch ist, ein Paar der Involution AC, AC_1; AB, AB_1. Das Paar ändert sich projectivisch z. B. zu e'''_μ oder, da e'''_μ und d_μ sich stets auf L''' schneiden, zu d_μ. Dies ergiebt den bekannten Satz:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt A ist das Erzeugniss eines Strahlbüschels, dessen Centrum auf der Curve beliebig ist und einer Strahleninvolution, die den Doppelpunkt zum Centrum hat.

Zu einer letzten bekannten Erzeugungsweise der Curve gelangt man, wenn man eine zweite von $a' a'' a''' \ldots$ unabhängige Anordnung $a_1 a_2 a_3 \ldots$ der von A ausgehenden Strahlen benutzt. Man schneide $L' L'' L''' \ldots$ mit einem B, C, D enthaltenden Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ in der Reihe $R' R'' R''' \ldots$ und construire auf ihm die Reihe $P_1 P_2 P_3 \ldots$ von der Art, dass

$$a_1 a_2 a_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; R^{(\lambda)}(P_1 P_2 P_3 \ldots)$$

$L^{(\lambda)}$ erzeugen. Wieder gehören nur die Punkte der Curve an, in denen drei Strahlen $a^{(\lambda)}$, a_μ, $R^{(\lambda)} P_\mu$ sich begegnen. Hierzu ist es aber, von A abgesehen, nothwendig und hinreichend, wenn wir a_1 mit a', a_2 mit a'', a_3 mit a''', ... zusammenfallen lassen und unter dieser Voraussetzung a_1 mit $R' P_1$, a_2 mit $R'' P_2$, a_3 mit $R''' P_3$, ... schneiden. Nunmehr ist aber

$$P_1 P_2 P_3 \ldots \;\overline{\wedge}\; R' R'' R''' \ldots$$

geworden, es umhüllen also P_1R', P_2R'', P_3R''', ... einen $\mathfrak{K}$ zweipunktig berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ und diese Tangentenreihe $t_1t_2t_3\ldots$ ist zu $a_1a_2a_3\ldots$ projectivisch. Also folgt der Satz:

Eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt A ist das Erzeugniss des Strahlbüschels A mit einem hierzu projectivischen Strahlbüschel zweiter Ordnung.

Die Schnittpunkte der Curve mit $\mathfrak{K}$ sind die zweimal drei Punkte, welche das Gebilde

$$a_1a_2a_3\ldots \quad \text{mit} \quad P_1P_2P_3\ldots \quad \text{bez.} \quad R'R''R'''\ldots$$

gemein hat. Nun bedingt ein einmal gewonnenes $\mathfrak{K}_1$ auf jedem ihn zweipunktig berührenden $\mathfrak{K}$ zwei Reihen $P_1P_2P_3\ldots$ und $R'R''R'''\ldots$ von der Art dass $P_1R' = t_1$, $P_2R'' = t_2$, $P_3R''' = t_3, \ldots$ ist und es wird dann

$$P_1P_2P_3\ldots \barwedge R'R''R'''\ldots \barwedge t_1t_2t_3\ldots.$$

Lässt man $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}_1$ zusammenfallen, so arten beide Reihen in die der Berührungspunkte, $T_1T_2T_3\ldots$, aus; daher berührt $\mathfrak{K}$ die Curve dritter Ordnung in den drei Punkten T_λ, die in ihren zugehörigen t_λ liegen. Umgekehrt wird jeder Kegelschnitt, der die Grundcurve dreipunktig berührt, ein Strahlbüschel zweiter Ordnung liefern, das mit $a_1a_2a_3\ldots$ die Curve erzeugt. Die projectivische Abhängigkeit wird mit Hülfe der drei Berührungspunkte fixirt. Aus diesen Erwägungen folgt aber das Resultat:

Berührt von zwei Kegelschnitten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ in zweifacher Berührung der eine eine rationale Curve dritter Ordnung, wo er ihr begegnet, so kommt die Auffindung der Schnittpunkte des anderen auf Aufgaben zweiten und dritten Grades zurück.

Berlin, im September 1890.

Zur Eintheilung der Strahlencongruenzen 2. Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien; Ebenenbüschel 2. Ordnung in perspectiver Lage zu rationalen Curven.

Von

Robert Schumacher in Augsburg.

In seinem Aufsatze „Eintheilung der Strahlencongruenzen 2. Ordnung mit Brenn- oder singulären Linien", Math. Ann. Bd. 36, macht Herr Sturm auf die Unvollständigkeit der Kummer'schen Abzählung der Congruenzen 2. Ordnung (Abhandlung der Berliner Ak. 1866) aufmerksam und führt zur Ergänzung bei den Congruenzen mit gerader Brennlinie, Rang 0, und denen mit einer Brennlinie auf der Brennfläche, Rang $n-2$, einige neue Fälle auf.

Es findet sich aber auch noch eine Lücke in der Abzählung bei den Congruenzen vom Range $n-1$, welche Herr Sturm als Gruppe III_2 durch die Eigenschaft ihrer singulären Curve kennzeichnet, von jedem ihrer Punkte aus einen Strahlenbüschel 1. Ordnung zu senden. Es sind dies die Congruenzen der Strahlen, welche einen Kegel 2. Ordnung berühren und eine Curve n^{ten} Ordnung treffen. Die von Herrn Sturm hier aufgeführten Fälle*) sind insofern specieller Art, als es nicht, wie dort verlangt wird, nothwendig ist, dass die Curve $(n-1)$-mal (Fall der ebenen Curve) oder $(n-2)$-mal (Fall der Raumcurve) durch die Kegelspitze hindurchgeht.

Ein Hinweis auf diese Lücke in der Abzählung bei Hrn. Kummer nebst einem Versuche, dieselbe auszufüllen, findet sich schon in meinen Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Classe.**) Die Resultate derselben zum Zwecke einer endgiltigen Vervollständigung der Eintheilung der Congruenzen 2. Ordnung zu wiederholen und zu erweitern ist die Absicht der vorliegenden Arbeit.

Ein erster Abschnitt beschäftigt sich mit der Untersuchung der Congruenzen 2. Ordnung vom Range $n-1$ selbst, während ein zweiter von den rationalen Curven handeln soll, welche Brennlinien solcher Congruenzen bilden.

---

*) Kummer a. a. O. Lehrsatz XIII und XIV.

**) Dissertation § 16. München 1885.

I.

Strahlencongruenzen 2. Ordnung vom Range $n-1$.

Als Rang einer Congruenz bezeichne ich mit Herrn Sturm die von mir unter dem Namen *Art**) eingeführte Zahl, welche angiebt, wie oft eine beliebige Gerade mit einem Strahlenpaare der Congruenz in einer Ebene liegt und durch einen Punkt geht.

Der grösste Werth, den der Rang einer Congruenz 2. Ordnung und n. Classe besitzen kann, ist $n-1$. Der Rang giebt nämlich für die Regelfläche R_g der Strahlen, welche eine beliebige Gerade g schneiden, die Anzahl der Punkte, in welchen der von g verschiedene Ort der Schnittpunkte je zweier Erzeugenden der Fläche die Gerade g trifft. Im Falle des Ranges $n-1$ hat aber dieser Ort die Ordnung $\frac{n(n-1)}{2}+n-1$, da er von jeder Ebene durch g die $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte ihrer Congruenzstrahlen enthält (ein Punkt, in dem sich α Strahlen treffen, ist hiebei $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$-fach) zu rechnen. Der allgemeine ebene Schnitt auf R_g, von der Ordnung $n+2$, besitzt daher die höchste Zahl von Doppelpunkten, nämlich $\frac{n(n-1)}{2}+n-1+1=\frac{n(n+1)}{2}$.

Die Brennfläche der Congruenz vom Range $n-1$ ist von der Ordnung 2. Da nämlich die Fläche R_g von jeder Ebene nach einer rationalen Curve geschnitten wird, so bestimmen ihre Erzeugenden, von denen je zwei durch einen Punkt der Geraden g gehen, auf einer solchen Curve eine Involution 2. Ordnung, deren Punktepaare den Punkten auf g eindeutig zugeordnet sind; den Ordnungspunkten entsprechen hiebei die beiden Schnittpunkte von g mit der Brennfläche.

Da also die Brennfläche von der zweiten Ordnung ist, muss der eine Brennpunkt eines beliebigen Strahles s der Congruenz ein singulärer Punkt sein; dass es aber im allgemeinen der andere nicht auch sein kann, (wobei dann die Brennfläche aus Strahlen mit unendlich vielen Brennpunkten, bestände) erkennt man, wie folgt: Die Erzeugenden von R_g sind durch die Punkte auf g zu einer Involution 2. Ordnung angeordnet; geht nun g in den Strahl s über, so fällt von jedem Strahlenpaare der Involution ein Strahl auf s, wohin dann auch die beiden Ordnungsstrahlen zu liegen kommen; die Schnittpunkte von g mit der Brennfläche haben sich dann offenbar in einen Punkt zusammengezogen, den Punkt, welcher dem Strahle s als Element der Involution entspricht; s berührt in ihm die Brennfläche.

---

*) Dissertation § 1, 7: Math. Ann. Band 37 „Classification der algebr. Strahlensysteme"; Sturm: „Ueber die sogenannten Strahlencongruenzen ohne Brennfläche" in der Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg anlässlich ihres 200jährigen Jubelfestes 1890. (Teubner) S. 61.

Die zum Strahle s gehörige Regelfläche R_s zerfällt in eine Regelfläche R_s' und den vom singulären Punkte auf s ausgehenden Strahlenkegel. Da nun letzterer im Allgemeinen den Ort der singulären Punkte der Congruenz — wir nennen ihn C — nicht enthalten kann (auf jedem Strahle liegt ja nur ein singulärer Punkt) und da sich auf der Fläche R_s' ausser s keine Doppellinie mehr findet, so schickt ein Punkt von C nur je einen Strahl aus, welcher s schneidet, so dass die Strahlen, welche von je einem singulären Punkte ausgehen, im Allgemeinen einen Büschel bilden. Die Ebenen dieser Büschel bilden, da ein Strahl im Allgemeinen nur einem derselben angehören kann, einen Büschel B 2. Ordnung, welcher einen Kegel K, die Brennfläche der Congruenz, umhüllt.

Die singuläre Linie C ist, da in jeder Ebene n Strahlen liegen, eine rationale Curve n. Ordnung; sie ist eindeutig so auf den Büschel B bezogen, dass jede Ebene durch ihren entsprechenden Punkt geht — wir sagen: *der Ebenenbüschel befindet sich in „perspectiver Lage“ zur Curve.* Umgekehrt bestimmt, wie man leicht erkennt, ein Ebenenbüschel 2. Ordnung in perspectiver Lage zu einer Curve C_n der Ordnung n eine Strahlencongruenz 2. Ordnung und n. Classe.

Die eigentlichen Brennebenen der Congruenz, von denen jedem Strahle eine zukommt, sind die Tangentialebenen von C_n, wie auch die Formel*) für die Classe der Brennfläche: $2m(n-1)-2r$, wo $r=n-1$ den Rang der Congruenz bedeutet, den Werth $2(n-1)$ d. h. die Classe von C_n ergiebt. — Ausser den Punkten von C_n besitzt die Congruenz noch einen singulären Punkt, die Spitze S des Kegels K, welcher die Brennfläche bildet; von ihm geht ein Strahlenkegel n. Ordnung aus, der Projectionskegel von C_n.

Besondere Strahlen: Von dem Punkte S gehen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Sehnen an die Curve C_n; dieselben bilden Doppelstrahlen der Congruenz, da sie für jeden ihrer Punkte und für jede ihrer Ebenen doppelt zu rechnen sind. — Die Mantellinien des Kegels K, welche nach den n Berührungspunkten desselben mit C_n gehen, sind Strahlen, die jeden ihrer Punkte zum Brennpunkt haben; denn dieselben sind für jeden ihrer Punkte, aber nur für eine ihrer Ebenen doppelt zu zählen.

Da durch einen Punkt von C_n im Allgemeinen 2 Ebenen des Büschels B gehen, so schickt derselbe ausser einem Strahlenbüschel noch einen einzelnen Strahl aus. Die Gesammtheit dieser Strahlen (dieselben sind Sehnen von C_n) bilden im Falle der Raumcurve eine Regelfläche vom Grade $n(n-1)$; jede Tangentialebene von K enthält nämlich $n-1$ solcher Sehnen, weiter gehen durch die Spitze von K

*) Dissertation, § 3.

deren $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ doppelt zu zählende, so dass sich jene Zahl als Classe der Regelfläche ergiebt.

*Das zur Congruenz gehörige**) *Nullsystem* ordnet einem Punkte des Raumes die Ebene des hindurchgehenden Strahlenpaares zu und einer Ebene die $\frac{n(n-1)}{2}$ Schnittpunkte ihrer Strahlen. Den Punkten einer Geraden entsprechen die Ebenen eines Büschels n. Ordnung; durch jeden Punkt von ihr gehen nämlich ausser seiner zugehörigen Ebene noch $n-1$ die Gerade enthaltenden Ebenen des Büschels. Den Ebenen durch einen Punkt P entsprechen folglich die Punkte einer Fläche f_p von der Ordnung n. Die Flächen f_p haben sämmtlich die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelstrahlen und die singuläre Linie C_n gemeinsam und zwar letztere wegen der Eigenschaft ihrer Punkte, ausser einem Büschel von Strahlen noch je einen einzelnen Strahl auszusenden. Die Spitze S des Kegels K ist $(n-1)$-facher Punkt der Flächen f_p; dies folgt daraus, dass die Ebenen, welche den von S verschiedenen Punkten auf einer Geraden durch S entsprechen, einen Ebenenbüschel 1. Ordnung bilden. Jede Fläche f_p enthält ausser den Doppelstrahlen noch zweimal $n-1$ Gerade, nämlich die Strahlen, welche sich in den Tangentialebenen durch P an den Kegel K einzeln befinden. Die Strahlen, welche in den Tangentialebenen von P an die Curve C_n liegen, ohne den Berührpunkt zu enthalten, berühren die Fläche f_p.

Zwei Flächen f_p und $f_{p'}$ schneiden sich ausser in den allen Flächen gemeinsamen Linien noch in der krummen Doppellinie der Regelfläche R_g aus den Strahlen, welche die Verbindungslinie g der zugehörigen Punkte P und P' schneiden. Der Schnitt von f_p mit R_g selbst besteht aus den zwei Strahlen durch P, der doppelt zu rechnenden krummen Doppellinie von R_g und der singulären Linie C_n. Die Betrachtung der Schnitte dieser drei Flächen hätten wir zum Ausgang für die Untersuchung der Congruenz machen können, indem dieselbe die Ordnung der Linie C_n und den Charakter der singulären Punkte ermitteln lässt.

Es bleibt jetzt noch übrig, die verschiedenen Fälle der Strahlencongruenzen 2. Ordnung und n. Classe vom Range $n-1$ zu erörtern, eine Aufgabe, die darauf hinauskommt, zu untersuchen, wenn es zu einer gegebenen rationalen Curve Ebenenbüschel 2. Ordnung in perspectiver Lage giebt und wie gross alsdann die Mannigfaltigkeit derselben ist. Hiermit wird sich das Folgende befassen.

---

*) Dissertation § 2; Math. Ann. Bd. 37, S. 109.

II.

Ebenenbüschel 2. Ordnung in perspectiver Lage zu rationalen Curven.*)

Wir unterscheiden hier den Fall der ebenen Curve, wo an Stelle des Ebenenbüschels der Strahlenbüschel 2. Ordnung zu treten hat, und den Fall der Raumcurve. — Unter C_n sei im Folgenden, wie bisher eine rationale Curve n. Ordnung verstanden.

Fall der ebenen Curve.

Wenn die Ordnung der Curve C_n den Werth 4 übersteigt, so kann es höchstens einen zu ihr perspectiven Strahlenbüschel 2. Ordnung geben, da zwei solcher Büschel vermöge ihrer projectiven Beziehung nur eine Curve 4. Ordnung erzeugen würden. Damit es zu C_n im allgemeinen Falle überhaupt einen solchen Büschel giebt, muss die Curve Bedingungen genügen. Eine Erzeugungsweise, welche auf diese Bedingungen führt, verschafft uns die Betrachtung eines Ebenenbüschels B 2. Ordnung mit dem Centrum S, der sich zu einer Curve C_n in perspectiver Lage befindet. Jede Gerade g, welche in einer Ebene von B liegt, wird durch den Ebenenbüschel projectiv auf C_n bezogen. Geht die Gerade g durch den der Ebene zugehörigen Punkt von C_n, so bilden die Verbindungslinien entsprechender Punkte von C_n und g eine Regelfläche R_n von der Ordnung n; R_n wird von jeder Ebene durch S und durch eine Erzeugende nach einer Curve $(n-1)$. Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte in S geschnitten, die ebenfalls projectiv auf C_n bezogen ist.

Hieraus folgt: *man erhält irgend eine Curve C_n der verlangten Beschaffenheit, indem man eine Curve $(n-1)$. Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte projectiv auf eine Gerade g bezieht und die Regelfläche der Verbindungslinien entsprechender Punkte mit einer Ebene schneidet.*

Diese Erzeugung führt auf eine einfache Gleichung der Curve C_n in Parameterform. Wir nehmen zu ihrer Herleitung g als Y-Axe und als Centrum des Ebenenbüschels den unendlich fernen Punkt auf der Z-Axe. Die Gleichungen einer Curve $(n-1)$. Ordnung, welche in der Ebene $y=0$ durch letzteren Punkt $(n-2)$-mal hindurchgeht, sind dann:

$$x=\lambda, \quad z=\varphi_{n-1}(\lambda):\psi_{n-2}(\lambda),$$

wo φ_{n-1} und ψ_{n-2} Ausdrücke $n-1^{\text{ten}}$ bezw. $n-2^{\text{ten}}$ Grades bedeuten. Ordnen wir dann dem Punkte der Curve $z=\lambda$ je den Punkt $y=\frac{1}{\lambda}$ auf der Y-Axe zu, so ist die Gleichung der Verbindungslinien entsprechender Punkte von der Form:

$$\frac{X}{x}=\frac{Z}{z}=1-\lambda Y,$$

*) Vgl. hierzu Brill, „Ueber rationale Curven und Regelflächen", Math. Ann. Bd. 36.

wobei X, Y, Z die laufenden Coordinaten bedeuten und x, z die Coordinaten eines Punktes in der XZ-Ebene. Für den Schnitt der Regelfläche R_n der Verbindungslinien mit der Ebene $Z = 1$ erhalten wir dann die Gleichungen:

$$X = \frac{\lambda \psi_{n-2}}{\varphi_{n-1}}, \qquad Y = \frac{\lambda \varphi_{n-1} - \psi_{n-2}}{\lambda \varphi_{n-1}}.$$

Um die Mannigfaltigkeit der Curven C_n zu bestimmen, nehmen wir das Centrum S des perspectiven Ebenenbüschels willkürlich und verlangen, die Leitlinie g der zur Erzeugung dienenden Regelfläche R_n und die Ebene, welche R_n nach einer Curve $(n-1)$. Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte schneide — eine solche Ebene gehört dem perspectiven Ebenenbüschel 2. Ordnung an — gehen je durch einen gegebenen Punkt; dann sind hierdurch 4 Erzeugungen von C_n bestimmt. Wir erhalten somit alle C_n, jede 4-mal, indem wir alle in den Ebenen eines Büschels 1. Ordnung durch S liegenden und durch diesen Punkt $(n-2)$-mal laufenden Curven $(n-1)$. Ordnung von der Mannigfaltigkeit $2n-1$ nach einander auf sämmtliche Geraden eines Bündels projectiv beziehen. Dies giebt eine $(2n+4)$-fache Mannigfaltigkeit der Curven C_n einer Ebene; dieselbe ist um $n-5$ kleiner als die Mannigfaltigkeit der allgemeinen rationalen Curven n. Ordnung, wie es auch eine von dem Falle $n = 2$ aufsteigende Betrachtung lehrt.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Curven C_n mit perspectivem Strahlenbüschel B 2. Ordnung erhalten wir von der Verwirklichung der projectiven Beziehung von C_n auf eine Gerade ausgehend; dieselbe geschehe mittelst eines Büschels Γ von Curven $(n-2)$. Ordnung, welcher ausser den Doppelpunkten von C_n noch $n-3$ einfache Punkte der Curve zu Grundpunkten hat, so dass jede seiner Curven C_n nur noch in einem Punkte schneidet. Jeder Strahl s von B, welcher in der perspectiven Beziehung von B auf C_n einem der auf C_n gelegenen einfachen Grundpunkte von Γ zugeordnet ist, wird durch den Curvenbüschel projectiv auf C_n bezogen. Denn der Büschel B bestimmt auf s und C_n projective Punktreihen, während der Büschel Γ auf s eine dazu projective Involution $(n-3)$. Ordnung ausschneidet. Die Involution hat aber mit der Punktreihe auf s mehr als $n-2$ Punkte, nämlich die $n-1$ übrigen Schnittpunkte von s und C_n, und damit unendlich viele Punkte entsprechend gemein.

Hieraus folgt der Satz: *Legt man durch die Doppelpunkte und durch $n-3$ beliebige andere Punkte einer Curve C_n mit perspectivem Strahlenbüschel* 2. *Ordnung einen Büschel von Curven $n-2$. Ordnung, so bilden die übrigen $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Grundpunkte die Eckpunkte eines vollständigen $(n-3)$-Seites, gebildet von den Strahlen des Strahlenbüschels, welche den $n-3$-einfachen Grundpunkten auf C_n zugeordnet sind.*

Die hier ausgesprochene Eigenschaft ist auch eine ausreichende Bedingung für das Vorhandensein eines perspectiven Strahlenbüschels 2. Ordnung zu einer Curve C_n. Eine Seite des $(n-3)$-Seites wird nämlich durch den Curvenbüschel Γ projectiv auf C_n bezogen und zwar so, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte $n-1$ Büschel 1. Ordnung und einen 2. Ordnung bilden.

Besondere Fälle. Im Falle $n=5$ trifft vorige Bedingung bei jeder Curve C_5 zu und liefert eine Construction für die Strahlen des perspectiven Büschels durch einen beliebigen Punkt P: durch P, die Doppelpunkte von C_5 und je einen Punkt auf C_5 werden zwei Büschel von Curven 3. Ordnung gelegt; da jede dieser Curven C_5 noch in 2 Punkten schneiden, so bestimmen die Büschel auf C_5 zwei Involutionen 2. Ordnung; das gemeinsame Punktepaar mit P verbunden giebt dann die gesuchten Strahlen.

Bei $n=4$ giebt es zu jeder Geraden in der Ebene der Curve 4 zu C_4 perspective Strahlenbüschel 2. Ordnung, welchen die Gerade angehört. Durch jeden Punkt P gehen zwei der von solchen Büscheln eingehüllten Kegelschnitte; man erkennt dies durch Anwendung des Curvenbüschels Γ, welcher hier aus Kegelschnitten besteht. Durch P und die Doppelpunkte von C_4 gehen nämlich 2 Kegelschnitte, welche C_4 berühren; die Verbindungslinie von P mit einem der Berührungspunkte wird aber durch den Büschel Γ, der letzteren Punkt zum Grundpunkte hat, so auf C_4 bezogen, dass P diesem Grundpunkt entspricht; die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden dann die Tangenten eines Kegelschnittes durch P.

Um die Mannigfaltigkeit der perspectiven Strahlenbüschel 2. Ordnung für $n=3$ und $n=2$ zu untersuchen, nimmt man wie im allgemeinen Falle eine Regelfläche R_n, welche durch die projective Beziehung von C_n auf eine C_n schneidende Gerade entsteht (hiebei muss der Schnittpunkt sich selbst entsprechen). Die perspectiven Strahlenbüschel erhält man dann als Schnitte der Tangentialebenenbüschel 2. Ordnung an die Curve.

Fall der Raumcurve.

Soll eine Raumcurve n. Ordnung zu einem Strahlenbüschel 2. Ordnung perspectiv liegen, so muss sie, wenn $n>8$, Bedingungen genügen. Man erhält solche Curven auf folgende Weise: Eine Curve $(n-1)$. Ordnung mit $(n-2)$-fachem Punkte projectiv auf eine Gerade g bezogen, bestimmt eine Regelfläche R_n n. Ordnung. Auf g nehmen wir eine Involution $(n-1)$. Ordnung, welcher die $n-1$ Schnitte von g mit den Erzeugenden in irgend einer Ebene E durch g als Gruppe angehören, und beziehen dieselbe projectiv auf einen Ebenenbüschel mit der Axe in E, so dass obige Gruppe der Ebene E entspricht. Die

Erzeugenden von R_n sind hiedurch den Ebenen des Büschels derart zugeordnet, dass jeder derselben eine Ebene und jeder Ebene eine Gruppe von $n-1$ Erzeugenden entspricht. Die Schnittpunkte entsprechender Elemente bilden dann eine Curve C_n von der verlangten Beschaffenheit. Auf dem umgekehrten Wege, indem man von C_n als gegeben ausgeht, erkennt man, dass auch jede derartige Curve so erzeugt werden kann.

Um aus dieser Erzeugungsweise die Gleichungen der Curve C_n in Parameterform abzuleiten, nehmen wir die Curve $(n-1)$. Ordnung in der XY-Ebene mit dem $(n-2)$-fachen Punkte im Unendlichen auf der X-Axe, so dass die Coordinaten ihrer Punkte von der Form sind:

$$x = \frac{\varphi_{n-1}(\lambda)}{\psi_{n-2}(\lambda)}, \qquad y = \lambda$$

(φ_i, ψ_i seien Ausdrücke i^{ten} Grades im Parameter λ).

Beziehen wir dann die Z-Axe projectiv auf diese Curve, indem wir $z = \frac{1}{\lambda}$ setzen, so hat eine Erzeugende der hierdurch bestimmten Regelfläche die Gleichungen:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = 1 - \lambda Z$$

mit X, Y, Z als laufenden Coordinaten und x, y als Coordinaten des Schnittpunktes mit $Z=0$. Die Gleichung des Ebenenbüschels sei $X = \mu Z$ und die Involution auf der Z-Axe sei durch $\varphi_{n-1}(\lambda) = \mu \chi_{n-1}(\lambda)$ bestimmt. Für die Coordinaten der Punkte erhält man die Proportion:

$$X : Y : Z = \varphi_{n-1} : \lambda \psi_{n-2} : \chi_{n-1}.$$

Giebt es zur Curve C_n mehr als einen perspectiven Ebenenbüschel 2. Ordnung, so liegt dieselbe auf der von zweien der Büschel erzeugten Regelfläche 4. Ordnung; artet diese Fläche in eine Fläche 3. oder 2. Ordnung aus, so bilden die Büschel eine zwei- bezw. dreifache Mannigfaltigkeit.

Besondere Fälle: 1) Im Falle *der Raumcurve* 3. *Ordnung* sind die Ebenen jedes perspectiven Büschels B 2. Ordnung Tangentialebenen an eine Fläche 2. Ordnung durch C_3; nimmt man nämlich in einer der Ebenen die Sehne, welche die der Ebene nicht zugeordneten Punkte von C_3 verbindet, als Axe eines Ebenenbüschels, so ist derselbe durch C_3 projectiv auf B bezogen und erzeugt mit B eine Regelfläche, welche in eine Fläche 2. Ordnung und eine Ebene zerfällt.

2) Im Falle $n=5$ ist jeder Punkt des Raumes Centrum eines Büschels B, der perspectiv zu C_5 liegt.

3) Wenn $n=6$ ist, so bilden die Centren der perspectiven Büschel B eine Fläche 3. Ordnung, welche durch C_6 hindurchgeht. Dies beweist man wie folgt: Jeder Punkt von C_6 ist Centrum eines Büschels

B, da von ihm aus C_6 durch einen Kegel 5. Ordnung projicirt wird. Die projective Beziehung der Büschel B, welche durch C_6 vermittelt wird, bezieht die von ihren Centren ausgehenden Ebenenbündel β collinear aufeinander. Irgend 3 der Bündel β_1, β_2 und β_3 erzeugen eine Fläche F von der Ordnung 3, welche C_6 enthält; da nun jeder Punkt auf F Centrum eines zu β_2 und β_3 collinearen Bündels*) ist, welcher mit β_2 und β_3 die Fläche erzeugt, so folgt, dass irgend drei Bündel β mit den Centren auf C_6 ebenfalls F erzeugen und dass somit die Centren aller Bündel β auf F liegen**). — Zerfällt F in eine Fläche 2. Ordnung und eine Ebene, so ist jeder Punkt des Raumes Centrum eines Büschels B.

4) Für $n = 7$ liegen die Centren der Büschel B auf einer Raumcurve 3. Ordnung, der Doppelcurve auf der Regelfläche 4. Ordnung, welche von zweien der Büschel B erzeugt wird. Diese Curve schneidet C_7 in den 12 Schnittpunkten von C_7 mit den nicht der Regelfläche angehörigen Mantellinien jedes ihrer Projectionskegel 2. Ordnung.

5) Zu *einer Curve* C_8 giebt es eine bestimmte Anzahl von perspectiven Büscheln 2. Ordnung und zwar nur einen, da es sonst deren unendlich viele geben müsste. Zum Centrum dieses Büschels gelangt man auf folgende Weise: in irgend einer Ebene E des Raumes construirt man zwei zu C_8 projective Strahlenbüschel 2. Ordnung, so dass durch 7 der Schnittpunkte P_i von E mit C_8 ihre zugeordneten Strahlen gehen. Man erhält irgend einen solchen Büschel, indem man durch irgend 4 der 7 Punkte einen zu C_8 projectiven Kegelschnitt C_2 legt, wobei die 4 Punkte sich selbst entsprechen, und dann einen zu C_2 perspectiven Strahlenbüschel 2. Ordnung nimmt, welchem die Verbindungslinien der übrigen 3 Punkte P_i mit ihren zugeordneten auf C_2 angehören. Zwei solche zu C_8 projective Büschel 2. Ordnung bestimmen mit C_8 die Ebenen zweier projectiver Ebenenbüschel 3. Ordnung, welche die Ebene E entsprechend gemein haben; durch die projective Beziehung dieser Ebenenbüschel ist der Raum collinear auf sich selbst bezogen, so dass durch den ausserhalb E liegenden sich selbst entsprechenden Punkt 6 sich paarweise zugeordnete Ebenen gehen. Dieser Punkt ist ein dreifacher Punkt der von den Ebenenbüscheln erzeugten Regelfläche 5. Ordnung und somit das Centrum des zu C_8 perspectiven Ebenenbüschels 2. Ordnung.

Augsburg, im December 1890.

---

*) Reye, Geometrie der Lage, II. Theil, 2. Aufl., pag. 196.

**) F lässt sich so auf eine Ebene abbilden, dass das Bild von C_6 ein Kegelschnitt wird. C_6 trifft daher 6 der Geraden von F je in 4 Punkten, 15 je in 2 und die übrigen 6 gar nicht. Vgl. Sturm „Curven auf Flächen 3. Ordnung" Math. Ann. Bd. 21, pag. 494, Art. (6,0).

Ueber den Casus Irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

Es ist meines Wissens noch nicht streng bewiesen worden, dass der *casus irreducibilis* die Eigenschaft besitzt, nach der er genannt ist. Ein solcher Beweis kann weiter und enger gefasst sein. Man kann sich auf die sogenannte *allgemeine* Gleichung dritten Grades beschränken, d. h. die Coefficienten der Gleichung

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

innerhalb gewisser Grenzen willkürlich lassen; dabei wird es sich jedenfalls nur um solche reelle Werthe p, q, r handeln, für welche die Discriminante

$$D = p^2 q^2 + 18pqr - 4p^3 r - 4q^3 - 27r^2$$

positiv ist. Es ist dann zu zeigen, dass es keinen aus reellen Wurzeln gebildeten Ausdruck giebt, welcher für alle die in jenen Grenzen veränderlichen p, q, r der Gleichung genügt. Dieser Beweis kann dem Abel'schen für die Nichtauflösbarkeit der Gleichung fünften Grades nachgebildet werden, wobei nur Reelles und Imaginäres sorgfältig geschieden werden muss. Einfacher gestaltet sich der folgende Beweisgang, der weiter reicht, indem er zugleich für jede *besondere* irreducible Gleichung vom dritten Grade gilt.

§ 1.

Man setze einen Rationalitätsbereich fest, d. h. bezeichne gewisse veränderliche oder unveränderliche Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ in endlicher Zahl und betrachte alle aus diesen Grössen durch die Operationen der vier Species ableitbaren als rational. Die Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ sollen jetzt ausserdem reell sein, so dass ein *reeller* Rationalitätsbereich vorliegt. In diesem Rationalitätsbereich sei eine gegebene Gleichung dritten Grades irreducibel und ihre Discriminante D sei positiv. Man hat dann eine Gleichung mit drei verschiedenen reellen Wurzeln; denn bei der gewöhnlichen Schreibart der Cardanischen Formel ist die unter der Quadratwurzel stehende Grösse gleich

$$-\frac{D}{4.27},$$

also im vorliegenden Falle negativ.

Ist nun nicht zufällig die Quadratwurzel aus der Discriminante selbst eine Grösse des Rationalitätsbereichs, so füge man sie nachträglich zu den Grössen $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots$ hinzu, d. h. man „adjungire" $\sqrt{D}$. Der neue Rationalitätsbereich ist auch reell, weil die Discriminante positiv ist. Die erwähnten Eigenschaften der Gleichung bleiben bestehen; die Gleichung wird nicht reducibel, weil keine Gleichung vom dritten Grad durch Adjunction der Wurzel einer vom zweiten zerfällt, was im Folgenden noch begründet werden wird. Es gewinnt aber die Gleichung noch die Eigenschaft, dass jede ihrer Wurzeln, x_1, x_2, x_3, in jeder anderen rational ist. Es ist nämlich

$$x_1 - x_2 = \frac{\pm\sqrt{D}}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)} = \frac{\pm\sqrt{D}}{\frac{r}{x_3} - p x_3 + 2 x_3^2},$$

und

$$x_1 + x_2 = p - x_3,$$

woraus hervorgeht, dass x_1 und x_2 rational sind in x_3 und den Grössen des neuen Rationalitätsbereichs; es ist auch durch die vorausgesetzte Irreducibilität der Gleichung ausgeschlossen, dass die Ausdrücke illusorisch werden. So kann man immer 2 der Wurzeln in der dritten ausdrücken.

§ 2.

Ich nehme jetzt an, dass die Gleichung durch einen irgendwie aus Wurzelzeichen combinirten ohne Hilfe der Imaginären zu berechnenden Ausdruck befriedigt werde. Es soll also möglich sein, eine der Gleichungswurzeln dadurch zu bestimmen, dass man aus einer Grösse des Rationalitätsbereichs eine Wurzel von beliebigem Exponenten reell auszieht, diese adjungirt, aus einer Grösse des neuen Rationalitätsbereichs wieder eine Wurzel reell auszieht und so fortfährt, bis man zu einem Rationalitätsbereich gelangt, dem die Gleichungswurzel angehört. Die Wurzelexponenten können unbeschadet der Allgemeinheit als Primzahlen angenommen werden.

Wofern die erste Adjunction die Gleichung nicht reducibel macht, bleiben alle die besprochenen Eigenschaften der Gleichung bestehen. Man schreitet in diesem Fall gleich zur nächsten Adjunction weiter und macht nöthigenfalls so fort, bis eine Wurzel adjungirt wird, welche die Gleichung reducibel macht. Der unmittelbar vor dieser Adjunction vorhandene Rationalitätsbereich ist reell, weil alle die adjungirten Wurzeln reell sind. Man hätte also den Fall, dass eine in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible Gleichung dritten Grades, bei der jede Wurzel reell und in jeder andern rational ist, reducibel würde

bei der Adjunction einer reellen Wurzel mit Primzahlexponenten aus einer Grösse des Rationalitätbereichs.

§ 3.

Dass dies nicht möglich ist, ergiebt sich aus dem folgenden allgemeineren Satz: *Eine in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible Gleichung n^{ten} Grades mit einer reellen Wurzel und von der Eigenschaft, dass jede ihrer Wurzeln in jeder andern rational ist, kann nicht durch die Adjunction eines reellen Radicals mit Primzahlexponenten reducibel werden, es sei denn der Exponent gleich 2, in welchem Fall auch n durch 2 theilbar sein müsste.*

Hinsichtlich des Beweises dieses Satzes bedenke man zunächst, dass die vorausgesetzte Realität einer Gleichungswurzel die Realität der andern nach sich zieht, denn diese sind in jener einen rational, und die ausserdem in die Ausdrücke eingehenden Grössen des Rationalitätsbereichs sind gleichfalls reell. Ferner hat man die *reine* Gleichung

$$x^p - a = 0,$$

die das Radical definirt, ebenfalls als irreducibel zu denken. Wäre sie nämlich reducibel, so hätte sie, wie Herr Kronecker bewiesen hat*), eine rationale Wurzel. Nun ist hier für die Gleichung n^{ten} Grades ein reeller Rationalitätsbereich festgesetzt, dem natürlich auch die Grösse a angehören soll. Es müsste also, im Fall eines ungeraden Primzahlexponenten p, gerade die reelle Wurzel der reinen Gleichung die rationale sein. In allen Fällen würde also die Reducibilität der reinen Gleichung zur Folge haben, dass die adjungirte Grösse selbst rational gedacht werden müsste, wobei die Gleichung n^{ten} Grades nicht reducibel werden könnte.

§ 4.

Hat man überhaupt zwei in demselben Rationalitätsbereich irreducible Gleichungen vom n^{ten} und m^{ten} Grad, genügt eine Wurzel ξ der ersten nach Adjunction einer Wurzel η der zweiten einer irreduciblen Gleichung ν^{ten} Grades, und genügt η nach Adjunction von ξ einer ebensolchen Gleichung vom μ^{ten} Grad, so ist**)

$$n \,.\, \mu = m \,.\, \nu.$$

Diese Gleichung giebt zu erkennen, dass, wenn $\nu < n$ ist, auch $\mu < m$

---

*) Vergl. Monatsberichte der Berl. Akad., März 1879, p. 206.

**) Dieser Satz gehört meines Wissens Herrn Kronecker an, in dessen Vorlesungen ich ihn zuerst kennen gelernt habe; man findet ihn bewiesen in einer Abhandlung des Herrn Kneser: Math. Ann. Bd. XXX, p. 195. Der erwähnte Satz fällt unter besonderen Umständen mit einem Satz des Herrn C. Jordan zusammen: Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870, p. 269. Théorème XIII.

sein muss, und m und n nicht relativ prim zu einander sein können. Wenn also die erste Gleichung durch die Adjunction von η reducibel wird, so gilt dasselbe von der zweiten bei der Adjunction von ξ, und die Grade haben einen gemeinsamen Theiler. Es ergiebt sich hieraus unmittelbar die schon früher benutzte Regel, dass eine Gleichung dritten Grades bei der Adjunction der Wurzel einer vom zweiten nicht reducibel werden kann.

Nimmt man von der Gleichung n^{ten} Grades wieder an, dass jede ihrer Wurzeln in jeder anderen rational ist, und dass sie wirklich bei der Adjunction von η reducibel wird, so zerfällt die Gleichung m^{ten} Grades bei der Adjunction in Factoren von demselben Grad. Nennt man nämlich diese Gleichung $F(x) = 0$, ist $f(x, \xi)$ einer der nach Adjunction von ξ irreducibeln Factoren von $F(x)$, und sind $\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-1)}$ die übrigen Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades, so sind $f(x, \xi)$, $f(x, \xi')$, $f(x, \xi'')$, ..., $f(x, \xi^{(n-1)})$ lauter in demselben Rationalitätsbereich $[\xi, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}', \ldots]$ irreducible Functionen. Zwei dieser Functionen werden also entweder übereinstimmen oder gar keinen gemeinsamen Theiler haben. Keine der Functionen enthält einen Linearfactor doppelt, keine einen Linearfactor, der nicht der Function $F(x)$ angehörte, und das Product

$$f(x, \xi) \cdot f(x, \xi') \cdot f(x, \xi'') \ldots f(x, \xi^{(n-1)}),$$

das rational ist, muss alle Linearfactoren der im ursprünglichen Rationalitätsbereich irreducibeln Function $F(x)$ enthalten. $F(x)$ ist also das Product aus einem Theil der Functionen $f(x, \xi^{\alpha})$, zerfällt somit in Factoren gleichen Grades.

Wenn nun m eine Primzahl ist, so zerlegt sich die Gleichung $F(x) = 0$ in Factoren ersten Grades, jede ihrer Wurzeln wird durch die Adjunction von ξ rational. Ist ausserdem ξ reell, und der ursprüngliche Rationalitätsbereich auch, so muss die Gleichung m^{ten} Grades $F(x) = 0$ lauter reelle Wurzeln haben.

Man hat dies jetzt bloss auf den Fall anzuwenden, dass

$$F(x) = x^p - a$$

gesetzt wird. Die Gleichung

$$x^p - a = 0$$

hat nur im Fall $p = 2$ lauter reelle Wurzeln, und da auch in diesem Fall p und n einen gemeinsamen Theiler haben müssen, kann n keine ungerade Zahl sein, womit der früher in § 3 aufgestellte Satz bewiesen ist.

§ 5.

Für die Gleichung vom dritten Grad, die den Ausgangspunkt gebildet hat, ist damit Alles erledigt. Man könnte noch die Frage anknüpfen, welche Eigenschaften überhaupt eine Gleichung mit lauter

reellen Wurzeln besitzen muss, damit auch nur eine von diesen durch reelle Radicale ausgedrückt werden kann. Bei der Behandlung dieser Frage benutze ich die Galois'sche Theorie, die ich um des elementaren Gegenstandes willen im Vorhergehenden vermieden habe.

Es sei eine Gleichung $G(x) = 0$ mit lauter reellen, von einander verschiedenen Wurzeln gegeben, die im Uebrigen ganz beliebig ist. Ein reeller Rationalitätsbereich sei zu Grunde gelegt. Man bilde die Galois'sche Resolvente, von der dann alle Wurzeln reell sind. Der Grad N der Resolvente ist die Ordnung der Gruppe der gegebenen Gleichung. Nun denke man sich die Reihe der reellen Radicale, die nach und nach adjungirt werden, damit schliesslich die eine Wurzel x_1 der Gleichung $G = 0$ rational wird. Die Exponenten der Radicale werden wieder als Primzahlen angenommen. Das erste Radical, durch dessen Adjunction die Gruppe der gegebenen Gleichung reducirt wird, ist auch das erste, welches die Resolvente zum Zerfallen bringt. Es kommt nun der in § 3 aufgestellte Satz zur Geltung; der betreffende Wurzelexponent muss gleich 2 sein. Man hat also eine Quadratwurzel, nach deren Adjunction eine beliebig gewählte Wurzel ξ der Resolvente einer irreducibeln Gleichung ν^{ten} Grades genügt, während nach dem in § 4 erwähnten Satz die Quadratwurzel selbst in ξ rational ist, und die Relation

$$N \,.\, 1 = 2 \,.\, \nu$$

besteht. Jene Galois'sche Resolvente zerfällt also in zwei irreducible Factoren vom Grade $\frac{1}{2} N$, und die Gruppe der Gleichung $G = 0$ reducirt sich auf eine Untergruppe von halb so viel Substitutionen*). Eine Untergruppe, die aus der Hälfte der Substitutionen der sie umfassenden Gruppe besteht, ist in dieser stets ausgezeichnet enthalten**). Wenn nun nach der Adjunction der Quadratwurzel die Wurzel x_1 der Gleichung $G = 0$ nicht etwa rational ist, hat man dieselbe Betrachtungsweise fortzusetzen; man hat dieselbe Gleichung vor sich mit Rücksicht auf einen neuen Rationalitätsbereich, und als Galois'sche Resolvente der Gleichung ist jetzt nur einer der Theiler vom Grad $\frac{1}{2} N$ anzusehen, in welche die frühere Resolvente zerfiel. Schliesslich muss das Verfahren auf eine Gruppe $\Gamma_\varkappa$ führen, deren Substitutionen den Buchstaben x_1 nicht mehr versetzen. Man erhält so eine Reihe von Gruppen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varkappa$, die mit der ursprünglichen Gleichungsgruppe Γ beginnt, und in der jedes Glied ausgezeichnete Untergruppe vom vorhergehenden ist mit halb so viel Substitutionen.

---

*) Cf. Kneser: a. a. O. p. 201, Nr. 2.

**) Man vergl. auch: C. Jordan, a. a. O. p. 268 und 269, Théorème XII und Th. XIII.

Ich will jetzt die Annahme hinzufügen, dass die Gleichung $G=0$ irreducibel sein soll, dann ist Γ eine *transitive* Gruppe von Buchstabenvertauschungen. Man kann desshalb mittelst einer passend gewählten Substitution von Γ die Reihe $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\varkappa$ in eine Reihe $\Gamma, \Gamma_1', \Gamma_2', \ldots, \Gamma_\varkappa'$ transformiren, derart, dass die Gruppe $\Gamma_\varkappa'$ irgend eine andere Wurzel der Gleichung $G=0$, etwa x_2, ungeändert lässt.

Es zeigt eine nähere Ueberlegung, dass nun jede Wurzel dieser Gleichung durch *blosse Quadratwurzelausziehung* und zwar, da die Grössen $x_1, x_2, \ldots$ alle reell sind, durch reelle Quadratwurzeln gefunden werden kann. Die Gleichung lässt sich durch Quadratwurzeln vollständig auflösen; die Ordnung ihrer Gruppe muss dabei eine Potenz von 2 sein, und dies ist umgekehrt auch hinreichend*). Wegen der Transitivität der Gruppe ist der Grad der Gleichung $G=0$ ein Theiler von der Ordnungszahl der Gruppe, also auch eine Potenz von 2. *Unter den in einem reellen Rationalitätsbereich irreducibeln Gleichungen mit reellen Wurzeln sind also die einzigen, bei denen eine Wurzel durch reelle Radicale dargestellt werden kann, die durch Quadratwurzeln auflösbaren.*

§ 6.

Es sei jetzt wieder $G(x)=0$ eine Gleichung mit reellen, von einander verschiedenen Wurzeln, die auch reducibel sein kann und auf Grund eines reellen Rationalitätsbereichs betrachtet wird. Adjungirt man der Galois'schen Resolvente dieser Gleichung eine Wurzel einer in demselben Rationalitätsbereich irreducibeln Gleichung von Primzahlgrad, so führen die Betrachtungen von § 4 zu dem Resultat: *Die Gruppe der Gleichung $G(x)=0$ kann durch die Adjunction einer Wurzel einer irreducibeln Gleichung von Primzahlgrad sich nur dann reduciren, wenn die letztere lauter reelle Wurzeln hat.* Dieser Satz, der weiter reicht als der in § 3 auseinandergesetzte, ist übrigens eine directe Folge von einem Theorem des Herrn Kneser (a. a. O. p. 201).

Stuttgart, December 1890.

*) Vergl. Netto: Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882, p. 277 Lehrsatz VII und Sylow: Math. Ann. Bd. 5, p. 589.

Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie.

Von

Luigi Bianchi in Pisa.

Die geometrische Methode, auf welche Herr Professor Klein die arithmetische Theorie der gewöhnlichen binären quadratischen Formen gründet*), kann mit demselben Erfolge in weiterem Umfange angewandt werden. Dies zu zeigen ist der Zweck der folgenden Entwickelungen, welche in ähnlichem Sinne die Theorie der Dirichlet'schen Formen mit ganzen complexen Coefficienten und Veränderlichen, und der Hermite'schen Formen mit ganzen complexen Coefficienten und conjugirten Veränderlichen behandeln sollen. Unter einer ganzen complexen Zahl verstehen wir eine solche, die nach Kronecker's Bezeichnung dem Rationalitätsbereiche $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$ angehört, wo i, ε bezw. die vierte und dritte primitive Wurzel der Einheit bedeuten. Ich möchte mir übrigens vorbehalten, später auch die Fälle $(1, i\sqrt{D})$ und $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ zu behandeln, wo D eine positive ganze Zahl ist, die im zweiten Falle der Bedingung $\equiv 3 \pmod 4$ unterliegt. Zunächst handelt es sich darum die Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen z:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle ganzen Zahlen des Bereiches $(1, i)$ oder $(1, \varepsilon)$, die nur der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$$

*) Klein, Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen, ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke, (Leipzig, 1890), S. 243—260.

unterworfen sind, durchlaufen, nach Poincare's Auffassung*) durch eine entsprechende Polyedereintheilung des Raumes geometrisch darzustellen**). Die so gewonnenen Raumeintheilungen kann man benutzen, um die Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen in ganz analoger Weise zu *reduciren*, wie dies für die gewöhnlichen quadratischen Formen mit Hülfe der Modultheilung der Ebene geschieht. Die Theorie der genannten Formen erhält dadurch eine erschöpfende Behandlung, welche vor den bekannten Methoden von Dirichlet, Hermite und Picard manche Vortheile aufweist. Als einen solchen nennen wir insbesondere das Kennzeichen für die Aequivalenz *reducirter* Formen, welches einfach so lautet: *Alle äquivalenten reducirten Formen gehören derselben Periode an.*

Erster Abschnitt.

Polyedereintheilungen, die unseren Gruppen entsprechen.

§ 1.

Zusammensetzung der Gruppen G und G'.

Von der Gruppe G, die alle linearen Substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

mit ganzen complexen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aus dem Bereiche $(1, i)$ umfasst, beweisen wir folgenden Satz:

I) *Jede Substitution der Gruppe G lässt sich aus den drei elementaren Substitutionen:*

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

zusammensetzen.

Zuerst beachte man die folgenden aus T, S, V zusammengesetzten Substitutionen: ***)

$$V_1 = TS^{-1}T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_i = TV^{-1}T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ i, & 1 \end{pmatrix},$$

$$U = TVV_iV = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}.$$

---

*) Mémoire sur les groupes kleinéens — Acta Mathematica Bd. 3.

**) Vergl. eine vorläufige Mittheilung in den Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom April 1890. Die gleichen Raumeintheilungen kommen in anderer Gedankenverbindung bereits bei Hrn. Hurwitz im 11ten Bande der Acta Mathematica vor (1887: Ueber die Entwickelung complexer Grössen in Kettenbrüche).

***) Unter A, B verstehen wir die Substitution, welche entsteht, wenn man zuerst die Substitution B und dann A eintreten lässt.

Bezeichnen nun a, b irgend welche reelle ganze Zahlen, so existiren sicher in der von T, S, V erzeugten Gruppe die beiden Substitutionen:

$$S^a V^b = \begin{pmatrix}1, & a+bi\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad V_1^a V_i^b = \begin{pmatrix}1, & 0\\ a+bi, & 1\end{pmatrix},$$

d. h.

$$S_m = \begin{pmatrix}1, & m\\ 0, & 1\end{pmatrix},\quad V_m = \begin{pmatrix}1, & 0\\ m, & 1\end{pmatrix},$$

wo m eine beliebige ganze complexe Zahl bedeutet.

Es sei jetzt

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$$

irgend eine Substitution der Gruppe G. Wenn α oder β gleich Null sind, so können wir leicht die Behauptung des Satzes beweisen. Denn, für $\alpha = 0$, muss Σ eine der folgenden Formen haben

$$\Sigma = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \delta\end{pmatrix},\quad \text{oder}\quad \Sigma = \begin{pmatrix}0, & i\\ i, & \delta\end{pmatrix};$$

nun ist aber

$$\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & -\delta\\ 0, & 1\end{pmatrix} = TS_{-\delta},$$

$$\begin{pmatrix}0, & i\\ i, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i, & 0\\ 0, & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & -i\delta\\ 0, & 1\end{pmatrix} = UTS_{-i\delta}.$$

Wird $\beta = 0$ angenommen, so ergiebt sich

$$\Sigma = \begin{pmatrix}1, & 0\\ \gamma, & 1\end{pmatrix} = V_\gamma$$

oder

$$\Sigma = \begin{pmatrix}i, & 0\\ \gamma, & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i, & 0\\ 0, & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ i\gamma, & 1\end{pmatrix} = UV_{i\gamma}.$$

Besteht aber keine der Gleichungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, so bilde man aus Σ die folgende Reihe von Substitutionen

$$\Sigma_1 = \Sigma V_{m_1} = \begin{pmatrix}\alpha + m_1\beta, & \beta\\ \gamma + m_1\delta, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta\\ \gamma_1, & \delta\end{pmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 S_{m_2} = \begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta + m_2\alpha_1\\ \gamma_1, & \delta + m_2\gamma_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix},$$

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 V_{m_3} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + m_3\beta_1, & \beta_1\\ \gamma_1 + m_3\delta_1, & \delta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_2, & \beta_1\\ \gamma_2, & \delta_1\end{pmatrix},$$

. . . .

indem man die successiven ganzen complexen Zahlen

$$m_1, m_2, m_3 \ldots$$

so bestimmt, das nachstehende Ungleichungen zur Geltung kommen

$$N(\alpha_1) \leq \frac{1}{2} N(\beta), \quad N(\beta_1) \leq \frac{1}{2} N(\alpha_1), \quad N(\alpha_2) \leq \frac{1}{2} N(\beta_1), \ldots$$

wobei das Symbol $N(a)$ die *Norm* der complexen Grösse a bedeutet. Unsere Reihe von Substitutionen

$$\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots$$

können wir solange fortsetzen, bis ein α oder ein β gleich Null wird. Dies muss aber sicher eintreten, denn sonst würde die Reihe von ganzen, reellen, positiven Zahlen

$$N(\beta), N(\alpha_1), N(\beta_1), N(\alpha_2) \ldots$$

eine beständig abnehmende sein. Das letzte Glied Σ_r der Reihe kann, nach dem Vorigen, aus T, S, V zusammengesetzt werden. Dasselbe gilt also auch für die Substitution Σ, w. z. b. w. Gehen wir jetzt zur Gruppe G' über, welche aus allen Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

im Bereiche $(1, \varepsilon)$ besteht, so können wir den analogen Satz beweisen:

II) *Jede Substitution der Gruppe G' setzt sich aus den folgenden drei Substitutionen zusammen:*

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Genau wie früher bestätigen wir zuerst unsere Behauptung für die Substitutionen

$$S_m = \begin{pmatrix} 1, & m \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V_m = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ m, & 1 \end{pmatrix},$$

wo m eine beliebige ganze Zahl im Bereiche $(1, \varepsilon)$ bedeutet. Bedenkt man ferner dass die Substitution $\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ sich in folgender Weise zerlegen lässt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\varepsilon^2, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -\varepsilon, & 1 \end{pmatrix},$$

so können wieder die Schlüsse des vorigen Falles angewandt werden.

Aus den nunmehr folgenden geometrischen Darstellungen wird sich übrigens noch ein anderer Beweis für Sätze I), II) ergeben.

§ 2.

Anwendung der Poincaré'schen geometrischen Darstellung.

Wir gehen dazu über die Poincaré'sche geometrische Darstellung der linearen Substitutionen

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{1}$$

mit complexen Coefficienten in Anwendung zu bringen.

Interpretiren wir, in gewöhnlicher Weise, die Werthe der complexen Variabelen

$$z = \xi + i\eta$$

auf der $\xi\eta$-Ebene und fügen den ξ, η Axen eine dritte zu beiden senkrechte Axe ζ hinzu, so können wir der Substitution (1) eine Transformation des Raumes zuordnen, welche im nicht-euklidischen Sinne eine blosse Bewegung darstellt. Für jede solche Transformation bleibt das Vorzeichen der Ordinate ζ unverändert: dieses wollen wir immer im Folgenden als positiv annehmen.

Nach Poincaré (a. a. O. S. 54) lauten die wirklichen Formeln der Transformation folgendermassen:

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho'^2 = \dfrac{\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}, \\[2ex] z' = \dfrac{\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}, \\[2ex] z_0' = \dfrac{\varrho^2\gamma\alpha_0 + z\delta\alpha_0 + z_0\gamma\beta_0 + \delta\beta_0}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}. \end{cases}$$

Dabei bezeichnen ξ, η, ζ die Coordinaten irgend eines Punktes p des Raumes ξ', η', ζ' diejenigen des transformirten Punktes p', während

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und übrigens durch $z_0', z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$, nach Hermite's Bezeichnung, die conjugirten Grössen von $z', z, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ dargestellt werden.

Unter Berücksichtigung der Identität:

$$\begin{aligned} &(\varrho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0)(\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0) - \\ -&(\varrho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0)(\varrho^2\gamma\alpha_0 + z\delta\alpha_0 + z_0\gamma\beta_0 + \delta\beta_0) = \\ =& \begin{vmatrix} \varrho^2 & z \\ z_0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \gamma_0 & \delta_0 \end{vmatrix} = \varrho^2 - zz_0 = \zeta^2, \end{aligned}$$

bilden wir aus (2) den Ausdruck

$$\zeta'^2 = \varrho'^2 - z'z_0';$$

dann finden wir durch Wurzelausziehen

$$(2^*)\qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\varrho^2\gamma\gamma_0 + 2\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Betrachten wir nun die Substitution $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ als der Gruppe G des § 1 angehörig, so werden wir zwei Punkte p, p' des oberen Raumes*) als *äquivalent* bezeichnen, wenn, durch eine Substitution

*) Wir bezeichnen als oberen Raum denjenigen für welchen die Ordinate ζ positiv ausfällt.

von G, p in p' übergeht. Da unsere Gruppe G keine unendlich kleine Substitution enthält, so wird sie in der Nähe jedes Punktes des oberen Raumes *eigentlich discontinuirlich* sein*). Daher ist es möglich, ein *Fundamentalpolyeder* für unsere Gruppe G anzugeben.

§ 3.

Das Fundamentalpolyeder der Gruppe G. Erster Theil des Beweises.

Wir behaupten:

Derjenige Theil des oberen Raumes, welcher ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

zwischen den vier Ebenen

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}$$

eingeschlossen wird, ist ein Fundamentalpolyeder P *für die Gruppe G.*

Der Beweis zerfällt in zwei Theile. Erstens haben wir zu zeigen:

III) *Jeder Punkt p des oberen Raumes ist einem Punkte des Polyeders P äquivalent.*

Beachten wir nun, dass die elementaren Substitutionen T, S, V der Gruppe G, nach Formeln (2), folgende Transformationen des Raumes hervorrufen

$$\begin{array}{llll} T) & \xi' = -\dfrac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, & \eta' = \dfrac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, & \zeta' = \dfrac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \\ S) & \xi' = \xi + 1, & \eta' = \eta, & \zeta' = \zeta, \\ V) & \xi' = \xi, & \eta' = \eta + 1, & \zeta' = \zeta, \end{array}$$

während durch die Substitution $U = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & -i \end{pmatrix}$ die Umklappung

$$\xi' = -\xi, \quad \eta' = -\eta, \quad \zeta' = \zeta$$

um die ζ-Axe entsteht, so sehen wir, dass Satz III) mit folgender Behauptung übereinstimmt:

Zu jedem Punkte p giebt es einen äquivalenten Punkt, dessen Coordinaten den Ungleichungen

$$a) \qquad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2},$$

$$b) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1$$

genügen.

Der Beweis kann in ganz analoger Weise wie der entsprechende für die Modulgruppe geführt werden. Genügt der Punkt p den Un-

---

*) Poincaré a. a. O. S. 60.

gleichungen a) nicht, so verschieben wir ihn durch wiederholte Anwendung der Substitutionen S und V in eine Lage p_1, welche dem entspricht, für welche also

$$-\frac{1}{2} \leq \xi_1 \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta_1 \leq \frac{1}{2}.$$

Wenn gleichzeitig $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 \geq 1$, so ist p_1 der gesuchte Punkt. Wo nicht, wenden wir auf p_1 die Operation T an, welche p_1 n $p_1' \equiv (\xi_1' \eta_1' \zeta_1')$ überführt und verschieben, wenn es nöthig sein sollte, p_1' mittelst S und V, wieder in eine solche Lage $p_2 \equiv (\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$, welche den Ungleichungen a)

$$-\frac{1}{2} \leq \xi_2 \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta_2 \leq \frac{1}{2}$$

genügt. Aus p_2, wenn er nicht schon der zweiten Ungleichung b) genügt, leiten wir durch Wiederholung desselben alternirenden Verfahrens einen neuen Punkt p_2 u. s. w.

Dann erhält man eine Reihe von Punkten

$$c) \qquad p_1 \; p_2 \; p_3 \cdots p_n \cdots,$$

welche alle den Ungleichungen a) genügen und unsere Behauptung geht dann dahin, dass man, nach einer endlichen Anzahl von Schritten, zu einem Punkte p_n gelangen muss, für welchen auch die Bedingung b) erfüllt wird. Die Ordinaten

$$\zeta_1 \; \zeta_2 \; \zeta_3 \cdots \zeta_n \cdots$$

der äquivalenten Punkte c) nehmen in der That immer zu. Enthielte also die Reihe c) unendlich viele Punkte, so würden sie alle im endlichen Raume

$$\zeta \geq \zeta_1, \quad -\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq \eta \leq \frac{1}{2},$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < 1$$

verdichtet sein und es würde also wenigstens ein Grenzpunkt existiren, in dessen Umgebung die Gruppe G uneigentlich discontinuirlich wäre, was nicht angeht.*)

Somit ist unser Satz III) bewiesen.

§ 4.

Zweiter Theil des Beweises.

Unsere frühere Behauptung erfordert jetzt den Beweis des zweiten Satzes:

IV) *Im Inneren des Polyeders* P *können nicht zwei äquivalente Punkte liegen.*

*) Der letzte Theil des Beweises könnte auch *rein arithmetisch* geführt werden, was wir hier, der Kürze wegen, unterlassen. Man vergleiche Klein's Vorlesungen S. 212 ff.

Sind

$$p \equiv (\xi\, \eta\, \zeta), \quad p' \equiv (\xi'\, \eta'\, \zeta')$$

zwei solche innere Punkte des Polyeders, so werden folgende Ungleichungen bestehen:

$$(4) \quad \begin{cases} 0 < \xi < \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1, \\ 0 < \xi' < \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} < \eta' < \frac{1}{2}, \quad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 > 1. \end{cases}$$

Da die Ordinaten von p, p' entweder gleich sind, oder die eine grösser als die andere ist, so können wir, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit,

$$\zeta' \geq \zeta$$

voraussetzen.

Es sei nun $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ die Substitution von G, welche p in p' überführt. Bringt man jetzt Formel (1*) § 2 in Anwendung, so hat man

$$(5) \qquad \frac{1}{\zeta\zeta'} = \frac{\rho^2}{\zeta^2}\gamma\gamma_0 + \frac{z}{\zeta^2}\gamma\delta_0 + \frac{z_0}{\zeta^2}\delta\gamma_0 + \frac{\delta\delta_0}{\zeta^2}$$

oder

$$(5^*) \qquad \frac{1}{\zeta\zeta'} = \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Da alle inneren Punkte des Polyeders P eine Ordinate haben, die grösser als $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so besteht die Ungleichung

$$\frac{1}{\zeta\zeta'} \leq \frac{1}{\zeta^2} < 2,$$

oder

$$2 > \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Diese letzte lässt nur zwei Möglichkeiten zu, d. h.

$$\text{A)}\ \gamma\gamma_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \text{B)}\ \gamma\gamma_0 = 1.$$

Im Falle A) wird $\gamma = \gamma_0 = 0$ und folglich, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

entweder $\qquad \alpha = 1, \quad \delta = 1, \quad \gamma = 0$

oder $\qquad \alpha = i, \quad \delta = -i, \quad \gamma = 0.$

Es wird also

$$\xi' + i\eta' = \xi + i\eta + \beta$$

oder

$$\xi' + i\eta' = -(\xi + i\eta) + i\beta.$$

Aus den Ungleichungen (4) schliesst man dass $\beta = 0$, woraus der zweite Fall von selbst als unmöglich wegfällt; so kommt

$$\xi' = \xi, \quad \eta' = \eta, \quad \zeta' = \zeta,$$

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Die beiden Punkte p, p' fallen also zusammen und die angenommene Substitution reducirt sich auf die Identität.

Im zweiten Falle B), da

$$\frac{\varrho^2}{\zeta^2} > \frac{1}{\zeta^2} \geq \frac{1}{\zeta\zeta'},$$

folgt aus der Gleichung (5)

$$z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0 < 0,$$

oder, indem man

$$\frac{\delta}{\gamma} = p + iq, \quad z = \xi + i\eta$$

setzt,

$$p^2 + q^2 + 2p\xi + 2q\eta < 0.$$

Diese letzte Ungleichung ist aber unmöglich weil p, q ganze, reelle Zahlen sind, während

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2}.$$

Wir haben somit den Satz IV. bewiesen und ausserdem das Resultat gewonnen:

V) *Ausser der Identität giebt es keine Substitution, die einen inneren Punkt des Fundamentalpolyeders* P *festhält.*

§ 5.

Raumeintheilung, welche der Gruppe G entspricht.

Transformiren wir das ganze Polyeder P durch eine beliebige Substitution der Gruppe G, so erhalten wir ein neues Polyeder, dessen fünf Flächenseiten aus Theilen von Kugeln oder Ebenen bestehen, welche die $\xi\eta$-Ebene orthogonal schneiden. Der letzte Satz V zeigt, dass die Gesammtheit solcher aus P entstandenen Polyeder den ganzen oberen Raum einfach und lückenlos erfüllen. In beliebiger Annäherung der $\xi\eta$-Ebene legen sich unsere Polyeder kleiner und kleiner werdend immer dichter an diese Ebene an. Diese Raumeintheilung, auf welche wir übrigens nicht näher einzugehen brauchen, werden wir als der Gruppe G zugehörig bezeichnen.

Wir wollen noch bemerken, dass die Entwickelungen des § 4 einen neuen Beweis für die Zusammensetzung der Gruppe G aus T, S, V liefern. Ist nämlich Σ eine beliebige Substitution von G, und wenden wir deren inverse Σ^{-1} auf einen beliebigen *inneren* Punkt p des Polyeders P an, so wird er in eine neue Lage p' übergehen. Diesen letzten Punkt p' können wir wieder in p überführen, sowohl durch die Substitution Σ wie auch durch eine Substitution Σ', welche aus T, S, V zusammengesetzt ist (§ 3). Nach Satz V stimmt aber nothwendig Σ' mit Σ überein.

§ 6.

Raumeintheilung, welche der Gruppe G' entspricht.

In der $\xi\eta$-Ebene construiren wir das reguläre Sechseck, dessen Mittelpunkt in $\xi = 0$, $\eta = 0$ fällt, während ein Paar gegenüberliegender Seiten auf den Geraden

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}$$

liegen*). Betrachten wir nun das gerade Prisma, welches dieses Sechseck zur Grundfläche hat; denjenigen Theil des oberen Prisma's, welcher ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

liegt, bezeichnen wir als Polyeder Π. Dieses wird gerade das Dreifache des *Fundamentalpolyeders* für unsere Gruppe G' sein.

Wir beweisen den Satz:

Jeder Punkt p des oberen Raumes ist einem Punkte von Π, in Bezug auf die Gruppe G', äquivalent.

Durch Anwendung einer aus

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

passend zusammengesetzten Substitution

$$S^m V^n = \begin{pmatrix} 1, & m + n\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

können wir es erreichen, dass der transformirte Punkt p_1 innerhalb des Prisma's sich befindet. Liegt nun gleichzeitig p_1 ausserhalb der Kugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

so ist unser Zweck erreicht. Wo nicht, wende man auf p_1 die Substitution

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

---

*) Die Gleichungen der Seiten des Sechsecks lauten:

$$\xi \pm \frac{1}{2} = 0, \quad \xi + \eta\sqrt{3} \pm 1 = 0, \quad -\xi + \eta\sqrt{3} \pm 1 = 0.$$

Soll also ein Punkt der $\xi\eta$-Ebene im Inneren des Sechsecks gelegen sein und wird

$$z = \xi + i\eta = a + b\varepsilon$$

gesetzt, also

$$\xi = a - \frac{b}{2}, \quad \eta = b\frac{\sqrt{3}}{2},$$

so müssen folgende Ungleichungen bestehen

$$-1 < a + b < 1, \quad -1 < 2a - b < 1, \quad -1 < 2b - a < 1.$$

an, und den so erhaltenen Punkt p_1' verschiebe man wieder mittelst einer passenden Substitution $S^{m'} V^{n'}$ in einen Punkt p_2, der im Inneren des Prisma's liegt. Fährt man in derselben Weise fort, so sieht man, genau wie im § 3, dass die Reihe von äquivalenten Punkten

$$p_1 \; p_2 \; \dots \; p_n \; \dots$$

sich nothwendig unterbrechen muss, was eben unseren Satz beweist.

Bedenkt man ferner dass die Substitution

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad z' = \varepsilon z$$

eine Rotation der Amplitude $\frac{2\pi}{3}$ um die ζ-Axe zur Folge hat, so leuchtet es ein, dass es für jeden Punkt p von Π noch zwei äquivalente Punkte p', p'' in Π giebt, nämlich diejenigen, welche aus p durch die genannte Rotation und ihre Wiederholung erwachsen. Es ist nun leicht zu beweisen dass, wenn p *im Inneren* von Π gelegen ist, keine anderen zu p äquivalente Punkte in Π existiren können als p' und p''.

Nehmen wir die Bezeichnungen des § 4 wieder auf und bemerken, dass jeder *innere* Punkt des Polyeders Π eine Ordinate besitzt, die grösser als $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ausfällt, so schliessen wir aus Gleichung (5) § 4, dass folgende Ungleichung bestehen muss:

$$\frac{3}{2} > \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0).$$

Diese enthält nur wieder folgende beiden Möglichkeiten

$$\gamma\gamma_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma\gamma_0 = 1.$$

Wenn $\gamma = \gamma_0 = 0$ ist, so hat man folgende drei Nebenfälle

$$\begin{array}{llll} \alpha = 1, & \gamma = 0, & \delta = 1, & z' = z + \beta, \\ \alpha = \varepsilon, & \gamma = 0, & \delta = \varepsilon^2, & z' = \varepsilon^2 z + \varepsilon\beta, \\ \alpha = \varepsilon^2, & \gamma = 0, & \delta = \varepsilon, & z' = \varepsilon z + \varepsilon^2\beta. \end{array}$$

Da aber beide Punkte z', z im Inneren des Sechsecks liegen müssen, so wird in allen Fällen $\beta = 0$ sein und unsere Substitution wird also lauten:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^2, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{pmatrix},$$

wie die Behauptung des Satzes es fordert.

Wenn $\gamma\gamma_0 = 1$ ist, so hat man nach Formel (5) § 4

$$\frac{\varrho^2}{\zeta^2} > \frac{1}{\zeta\zeta'} = \frac{\varrho^2}{\zeta^2} + \frac{1}{\zeta^2}(z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0)$$

und folglich, wenn

$$z = a + b\varepsilon, \quad \frac{\delta}{\gamma} = p + q\varepsilon$$

gesetzt wird,

(6) $$p^2 + q^2 - pq + (2a-b)p + (2b-a)q < 0.$$

Da aber, wie oben bemerkt wurde, die absoluten Werthe von $2a - b$, $2b - a$ kleiner als 1 ausfallen, so wird um so mehr folgende Ungleichung bestehen müssen

$$p_1^2 + q_1^2 - p_1 q_1 - p_1 - q_1 < 0,$$

wo p_1, q_1 die absolut genommenen Werthe der reellen ganzen Zahlen p, q bedeuten. Die letzte Ungleichung findet nur für $p_1 = 1$, $q_1 = 1$ statt und wir haben also nur folgende vier möglichen Fälle:

$$p = 1, q = 1;\ p = 1, q = -1;\ p = -1, q = 1;\ p = -1, q = -1.$$

Immer aber wiederspricht die bezügliche Ungleichung (6) denjenigen, durch welche wir oben die Bedingung ausdrückten, dass z im Inneren des Sechsecks liegt. Somit wird die Möglichkeit $\gamma\gamma_0 = 1$ ausgeschlossen.

Nach diesen Erörterungen ist es sehr leicht, ein Fundamentalpolyeder unserer Gruppe G' anzugeben. Das frühere Polyeder Π wird durch die Ebene $\eta = 0$ und die beiden daraus durch Rotationen von Amplituden $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$ um die φ-Axe entspringenden Ebenen in drei congruente Polyeder zerlegt. Man sieht also dass: *Jedes dieser drei Polyeder als Fundamentalpolyeder der Gruppe G' gewählt werden kann.*

Jetzt haben wir nur das zu wiederholen, was am Ende des vorigen Paragraphen gesagt wurde, um die Raumeintheilung zu finden, welche der Gruppe G' entspricht.

II. Abschnitt.

Dirichlet'sche Formen.

§ 7.

Reducirte Dirichlet'sche Formen.

Eine binäre quadratische Form

(7) $$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

in welcher die Coefficienten a, b, c ganze Zahlen aus dem Bereiche $(1, i)$ — oder $(1, \varepsilon)$ — und x, y solche unbestimmte Zahlen darstellen, soll als Dirichlet'sche *Form* bezeichnet werden.*) Wir wollen nun

*) Dirichlet, Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. Crelle's Journal Bd. 24.

zeigen, wie man, auf Grund der Untersuchungen des vorigen Abschnittes die beiden Probleme der Aequivalenz für Dirichlet'sche Formen lösen kann. Diese Probleme lauten folgendermassen:

A) *Festzustellen, ob zwei gegebene Dirichlet'sche Formen f, f' mit derselben Determinante $D = b^2 - ac$ äquivalent sind oder nicht.*

B) *Im Falle der Aequivalenz der Formen f, f' alle Substitutionen zu finden, durch welche die eine in die andere übergeht.*

Als Wurzel der Form (7) bezeichnen wir die Wurzeln z_1, z_2 der quadratischen Gleichung

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Durch die beiden Punkte, welche in der $\xi\eta$-Ebene die Wurzeln z_1, z_2 der Form f darstellen, beschreibe man im oberen Raume den Halbkreis, welcher die $\xi\eta$-Ebene orthogonal schneidet. Dieser Halbkreis soll *der repräsentirende Halbkreis* der Form f genannt werden. Jede Form $f = (a, b, c)$ wird durch Angebung ihrer Determinante und des repräsentirenden Halbkreises, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel ihrer Coefficienten a, b, c, bestimmt. Sind die Formen f, f' mit den repräsentirenden Halbkreisen C, C' äquivalent, und geht die Erstere durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ in die Zweite über, so transformirt die inverse Substitution $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$ die beiden Wurzeln von f in diejenigen von f'. Durch die letzte Substitution auf den ganzen Raum angewandt, geht also der repräsentirende Halbkreis C in C' über.

Stellen wir nun folgende Definition auf:

Eine Dirichlet'sche Form heisst reducirt, falls ihr repräsentirender Halbkreis das Fundamentalpolyeder P schneidet,

so können wir sofort den Satz beweisen:

Jede Dirichlet'sche Form f ist einer reducirten Form äquivalent.

Nehmen wir nämlich auf dem repräsentirenden Halbkreis C von f einen beliebigen Punkt p, so können wir eine passende Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ angeben, welche ihn in das Fundamentalpolyeder versetzt (§ 3). Nach dem Vorigen führt also die inverse Substitution $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$, auf die Form f angewandt, auf eine äquivalente reducirte Form f'.

§ 8.

Anzahl der reducirten Formen.

Wir behaupten jetzt: *Bei einer gegebenen Determinante D giebt es nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen.*

Ist

$$F = (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

eine solche, und sind $z_1\, z_2$ ihre Wurzeln, so hat man für den Radius R des repräsentirenden Halbkreises

$$R = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{\sqrt{|D|}}{|a|}\ ^{*)}.$$

Da die grösste Ordinate λ_1 eines Punktes des Kreises gleich R, während die kleinste Ordinate eines Punktes des Fundamentalpolyeders gleich $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so folgt

$$\frac{\sqrt{|D|}}{|a|} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

oder

$$|a| \leq \sqrt{2|D|}.$$

Der erste Coefficient a der reducirten Form f kann also nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen. Für jeden solchen Werth von a giebt es nur eine endliche Anzahl von (mod a) incongruenten Werthen von b, nämlich so viele als die Congruenz

$$b^2 \equiv D \pmod{a}$$

incongruente Wurzeln hat. Bezeichnen wir zwei Formen

$$(a, b, c) \quad (a, b', c')$$

mit derselben Determinante und gemeinsamen ersten Coefficient a als *parallel*, wenn

$$b' \equiv b \pmod{a},$$

so haben wir nur zu zeigen, dass in jeder Classe von parallelen Formen nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen vorkommen kann. Ist die zu (a, b, c) parallele Form (a, b', c') eine reducirte und wird

$$b' = b + a\beta$$

gesetzt, so geht durch die Substitution $\begin{pmatrix}1, & \beta \\ 0, & 1\end{pmatrix}$ die erste (a, b, c) in die zweite (a, b', c') über, und folglich der repräsentirende Halbkreis C' von f' in denjenigen C von f über. Und da nach Voraussetzung C' das Fundamentalpolyeder P schneidet, so wird C dasjenige Polyeder P' unserer Raumeintheilung schneiden, welches aus P durch die Substitution

$$z' = z + \beta$$

entsteht. Es giebt also so viele zu (a, b, c) parallele reducirte Formen als es zum Fundamentalpolyeder P in gewöhnlichem Sinne congruente

---

*) Durch das Symbol $|A|$ wird der absolute Betrag der complexen Grösse A bezeichnet.

Polyeder unserer Raumeintheilung giebt, welche vom repräsentirenden Kreise der Form (a, b, c) durchschnitten werden. Die Anzahl letzterer Polyeder ist aber, wie einleuchtend, endlich.

§ 9.

Perioden reducirter Formen.

Der repräsentirende Halbkreis C einer reducirten Form wird eine unendliche Anzahl von Polyeder unserer Raumeintheilung durchsetzen. Dadurch wird der Halbkreis C in eine im doppelten Sinne sich ins Unendliche erstreckende Reihe von Bogenstücken

$$\ldots l_{-3},\ l_{-2},\ l_{-1},\ l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots$$

zerlegt, wobei l_1 dasjenige Bogenstück bezeichnen möge, welches vom Fundamentalpolyeder P abgeschnitten wird. Ein beliebiges Bogenstück der Reihe kann durch eine Substitution der Gruppe in ein reducirtes Bogenstück verwandelt werden, d. h. in einen Kreisbogen, welcher im Fundamentalpolyeder P liegt. Solch reducirtes Bogenstück l_i' wird von l_i *eindeutig* bestimmt (§ 4). Da aber die Anzahl der reducirten Formen derselben Determinante eine endliche ist, so ergiebt sich dass in der Reihe

$$l_1,\ l_2,\ l_3, \ldots, l_n \ldots$$

ein *erstes* Bogenstück l_{n+1} auftreten muss, welches dasselbe reducirte Bogenstück besitzt wie ein früheres l_r. Es ist leicht einzusehen, dass l_r mit l_1 zusammenfallen muss. Da nämlich l_{n+1} und l_r dasselbe reducirte Bogenstück besitzen, so giebt es eine Substitution τ, welche l_r in l_{n+1} verwandelt. Durch τ gehen folglich gleichzeitig der Halbkreis C und die ganze Raumeintheilung in sich selbst über. Es wird also durch τ l_{r-1} in l_n, l_{r-2} in l_{n-1} u. s. w. übergehen. Wäre aber $r > 1$, so würde schon l_n dasselbe reducirte Bogenstück wie l_{r-1} besitzen, was unserer Annahme wiederspricht. Hieraus schliessen wir, in bekannter Weise, dass irgend zwei reducirte Bogenstücke $l_r'\ l_s'$ dann und nur dann zusammenfallen, wenn die Congruenz

$$r \equiv s \pmod n$$

besteht. Daher werden wir sagen dass

$$l_1'\ l_2' \ldots l_n'$$

eine Periode von reducirten Bogenstücken und die zugehörigen Formen

$$f_1\, f_2 \ldots f_n$$

eine *Periode reducirter Formen* bilden. Es leuchtet ein, dass zwei derselben Periode angehörende reducirte Formen äquivalent sind.

§ 10.

Erledigung der Probleme der Aequivalenz.

Wenn irgend zwei Formen F, F' derselben Determinante vorliegen, von denen man entscheiden soll, ob sie äquivalent sind oder nicht, so bestimmen wir zuerst zwei reducirte Formen f, f', welche bezw. zu F, F' äquivalent sind, und haben dann nur zu entscheiden, ob f, f' unter einander äquivalent sind. Sind aber f, f' äquivalent und geht durch die Substitution τ f in f' über, so geht durch die inverse Substitution τ^{-1} der repräsentirende Halbkreis C von f in denjenigen von f' über (§ 7). Es wird also, durch τ^{-1}, ein Bogenstück l_i der im vorigen Paragraphen betrachteten Reihe in dasjenige Stück des Halbkreises C', welches vom Fundamentalpolyeder P abgeschnitten wird, übergehen. Es gilt also der Satz: *Zwei äquivalente reducirte Formen gehören derselben Periode an*, wodurch das erste Problem der Aequivalenz erledigt wird.

Wenn F, F' äquivalent sind, wird zugleich durch unsere Methode eine Substitution gefunden, welche wirklich F in F' überführt. Das zweite Problem der Aequivalenz wird also auf folgendes zurückgeführt:

Alle Substitutionen anzugeben, welche eine Form F in sich selbst transformiren.

Wir können uns wieder selbstverständiich auf reducirte Formen beschränken. Eine Substitution τ, welche die reducirte Form f in sich selbst überführt, wird auch ihren repräsentirenden Halbkreis C in sich selbst überführen. Durch τ muss also die ganze Reihe von Bogenstücken des § 9

$$\ldots l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_1, l_2, l_3 \ldots$$

in sich verschoben werden. Geht dabei l_1 in l_s über, so wird nothwendig, wie dort gezeigt wurde, die Congruenz $s \equiv 1 \pmod{n}$ bestehen; folglich ist τ eine Potenz derjenigen Substitution Σ welche l_1 in l_{n+1} überführt.

Wir haben also das Resultat:

Die unendliche Gruppe von Substitutionen, welche eine Dirichlet'sche Form in sich selbst überführt, ist eine cyklische Gruppe.

Diese Gruppe wird nämlich alle Potenzen von Σ oder nur diejenigen mit geradem Exponenten umfassen, jenachdem die Form $f = (a, b, c)$ ihrer entgegengesetzten $(-a, -b, -c)$ nicht äquivalent oder äquivalent ist. Im zweiten Falle gehört f einer *ambigen* Classe an. (V. Dirichlet, Zahlentheorie, 3. Auflage, § 58).

Greifen wir insbesondere die Hauptform

$$(1, 0, -D)$$

heraus, so lauten die Substitutionen ihrer reproducirenden Gruppe

$$\begin{pmatrix} t, & Du \\ u, & t \end{pmatrix},$$

wobei t, u irgend welche ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichnng

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bezeichnen. Unsere Methode lehrt also die fundamentale Lösung (T, U) aufzufinden, aus welcher alle anderen mittelst der Formel:

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^n,$$

wobei n alle ganzen reellen Zahlen durchläuft, sich ergeben.*)

III. Abschnitt.

Hermite'sche Formen.

§ 11.

Definite Formen.

Die binären quadratischen Formen

$$(8) \qquad a x x_0 + b x y_0 + b_0 x_0 y + c y y_0,$$

bei welchen a, c ganze reelle Zahlen, b eine ganze Zahl aus dem Bereiche $(1, i)$ — oder $(1, \varepsilon)$ — und x, y solche unbestimmte Zahlen, während b_0, x_0, y_0 deren conjugirte Zahlen bezeichnen, werden im Folgenden *Hermite'sche Formen* genannt.**) Den fundamentalen Begriff der Transformation und Aequivalenz solcher Formen wolle man aus der Hermite'schen Abhandlung entnehmen.

Ist die Determinante $D = bb_0 - ac$ negativ, so heisst die Form *definit*, im entgegengesetzten Falle *indefinit*.

Betrachten wir zuerst den Fall einer definiten Form, bei welcher wir a und folglich c positiv annehmen können.

Die Gleichung

$$(9) \qquad a z z_0 + b z + b_0 z_0 + c = 0$$

stellt dann in der $\xi\eta$-Ebene einen *imaginären* Kreis dar. Durch diesen Kreis geht ein ganzer Büschel von Kugeln, welcher zwei unendlich kleine Kugeln oder *Grenzpunkte* enthält. Wird

$$b = m + in$$

gesetzt, so findet man für die Coordinaten der Grenzpunkte

$$\xi = -\frac{m}{a}, \quad \eta = \frac{n}{a}, \quad \zeta = \pm \frac{\sqrt{-D}}{a}.$$

Denjenigen Grenzpunkt, welcher im oberen Raume liegt, bezeichnen wir als den *repräsentirenden Punkt* der Form. Aus der geometrischen

---

*) Dirichlet a. a. O. § 14.

**) Hermite in Crelle's Journal Bd. 47.

Darstellung folgt: *Aequivalente definite Hermite'sche Formen haben äquivalente repräsentirende Punkte und umgekehrt.*

Dies kann übrigens, mittelst der Formeln (1), (2) § 2 leicht bestätigt werden.

Eine definite Form soll als *reducirt* gelten, wenn ihr repräsentirender Punkt im Fundamentalpolyeder liegt. Dann haben wir nach § 3 sofort den Satz:

Jede definite Hermite'sche Form ist einer reducirten Form äquivalent.

Das äussere Kennzeichen einer reducirten definiten Form (8) besteht in den Ungleichungen

$$a \leq c, \quad 0 \leq m \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{a}{2} \leq n \leq \frac{a}{2},$$

für $b = m + in$, woraus man folgert (Hermite a. a. O.) dass: *die Anzahl reducirter Formen derselben Determinante eine endliche ist.*

Das erste Problem der Aequivalenz für definite Formen erfordert jetzt nur noch die Untersuchung der Aequivalenz reducirter Formen. Die bezüglichen Resultate, welche in ganz elementarer Weise abzuleiten sind sollen hier aber nicht weiter verfolgt werden.*)

§ 12.

Indefinite reducirte Formen.

Eine indefinite Hermite'sche Form

$$f = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0$$

bestimmt in der $\xi\eta$-Ebene den reellen Kreis

$$azz_0 + bz + b_0z_0 + c = 0.$$

Ueber diesen Kreis als Aequator beschreiben wir im oberen Raume eine Halbkugel, deren Gleichung

$$\left(\xi + \frac{m}{a}\right)^2 + \left(\eta - \frac{n}{a}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{D}{a^2}$$

sein wird. Diese bezeichnen wir als die *repräsentirende Halbkugel* der Form f. Durch Angebung der Determinante D und der repräsentirenden Halbkugel wird die Formel f, bis auf einen gleichzeitigen Zeichenwechsel ihrer Coefficienten a, b, c, bestimmt. Sind zwei indefinite Formen f, f' äquivalent, so werden auch ihre repräsentirenden Halbkugeln äquivalent sein (V$^{\circ}$ § 7). Stellen wir nun folgende Definition auf: *eine indefinite Hermite'sche Form heisst reducirt, falls ihre repräsentirende Halbkugel das Fundamentalpolyeder durchsetzt.* In ganz analoger Weise wie die entsprechenden Sätze für Dirichlet'sche Formen (§§ 7, 8) können jetzt folgende Sätze bewiesen werden:

*) V$^{\circ}$ § 4 und Picard — Annales de l'École Normale Supérieure. T. I, 3ème Série p. 19 ff.

Jede indefinite Hermite'sche Form ist einer reducirten Form äquivalent.

Bei gegebener positiver Determinante ist die Anzahl der reducirten Hermite'schen Formen eine endliche.

§ 13.

Perioden reducirter Formen.

Die repräsentirende Halbkugel der indefiniten reducirten Hermite'schen Form f mit der Determinante D wird eine unendliche Anzahl von Polyedern unserer Raumeintheilung durchsetzen. Auf dieser Halbkugel entsteht dadurch ein Netz von Kreisbogenpolygonen, dessen Seiten den Aequator der Kugel orthogonal schneiden. Dieses Netz bedeckt einfach und lückenlos die ganze Halbkugel.

Jedes Polygon π_i des Netzes können wir *reduciren*, d. h. durch eine passende Substitution von G in ein Polygon π_i' verwandeln, dessen Randcurven auf Flächenseiten des Fundamentalpolyeders P liegen. Diesem ganz bestimmten Polygone π_i' entspricht aber eine reducirte Form der Determinante D und, nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen, giebt es also nur eine endliche Anzahl solcher verschiedener reducirter Polygone π_i', sagen wir etwa

$$\pi_1' \; \pi_2' \ldots \pi_n'.$$

Die entsprechenden reducirten Formen

$$f_1 \, f_2 \ldots f_n$$

bilden, wie wir sagen wollen, eine *Periode reducirter Formen.* Es ist klar, dass alle reducirten Formen derselben Periode unter einander äquivalent sind.

Zwei Polygone π_r, π_s unseres Netzes sollen als *äquivalent* gelten, falls sie dasselbe reducirte Polygon π_i' besitzen, weil dann und nur dann eine Substitution der Gruppe G existirt, welche π_r in π_s überführt. Wenden wir eine solche Substitution auf den ganzen Raum an, so wird das sphärische Netz in sich selbst übergehen. Unser Resultat können wir also auch so aussprechen: *Es giebt im sphärischen Netze nur eine endliche Anzahl von unäquivalenten Polygonen.*

Wird diese Zahl μ genannt, so erkennt man in bekannter Weise*), dass es möglich ist einen solchen Complex Π von $r \leq \mu$ auf einander folgenden unäquivalenten Polygonen des Netzes zu bilden, dass jedes nach aussen benachbarte Polygon π_i mit einem im Complexe Π liegenden Polygon äquivalent ist.

*) V^e^ Klein's Vorlesungen S^e^ 310 und Hurwitz Grundlage einer Theorie der Modulfunctionen § 3.

Nun bemerken wir, dass wenn ein Polygon π_m des Netzes mit einem im Complex Π liegenden Polygone $\pi^{(i)}$ äquivalent ist, dasselbe von jedem zu π_m benachbarten Polygone gelten muss. Denn dieselbe Substitution, welche π_m in $\pi^{(i)}$ überführt, wird jedes zu π_m benachbarte Polygon in ein zu $\pi^{(i)}$ benachbartes Polygon verwandeln: das Letzte ist aber, nach Voraussetzung, einem Polygon in Π äquivalent. Daraus ersieht man leicht, dass jedes Polygon π_m des Netzes einem im Complex Π liegenden Polygone äquivalent ist und daher $r = \mu$ sein muss. Wir brauchen nämlich nur zwischen π_m und einem beliebigen Polygon in Π eine endliche Anzahl von successiven auf einander folgenden Polygonen einzuschieben und die vorige Bemerkung anzuwenden.

Werden die Polygone von Π mit

$$\pi^{(1)}\ \pi^{(2)} \dots \pi^{(\mu)}$$

bezeichnet, so wird jedes dem Complex Π nach aussen benachbarte Polygon π_i einem Polygon $\pi^{(k)}$ äquivalent sein. Dieses muss aber hart am Rande von Π liegen, denn sonst würde die Substitution, welche π_i in $\pi^{(k)}$ überführt, das Polygon von Π, welches auf π_i folgt, wieder in ein Polygon von Π verwandeln, was dem Bildungsgesetze unseres Complexes Π widerspricht. Daher werden die Randcurven von Π paarweise einander zugewiesen und die Substitutionen

$$S_1\ S_2 \dots S_\mu,$$

welche jede Randcurve in die ihr zugewiesene überführen, sind die erzeugenden Substitutionen derjenigen Untergruppe von G, welche unser Netz in sich selbst transformirt. Diese Untergruppe fällt mit der Gruppe zusammen, welche die gegebene Form f in sich selbst überführt, oder sie enthält die letzte Gruppe als ausgezeichnete Untergruppe vom Index zwei. Der zweite Fall tritt dann und nur dann ein, wenn die gegebene Form $f = (a, b, c)$ ihrer entgegengesetzten $(-a, -b, -c)$ äquivalent ist, was eben durch unsere Methode leicht erkannt wird. Wir erhalten also folgendes Schlussresultat: *Die reproducirende Gruppe einer indefiniten Hermite'schen Form ist eine automorphe*) Gruppe. Das Polygon Π, welches wir oben bildeten, ist eben das Fundamentalpolygon dieser Gruppe oder nur die Hälfte des letzten.***)

---

*) Mit dieser Benennung soll nach Herrn Klein (Vorlesungen etc. p. 762), gemeint werden, dass, wenn die Substitutionen $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$ der Gruppe auf eine complexe Variabele z nach der Formel $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ wirken, eine discontinuirliche Gruppe mit endlichem Fundamentalbereiche entsteht.

**) Ist die Determinante D in die Summe zweier Quadrate zerlegbar, so kann diese Gruppe auf eine Moduluntergruppe zurückgeführt werden (V^e meine Note in den Rendiconti dell' Accademia dei Lincei Maggio 1890).

§ 14.

Erledigung der beiden Probleme der Aequivalenz für Hermite'sche Formen.

Das erste Problem der Aequivalenz für Hermite'sche Formen wird nach § 12 darauf zurückgeführt, die Aequivalenz reducirter Formen zu untersuchen. Diese Frage können wir sofort durch den Satz beantworten:

Zwei reducirte äquivalente Hermite'sche Formen gehören derselben Periode an.

Nehmen wir an, dass die beiden indefiniten reducirten Formen f_1, f_2 äquivalent seien, so wird es eine Substitution der Gruppe G geben, welche die repräsentirende Halbkugel von f_1 in diejenige von f_2 verwandelt und folglich das Netz, mit welchem wir die Halbkugel von f_1 bedeckten, in dasjenige von f_2 überführt. Das Polygon des Netzes von f_2, welches im Fundamentalpolyeder P liegt, ist also mit einem Polygone des Netzes von f_1 äquivalent: folglich gehört f_2 der Periode von f_1 an.

Mit der Erledigung des ersten Problems der Aequivalenz, wird das Zweite auf die Auffindung der reproducirenden Gruppe einer indefiniten Hermite'schen Form reducirt. Die Lösung dieser Aufgabe enthält der vorige Paragraph.

Zum Schlusse sei nur noch bemerkt, dass sowohl für Dirichlet'sche wie für Hermite'sche Formen im Bereiche $(1, \varepsilon)$ dieselben Beweise Wort für Wort übertragbar sind. Es genügt dafür die Raumeintheilung des § 6 zu Grunde zu legen.

Ueber constructive Probleme aus der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen 2^{ter} Ordnung.

Von

Franz London in Breslau.

In den vorliegenden Untersuchungen sollen gewisse abhängige Punktsysteme, welche bei der Theorie der reciproken Verwandtschaft und der Flächen zweiter Ordnung ein Rolle spielen, näher betrachtet werden, indem wir den analytischen Ausdruck für die geometrische Abhängigkeit jener Systeme in die Form gewisser linearer Identitäten kleiden, welche vermöge ihrer anschaulichen geometrischen Interpretirbarkeit wohl geeignet sind, den Ausgangspunkt für die Behandlung jener Punktsysteme zu bilden. Auf diesem Wege gelangen wir zu Eigenschaften, welche einen neuen und, wie mir scheint, ganz besonders einfachen Eingang eröffnen zu der Lösung der fundamentalen Constructionsaufgaben, welche sich bei der Erzeugung der reciproken und quadratischen Verwandtschaft, sowie der Flächen 2^{ter} Ordnung und der Raumcurven 4^{ter} Ordnung erster Art bieten*). Zu diesem Zwecke war es nöthig, zuvor einige Hülfsaufgaben über die Construction der reciproken Verwandtschaft zu behandeln und die Fünfecke, welche ein polares System einer Reciprocität bilden, kurz zu untersuchen. Mit diesen Hülfsmitteln, die an und für sich nicht ohne Interesse für das Studium der Reciprocität sein dürften, gelingt es die wichtigen Probleme der Construction der quadratischen Verwandtschaft aus 7 entsprechenden Punktepaaren, sowie der Reciprocität aus 8 ihrer Nullpaare, welche bisher in ziemlich umständlicher Weise und mit grossem Aufwand von Constructionsarbeit behandelt sind, in verhältnissmässig einfacher und übersichtlicher Weise zu lösen. Sodann werden die gemeinsamen Nullpaare dreier Reciprocitäten aus 6 gegebenen von ihnen construirt, eine Aufgabe, welche aus dem Grunde von Bedeutung erscheint, weil die Erzeugung der Raumcurven 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Art

*) Ein analoger Weg wurde in der Arbeit über die Construction des 9^{ten} Schnittpunktes zweier C^3 (Math. Ann. Bd. 36, p. 585), und besonders in Paul Serret: Géométrie de direction, Paris 1869 beschritten.

aus 8 ihrer Punkte auf einen speciellen Fall dieses Problems sich reduciren lässt, ebenso wie die Erzeugung der Flächen 2^{ter} Ordnung aus 9 gegebenen Punkten mit einen speciellen Fall des soeben berührten Problems der Erzeugung der quadratischen Verwandtschaft aus 7 entsprechenden Punktepaaren identisch ist. Auf diese Weise führen uns die obigen Aufgaben über reciproke und quadratische Verwandtschaft zur Erzeugung der Flächen 2^{ter} Ordnung und Raumcurven 4^{ter} Ordnung aus 9 resp. 8 ihrer Punkte. Eine andere, ganz besonders einfache Erzeugung dieser räumlichen Gebilde aus einer hinreichenden Anzahl von Punkten ergiebt sich aber aus der directen Behandlung der linearen Identitäten, welche zwischen den Quadraten der linearen Formen bestehen, welche die linken Seiten der Gleichungen von 9 Punkten einer Fläche 2^{ter} Ordnung oder von 8 Punkten einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung bilden. Den Abschluss bildet eine neue Lösung des viel behandelten Problems der linearen Construction des 8^{ten} Schnittpunktes dreier Flächen 2^{ter} Ordnung, welche vielleicht deshalb einiges Interesse verdient, als sich der ganze Constructionsvorgang auf einer einzigen Geraden abspielt und nur verlangt, in je einer auf dieser Geraden gegebenen Projectivität und Involution zu 2 resp. 3 gegebenen Punkten die entsprechenden zu construiren.

Die benutzte Darstellungs- und Bezeichnungsweise der bei der reciproken Verwandtschaft auftretenden Gebilde schliesst sich an die von Herrn Rosanes*) bei Behandlung dieses Gegenstandes gewählte vollkommen an.

Sämmtliche Constructionen sind, soweit es sich um Aufgaben mit nur einer Lösung handelt, allein mit Hülfe des Lineals ausführbar und bedürfen nur der einfachen Hülfsaufgabe: In einer durch 3 entsprechende Elementenpaare gegebenen projectiven Beziehung zu einem vierten Elemente das entsprechende zu construiren.

§ 1.

Die allgemeinsten linearen Bestimmungsstücke einer reciproken Verwandtschaft.

Sind x_1, x_2, x_3 die homogenen Coordinaten eines Punktes x der Ebene X und y_1, y_2, y_3 die eines Punktes y einer anderen Ebene Y, so werden beide Ebenen durch die bilineare Gleichung:

$$f(x, y) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

in reciproke Beziehung gesetzt, indem jedem Punkte x^i der Ebene X

*) Vgl. Crelle's Journal: Bd. 88, 90, 95, 100.

die Gerade $f(x', y) = 0$ der Ebene Y, seine *Polare* entspricht. Ebenso vermittelt eine bilineare Gleichung:

$$\varphi(u, v) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} u_i v_k = 0$$

zwischen den Liniencoordinaten u_1, u_2, u_3 einer Geraden u der X-Ebene und den Liniencoordinaten v_1, v_2, v_3 einer Geraden v der Y-Ebene eine reciproke Verwandtschaft der beiden Ebenen, so dass wir eine solche sowohl durch bilineare Formen zwischen Punkt-, als auch zwischen Liniencoordinaten werden ausdrücken können. Die durch $f(x, y) = 0$, $\varphi(u, v) = 0$ dargestellten Reciprocitäten werden identisch, wenn $\varphi(u, v)$ die adjungirte Form von $f(x, y)$ ist, d. h. wofern α_{ik} die dem Elemente a_{ik} adjungirte Subdeterminante in der Determinante $|a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, 3)$ bedeutet*). —

Eine bilineare Form $f(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k$, deren Determinante $|a_{ik}|$ verschwindet, lässt sich als Summe von zwei Producten linearer Formen darstellen. Denn setzen wir:

$$f_k(x) = \sum_1^3{}_i\, a_{ik} x_i \qquad (k = 1, 2, 3),$$

so ist:

$$f(x, y) = y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x) + y_3 f_3(x).$$

Da die Determinante $|a_{ik}|$ der drei linearen Formen $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ verschwindet, so befinden sich $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ in linearer Abhängigkeit, also ist:

$$f_3(x) = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x),$$

und mithin

$$f(x, y) = f_1(x)\{y_1 + k_1 y_3\} + f_2(x)\{y_2 + k_2 y_3\},$$

so dass in der That $f(x, y)$, unter der Voraussetzung $|a_{ik}| = 0$, als Summe von zwei Producten linearer Formen dargestellt ist. Andererseits ist offenbar für jede bilineare Form von der Form:

$$f(x, y) = k_1\, a_1(x) b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y),$$
$$\big(a_1(x) = a_1{}^1 x_1 + a_2{}^1 x_2 + a_3{}^1 x_3, \text{ etc.}\big)$$

die Determinante Null, *so dass das Verschwinden der Determinante* $|a_{ik}|$ *die nothwendige und hinreichende Bedingung ist für die Darstellbarkeit der bilinearen Form* $f(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k$ *als Summe von zwei Producten linearer Formen.* Eine bilineare Form mit verschwindender Determinante nennen wir aus diesem Grunde eine *zweitheilige Form.* Aus der Gestalt:

*) Cf. Rosanes, Cr. J. Bd. 90, p. 305.

$$f(x, y) = k_1 a_1(x)\, b_1(y) + k_2 a_2(x)\, b_2(y),$$
$$\left(a_1(x) = a_1{}^1 x_1 + a_2{}^1 x_2 + a_3{}^1 x_3\right)$$
$$\text{etc.},$$

in welche man jede bilineare Form mit verschwindender Determinante überführen kann, ergiebt sich unmittelbar die specielle Beschaffenheit der zugehörigen Reciprocität. Nennen wir a^{12} den Schnittpunkt der beiden Geraden a^1, a^2, deren Gleichungen $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = 0$ sind, und analog b^{12} den Schnittpunkt von $b_1(x) = 0$, $b_2(x) = 0$, so geht die Polare jedes von a^{12} verschiedenen Punktes der X-Ebene durch b^{12}, während die Polare von a^{12} selbst völlig unbestimmt wird, also jede Gerade der Y-Ebene als solche betrachtet werden kann. Alle Punkte x, welche auf demselben Strahle durch a^{12} liegen, haben dieselbe Polare. Jeder Geraden u durch a^{12} entspricht somit eine Gerade v durch b^{12}, die Polare der auf u gelegenen Punkte. Alle derartigen Geradenpaare u, v bilden entsprechende Geradenpaare zweier projectiven Strahlenbüschel. Der Geraden a^1 entspricht in dieser projectivischen Zuordnung die Gerade b^2, der Geraden a^2 die Gerade b^1. Sind c^1, d^2 und c^2, d^1 irgend zwei entsprechende Strahlenpaare dieser Projectivität, und:

$$c_1(x) = 0, \quad d_1(x) = 0; \quad c_2(x) = 0, \quad d_2(x) = 0$$

ihre resp. Gleichungen, so lässt sich $f(x, y)$ auch in folgender Weise als Summe zweier Producte linearer Formen darstellen:

$$f(x, y) = t_1 c_1(x) d_1(y) + t_2 c_2(x) d_2(y),$$

so dass man erkennt, dass irgend zwei entsprechende Strahlenpaare c^1, d^2 und c^2, d^1 die Strahlenpaare a^1, b^2 und a^2, b^1 in der Darstellung:

$$f(x, y) = k_1 a_1(x)\, b_1(y) + k_2 a_2(x)\, b_2(y)$$

ersetzen können. Ist die Projectivität, durch welche die beiden Büschel a^{12}, b^{12} verbunden sind, bekannt, so kann man in der Reciprocität $f(x, y) = 0$ sofort zu jedem Punkte x die Polare finden, indem man in jener Projectivität zu $a^{12}x$ die entsprechende Gerade sucht. Eine zweitheilige bilineare Form stellt uns daher keine eigentliche Reciprocität dar, sondern eine specielle, welche uns vollständig bekannt ist, wenn uns die projective Zuordnung der Strahlenbüschel a^{12}, b^{12} gegeben ist. Jene Projectivität ist also das einzig *wesentliche*, was uns durch die bilineare Form gegeben wird, so dass wir den Ausdruck gebrauchen wollen: *Jede bilineare, zweitheilige Form:*

$$k_1 a_1(x)\, b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y)$$

stellt uns eine bestimmte Projectivität der beiden Strahlenbüschel a^{12}, b^{12} *dar, von welcher auch* a^1, b^2 *und* a^2, b^1 *entsprechende Strahlenpaare sind.*

Sind in der Determinante $|a_{ik}|$ der bilinearen Form

$$f(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k$$

alle Subdeterminanten zweiten Grades Null, so wird:

$$f_1(x) = kf_2(x) = tf_3(x),$$

so dass die bilineare Form $f(x, y)$ in das Product zweier linearen Formen $a(x)\,b(y)$ zerfällt. In der zugehörigen Reciprocität entspricht jedem nicht auf $a(x) = 0$ gelegenen Punkte die Gerade $b(y) = 0$ als Polare, während die Polaren von Punkten x der Geraden $a(x) = 0$ völlig unbestimmt werden. Eine solche bilineare Form soll eine „specielle"*) genannt werden, ebenso soll die zugehörige Reciprocität eine „specielle Reciprocität" heissen. —

Die 9 Coefficienten a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ von $f(x, y)$ bestimmen diese bilineare Form und damit die zugehörige Reciprocität vollständig und sind daher, da nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen, als die homogenen Coordinaten der reciproken Verwandtschaft zu bezeichnen, sie sind 8 bestimmten Grössen äquivalent, so dass jede bilineare Form und die zugehörige Reciprocität durch 8 Bedingungen bestimmt ist. Unter einer „*linearen Bedingung*" soll eine solche verstanden werden, welche für die 9 Coefficienten a_{ik} eine lineare Gleichung involvirt, so dass durch 8 lineare Bedingungen im Allgemeinen die reciproke Verwandtschaft *eindeutig* bestimmt ist. Eine lineare Bedingung wird z. B. gegeben durch ein Punktepaar α, β, für welches jeder der beiden Punkte auf der Polaren des andern in Bezug auf die Reciprocität $f(x, y) = 0$ sich befindet. Ein solches Punktepaar soll ein „*polares Punktepaar*" oder ein *Nullpaar* der Reciprocität genannt werden, die Coordinaten seiner Punkte annulliren die bilineare Form, da:

$$f(\alpha, \beta) = \sum a_{ik}\alpha_i\beta_k = 0.$$

Ein solches Nullpaar involvirt also in der That eine lineare Gleichung für die Coefficienten a_{ik}, ist also eine lineare Bedingung; die Kenntniss von 8 Nullpaaren wird daher im Allgemeinen die Reciprocität eindeutig bestimmen. Ein Nullpaar giebt uns jedoch nur eine specielle lineare Bedingung, eine solche von grösster Allgemeinheit werden wir erhalten, indem wir die Coefficienten a_{ik} einer völlig allgemeinen linearen homogenen Gleichung:

$$(a, \alpha) = \sum_{i,k} a_{ik}\alpha_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

unterwerfen, worin die 9 Coefficienten α_{ik} willkürliche, unbestimmte Grössen bedeuten sollen. Wir können die 9 Grössen α_{ik} als die Coefficienten einer zweiten bilinearen Form zwischen zwei Systemen von Liniencoordinaten u, v auffassen, nämlich der Form:

$$\varphi(u, v) = \sum_{i,k} \alpha_{ik}u_iv_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

*) Cf. Rosanes, Cr. J. Bd. 88, p. 245.

Die beiden Formen f und φ und die durch sie definirten Reciprocitäten werden durch die Gleichung: $(a, \alpha) = 0$ in eine gewisse Beziehung gesetzt. Herr Rosanes nennt zwei bilineare Formen mit contragredienten Variabeln, und ebenso die zugehörigen Reciprocitäten, für welche $(a, \alpha) = 0$ ist, „*conjugirt*",*) und giebt folgende wichtige geometrische Interpretation für die Lage zweier Reciprocitäten, welche durch die Beziehung des Conjugirtseins mit einander verbunden sind. Sind nämlich zwei Reciprocitäten einander conjugirt, so giebt es für jede derselben eine vierfache Mannigfaltigkeit von Paaren polarer Dreiseite, und eine achtfache Mannigfaltigkeit von Paaren polarer Vierseite, deren entsprechende Seitenpaare Nullpaare der andern sind.**) Die Kenntniss einer conjugirten Reciprocität giebt uns demnach eine lineare Bedingung allgemeinster Art für die Bestimmung einer Reciprocität. Ein Nullpar α, β ist durch eine conjugirte Form specieller Art dargestellt, nämlich durch die in das Product zweier linearen Formen $u(\alpha)\, u(\beta)$ zerfallende.

Durch 8 linear unabhängige conjugirte Reciprocitäten ist eine Reciprocität eindeutig bestimmt, und diese Bestimmung ist die allgemeinste Bestimmung einer Reciprocität durch lineare Bedingungen. Auch eine conjugirte *zweitheilige* bilineare Form wird eine lineare Bedingung für die Reciprocität involviren; es ist für die Folge von Wichtigkeit, zu untersuchen, in welcher Lagenbeziehung die durch eine zweitheilige Form dargestellte Projectivität (vgl. p. 337) zu einer conjugirten Reciprocität sich befindet. Ist die zweitheilige Form:

$$f(x,y) = k_1 a_1(x) b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y) = \sum_{i,k} (k_1 a_i^1 b_k^1 + k_2 a_i^2 b_k^2) x_i y_k$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

der Form:

$$\varphi(u, v) = \sum \alpha_{ik} u_i v_k \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

conjugirt, so ist:

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} (k_1 a_i^1 b_k^1 + k_2 a_i^2 b_k^2) = 0$$

oder

$$k_1 \varphi(a^1, b^1) + k_2 \varphi(a^2, b^2) = 0.$$

Nennen wir — in Uebereinstimmung mit der bei der bilinearen Form $f(x, y)$ in Punktcoordinaten eingeführten Bezeichnung — zwei Geraden a, b, von denen jede den Pol der andern in Bezug auf φ enthält, und deren Coordinaten also die bilineare Form $\varphi(u,v)$ zu Null machen, ein polares Geradenpaar oder ein *Nullpaar* der Form φ, wie der zugehörigen

*) Cf. Cr. J. Bd. 88, p. 246.
**) Cf. Cr. J. Bd. 90, p. 312, 316.

Reciprocität, so lehrt uns die letzte Gleichung: *Ist die zweitheilige Form* $f = k_1 a_1(x) b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y)$ *der Form* $\varphi(u, v)$ *conjugirt, und ist* a^1, b^1 *ein Nullpaar von* φ, *so ist auch* a^2, b^2 *ein Nullpaar von* φ. Wir sahen dass durch die zweitheilige Form f die Strahlenbüschel a^{12}, b^{12} projectivisch zugeordnet werden, in dieser Projectivität, die wir als „Projectivität f“ bezeichnen wollen, waren a^1, b^2 und a^2, b^1 beliebige entsprechende Strahlenpaare; wir dürfen demnach a^1, b^1 als ganz beliebige Strahlen (resp. durch a^{12}, b^{12}) wählen, dann sind b^2, a^2 die ihnen in der Projectivität f resp. entsprechenden. Wählen wir daher a^1, b^1 als ein beliebiges Nullpaar von φ, so werden die den Strahlen a^1, b^1 in der Projectivität f resp. entsprechenden Strahlen b^2, a^2 ebenfalls ein Nullpaar von φ bilden. Also gilt: *Ist* a^1, b^1 *ein den beiden Strahlenbüscheln durch* a^{12}, b^{12} *angehöriges Nullpaar von* $\varphi(u, v)$, *so bilden die in der Projectivität* f *den Strahlen* a^1, b^1 *entsprechenden Strahlen* b^2, a^2 *ebenfalls ein Nullpaar von* $\varphi(u, v)$. Nun sind aber alle Nullpaare u, v von $\varphi(u, v)$ welche den Strahlenbüscheln durch a^{12}, b^{12} angehören, entsprechende Strahlenpaare einer Projectivität, welche wir als Projectivität φ_{12} bezeichnen wollen. Wir haben demnach die Strahlenbüschel a^{12}, b^{12} in zweifacher Weise projectiv auf einander bezogen; einmal durch die zweitheilige Form f, diese Zuordnung war als die „Projectivität f“ bezeichnet, sodann durch die Strahlenpaare durch a^{12}, b^{12}, welche Nullpaare von $\varphi(u, v)$ sind, diese entsprechen einander projectivisch in der Projectivität φ_{12}. Entspricht nun dem Strahle u durch a^{12} in der Projectivität φ_{12} der Strahl v, und in der Projectivität f der Strahl v^1, so sind v, v^1 entsprechende Paare einer dritten Projectivität, welche die aus f und φ_{12} „resultirende Projectivität“ heissen und mit r bezeichnet werden soll. Im Falle nun $f = k_1 a_1(x) b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y)$ und $\varphi(u, v)$ conjugirt sind, und a^1, b^1, was, wie wir sahen, stets möglich, so gewählt sind, dass sie ein Nullpaar von $\varphi(u, v)$ bilden, dann bildeten auch a^2, b^2 ein Nullpaar von $\varphi(u, v)$. In diesem Falle entspricht der Geraden a^1 in φ_{12} die Gerade b^1, und in f die Gerade b^2, so dass b^1, b^2 entsprechende Paare der resultirenden Projectivität r bilden; andererseits entspricht der Geraden a^2 in φ_{12} die Gerade b^2, in f die Gerade b^1, so dass auch b^2, b^1 entsprechende Paare der resultirenden Projectivität r bilden. Es bilden demnach b^1, b^2 und b^2, b^1 entsprechende Paare der resultirenden Projectivität r, mithin ist diese symmetrisch, d. h. sie ist eine Involution. Also gilt: Ist die zweitheilige Form f und die Form $\varphi(u, v)$ conjugirt, so sind die beiden Projectivitäten f und φ_{12} so beschaffen, dass ihre resultirende Projectivität eine Involution ist. Wir wollen aber — im Anschluss an die bei binären Formen gebräuchliche Ausdrucksweise*) —

*) Cf. Rosanes: Cr. J. Bd. 90, p. 312, Anm.

zwei Projectivitäten, deren resultirende Projectivität eine Involution ist, *einander conjugirt* nennen. Fassen wir das Gefundene zusammen, so ergiebt sich: *Die zweitheilige Form* $f = k_1 a_1(x) b_1(y) + k_2 a_2(x) b_2(y)$ *und die bilineare Form* $\varphi(u, v)$ *ordnen die Strahlenbüschel durch* a^{12}, b^{12} *in zweifacher Weise projectivisch zu: Erstens entspricht jeder Geraden* u *durch* a^{12} *die Gerade* v^1 *durch* b^{12}, *welche die Polare der Punkte von* u *in Bezug auf* f *ist; zweitens entspricht jeder Geraden* u *durch* a^{12} *die eindeutig bestimmte Gerade* v *durch* b^{12}, *welche mit* u *zusammen ein Nullpaar von* $\varphi(u, v)$ *bildet. Ist die zweitheilige Form* f *der Form* φ *conjugirt, so sind diese beiden in* a^{12} *und* b^{12} *durch* f *und* φ *erzeugten Projectivitäten einander conjugirt, d. h. ihre resultirende Projectivität ist eine Involution. In diesem Falle soll auch die durch die zweitheilige Form* f *dargestellte Projectivität zu der Reciprocität* φ *conjugirt genannt werden.* Die Lagenbeziehung, welche zwischen einer Reciprocität und einer zu ihr conjugirten Projectivität stattfindet, ist durch das voranstehende hinlänglich gekennzeichnet. — Wir sahen, dass durch 8 unabhängige lineare Bedingungen eine Reciprocität eindeutig bestimmt war; ist von einer Reciprocität die Polare u eines Punktes x bekannt, und sind y_1, y_2 irgend zwei Punkte von u, so bilden x, y_1 und x, y_2 zwei Nullpaare der Reciprocität, so dass die Kenntniss der Polare u eines Punktes x zwei linearen Bedingungen äquivalent ist. Ist daher zu vier Punkten die Polare gegeben, so sind damit acht lineare Bedingungen für die Reciprocität gegeben und diese damit eindeutig bestimmt. Die Construction einer Reciprocität aus vier Punkten und ihren Polaren lässt sich von allen Constructionen der Reciprocität am einfachsten ausführen*), und soll aus diesem Grunde die canonische Construction der Reciprocität genannt werden. Zu ihrer Ausführung ist nur nothwendig, zweimal in gegebenen Projectivitäten zu einem gegebenen Element das entsprechende zu construiren, oder, wie wir uns fortan kurz ausdrücken wollen, „zwei projective Elemente zu construiren“. —

§ 2.

Lösung einer Hülfsaufgabe.

Wir hatten im Vorigen erkannt, dass, wenn von einer Reciprocität eine conjugirte Reciprocität bekannt ist, damit eine lineare Bedingung allgemeinster Art gegeben ist. Da es sich in diesem Abschnitt darum handeln wird, die Construction einer Reciprocität auszuführen aus acht linearen Bedingungen, unter welchen conjugirte Reciprocitäten auftreten, so wollen wir zunächst darthun, wie man eine unter den

---

*) Cf. Schröter: Oberflächen II. Ordnung p. 351; Reye: Geometrie der Lage Bd. II, p. 5.

Data der Aufgabe auftretende conjugirte Reciprocität am vortheilhaftesten verwendet. Sei also von der Reciprocität:

$$\varphi(u, v) = \sum \alpha_{ik} u_i v_k = 0$$

die conjugirte Reciprocität:

$$f(x, y) = \sum a_{ik} x_i y_k = 0$$

gegeben, dann können wir $f(x, y)$ als Summe von vier Producten linearer Formen darstellen:

$$f(x,y) = k_1 c_1(x) d_1(y) + k_2 c_2(x) d_2(y) + k_3 c_3(x) d_3(y) + k_4 c_4(x) d_4(y)$$

und es bilden die beiden Vierseite: $\frac{c^1\, c^2\, c^3\, c^4}{d^1\, d^2\, d^3\, d^4}$ ein Paar polarer Vierseite der Reciprocität f, wenn c^i die Gerade bedeutet, deren Gleichung $c_i(x) = 0$ ist.*) Da nun f und φ conjugirte Formen sind, so ist:

$$\sum \alpha_{ik} a_{ik} = k_1 \varphi(c^1, d^1) + k_2 \varphi(c^2, d^2) + k_3 \varphi(c^3, d^3) + k_4 \varphi(c^4, d^4) = 0;$$

sind nun c^1, d^1; c^2, d^2; c^3, d^3 Nullpaare von φ, so lehrt die letzte Gleichung, dass auch c^4, d^4 Nullpaar von φ ist. *Kann man also ein Paar polarer Vierseite von f so finden, dass drei seiner Seitenpaare c^1, d^1; c^2, d^2; c^3, d^3 Nullpaare der zu f conjugirten Reciprocität φ sind, so ist auch das vierte Seitenpaar c^4, d^4 Nullpaar von φ.* Auf diese Weise gelangen wir also aus der Kenntniss einer conjugirten Reciprocität f von φ zur Kenntniss eines weiteren Nullpaares c^4, d^4 von φ.

Wir wenden uns nun zu der für das Folgende wichtigen Aufgabe:

Von einer Reciprocität: $\varphi(u, v) = 0$ seien gegeben die Polaren b_1, b_2, b_3 der drei Punkte a_1, a_2, a_3 und die beiden conjugirten Reciprocitäten $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$; es soll zu einer beliebigen Geraden (Punkt) der Pol (Polare) in Bezug auf $\varphi(u, v) = 0$ gefunden werden. Die Data der Aufgabe repräsentiren acht lineare Bedingungen, so dass die gesuchte Reciprocität eindeutig bestimmt sein wird. Wir wollen jedoch diese Aufgabe nicht in dieser Allgemeinheit behandeln, sondern die beiden Formen $f(x, y)$, $g(x, y)$ als zweitheilige Formen und daher die durch sie dargestellten Reciprocitäten als Projectivitäten annehmen, so dass von der gesuchten Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$ zwei conjugirte Projectivitäten gegeben sind. Die Methode der von uns darzulegenden Auflösung dieses Problems wird durch diese Specialisirung im Wesentlichen durchaus nicht geändert, und es geschieht diese Specialisirung nur aus dem alleinigen Grunde, um bei einer späteren Gelegenheit, wo wir die specialisirte Aufgabe zu benutzen haben, direct auf

*) Cf. Cr. J. Bd. 90, p. 313.

dieselbe verweisen zu können. Wir werden erkennen, dass die zu gebende Auflösungsmethode direct auf die allgemeinere Aufgabe übertragbar ist. Es handelt sich also nun um folgende Aufgabe:

Von einer Reciprocität: $\varphi(u, v) = 0$ sind gegeben die Polaren b_1, b_2, b_3 der drei Punkte a_1, a_2, a_3 der X-Ebene und die beiden conjugirten Projectivitäten f und g, welche durch die beiden zweitheiligen Formen:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= k_1 p_1(x) q_1(y) + k_2 p_2(x) q_2(y), \\ g(x, y) &= t_1 r_1(x) s_1(y) + t_2 r_2(x) s_2(y) \end{aligned}\right\}$$

dargestellt werden. Es soll zu einer beliebigen Geraden (Punkt) der Pol (Polare) in Bezug auf $\varphi(u, v) = 0$ aufgefunden werden. Wir setzen:

$$\begin{array}{llll} \text{Gerade: } (\overline{a_2 a_3}) = a_1, & \text{Punkt: } (b_2 b_3) = \beta_1, & & \\ \quad " \quad (\overline{a_3 a_1}) = a_2, & \quad " \quad (b_3 b_1) = \beta_2, & \text{Punkt: } (p_1 p_2) = P, & q_1 q_2 = Q, \\ \quad " \quad (\overline{a_1 a_2}) = a_3, & \quad " \quad (b_1 b_2) = \beta_3, & \quad " \quad (r_1 r_2) = R, & s_1 s_2 = S. \end{array}$$

Durch die zweitheilige Form f werden die Strahlenbüschel, welche die Punkte P und Q zu Scheiteln haben, durch die zweitheilige Form g die Strahlenbüschel R und S projectivisch auf einander bezogen. Diese zu der gesuchten Reciprocität φ conjugirten Projectivitäten seien mit f und g bezeichnet, wir denken uns dieselben durch je drei Paare entsprechender Strahlen gegeben, so dass man zu jedem vierten Strahle den entsprechenden construiren kann. Wir wollen zwei Vierseite aufsuchen, welche ein polares System von f bilden, und von welchen drei Seitenpaare Nullpaare von φ sind; dann wird auch das vierte Seitenpaar ein Nullpaar von φ sein, so dass wir die Kenntniss eines weiteren Nullpaares von φ erlangen. Ist u eine beliebige Gerade der X-Ebene, so lässt sich das Dreiseit $b_1 b_2 b_3$ durch eine Gerade v in der Y-Ebene, und die Gerade u durch ein Dreiseit $c_1 c_2 c_3$ in der X-Ebene zu einem Paar polarer Vierseite $\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & u \\ b_1 & b_2 & b_3 & v \end{matrix}$ von f in der gewünschten Weise ergänzen. Damit die beiden Vierseite: $\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & u \\ b_1 & b_2 & b_3 & v \end{matrix}$ ein polares System von f bilden, ist nothwendig und hinreichend, dass f in der Form:

$$f = \varrho_1 c_1(x) b_1(y) + \varrho_2 c_2(x) b_2(y) + \varrho_3 c_3(x) b_3(y) + \varrho u(x) v(x)$$

dargestellt werden kann, wo $c_i(x) = 0$ die Gleichung von c_i etc. bedeutet. Dann sind die drei Punktepaare:

$$\big((c_1 u),\ b_2 b_3 = \beta_1\big), \quad \big((c_2 u),\ b_3 b_1 = \beta_2\big), \quad \big((c_3 u),\ b_1 b_2 = \beta_3\big)$$

Nullpare von f, d. h. die Strahlenpaare:

$$Q\beta_1,\ P(c_1 u); \quad Q\beta_2,\ P(c_2 u); \quad Q\beta_3,\ P(c_3 u)$$

sind entsprechende Strahlenpaare der Projectivität f. Somit sind die

drei Punkte $(c_1 u)$, $(c_2 u)$, $(c_3 u)$ als die Schnittpunkte der den drei Geraden $Q\beta_1$, $Q\beta_1$, $Q\beta_3$ in f entsprechenden Strahlen mit u eindeutig bestimmt. Die drei unbekannten Geraden c_1, c_2, c_3 bilden resp. mit b_1, b_2, b_3 Nullpaare von φ d. h. sie enthalten resp. die Pole α_1, α_2, α_3 von resp. b_1, b_2, b_3 in Bezug auf φ. Somit sind die Geraden c_1, c_2, c_3 bestimmt als die Verbindungslinien:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{von } (c_1 u) & \text{mit} & \alpha_1, \\ \;\text{"}\; (c_2 u) & \text{"} & \alpha_2, \\ \;\text{"}\; (c_3 u) & \text{"} & \alpha_3. \end{array}\right\}$$

Nennen wir γ_1, γ_2, γ_3 die Ecken des so entstehenden Dreiseits $c_1 c_2 c_3$, so dass:

$$c_2 c_3 = \gamma_1, \quad c_3 c_1 = \gamma_2, \quad c_1 c_2 = \gamma_3,$$

so bilden, da $\begin{matrix} c_1 c_2 c_3 u \\ b_1 b_2 b_3 v \end{matrix}$ polare Vierseite von f sein sollen, die drei Punktepaare:

$$\big(\gamma_1, (b_1 v)\big), \quad \big(\gamma_2, (b_2 v)\big), \quad \big(\gamma_3, (b_3 v)\big).$$

Nullpaare von f d. h. die Strahlenpaare:

$$P\gamma_1, \; Q(b_1 v); \quad P\gamma_2, \; Q(b_2 v); \quad P\gamma_3, \; Q(b_3 v)$$

sind entsprechende Strahlenpaare der Projectivität f, also sind die drei Punkte $(b_1 v)$, $(b_2 v)$, $(b_3 v)$ resp. auf denjenigen drei Strahlen q_1, q_2, q_3 durch Q gelegen, welche in der Projectivität f den drei Strahlen $P\gamma_1$, $P\gamma_2$, $P\gamma_3$ entsprechen. Diese drei Punkte $(b_1 v)$, $(b_2 v)$, $(b_3 v)$ liegen aber ausserdem resp. auf den drei Geraden b_1, b_2, b_3, so dass sie als die Schnittpunkte:

$$(q_1, b_1) = (b_1, v), \quad (q_2, b_2) = (b_2, v), \quad (q_3, b_3) = (b_3, v),$$

welche offenbar derselben Geraden v angehören, bekannt sind. Die so erlangte Gerade v bildet mit der beliebig angenommenen Geraden u ein Nullpaar der Reciprocität φ. Man kann daher zu einer beliebigen Geraden u eine Gerade v finden, welche zusammen mit u ein Nullpaar der Reciprocität φ bildet, und zwar durch folgende:

Construction: In der gegebenen Projectivität f construiren wir die drei Strahlen durch P, welche den drei Strahlen $Q\beta_1$, $Q\beta_2$, $Q\beta_3$ entsprechen; sind $(c_1 u)$, $(c_2 u)$, $(c_3 u)$ die Schnittpunkte derselben mit der beliebigen Geraden u, so verbinden wir: $(c_1 u)$ mit α_1 durch die Gerade c_1, $(c_2 u)$ mit α_2 durch c_2, $(c_3 u)$ mit α_3 durch c_3. Nennen wir γ_1, γ_2, γ_3 die Ecken des Dreiseits $c_1 c_2 c_3$, so schneiden die Strahlen durch Q, welche den Strahlen $P\gamma_1$, $P\gamma_2$ in der Projectivität f entsprechen, die Geraden b_1, b_2 resp. in den Punkten $(b_1 v)$, $(b_2 v)$, deren Verbindungslinie v die gesuchte Gerade ist. Es bilden nämlich die Vierseite $\begin{matrix} c_1 c_2 c_3 u \\ b_1 b_2 b_3 v \end{matrix}$ ein polares System von f, in welchem c_1, b_1; c_2, b_2; c_3, b_3

Nullpaare von φ sind, so dass auch u, v ein Nullpaar von φ ist. In der That bilden $\begin{smallmatrix} c_1 c_2 c_3 u \\ b_1 b_2 b_3 v \end{smallmatrix}$ ein Paar polarer Vierseite von f, da die fünf Eckenpaare:

$$c_1 c_3,\, b_2 v;\quad c_2 c_3,\, b_1 v;\quad c_1 u,\, b_2 b_3;\quad c_2 u,\, b_3 b_1;\quad c_3 u,\, b_1 b_2$$

Nullpaare von f sind, also auch das 6^te^ Eckenpaar: $(c_1 c_2,\, b_3 v)$, und zwei Vierseite, für welche die so zugeordneten Eckenpaare Nullpaare von f sind, ein polares System von f bilden.*) Die drei Seitenpaare b_1, c_1; b_2, c_2; $b_3 c_3$ sind ferner Nullpaare von φ, da c_1, c_2, c_3 resp. die Pole $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von b_1, b_2, b_3 enthalten; mithin (cf. p. 342) ist auch das vierte Seitenpaar u, v Nullpaar von φ. Wir haben somit zu einer beliebigen Geraden u eine Gerade v gefunden, welche mit u zusammen ein Nullpaar von φ bildet. Die Ausführung der Construction beansprucht die Construction von fünf projectiven Elementen, nämlich derjenigen, welche den Strahlen $Q\beta_1$, $Q\beta_2$. $Q\beta_3$ und $P\gamma_1$, $P\gamma_2$ in der Projectivität f entsprechen. Also ergiebt sich: *Sind von einer Reciprocität φ gegeben die Polaren b_1, b_2, b_3 dreier Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und eine conjugirte Projectivität f, so kann man zu jeder beliebigen Geraden u eine Gerade v hinzufinden, welche mit u ein Nullpaar von φ bildet.***)

Ist nun noch eine weitere conjugirte Projectivität g, dargestellt durch die zweitheilige bilineare Form:

$$g(x, y) = t_1 r_1(x) s_1(y) + t_2 r_2(x) s_2(y),$$

gegeben, so ergiebt sich in genau derselben Weise durch Construction von fünf projectiven Elementen zur Geraden u eine zweite Gerade w, welche mit u ein Nullpaar von φ bildet. Der Schnittpunkt y von v, w ist der Pol der beliebigen Geraden u, *so dass das angegebene Verfahren auf völlig linearem Wege durch Construction von* 10 *projectiven Elementen zu jeder Geraden u den Pol x hinzufinden lehrt in derjenigen reciproken Verwandtschaft* $\varphi(u, v) = 0$, *für welche b_1, b_2, b_3 die Polaren von resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind und von welcher die Projectivitäten $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ conjugirte Projectivitäten sind.* —

Man erkennt gleichzeitig, dass, sofern $f(x, y)$, $g(x, y)$ nicht zweitheilige, sondern völlig allgemeine conjugirte Formen sind, eine Construction zum Ziele führt, welche — mutatis mutandis — völlig der von uns gegebenen analog und auf genau denselben Principien aufgebaut ist. —

---

*) Cf. Cr. J. Bd. 90, p. 314.

**) Alle Reciprocitäten $\varphi(u, v) = 0$, welche $\alpha_1 b_1$, $\alpha_2 b_2$, $\alpha_3 b_3$ zu Pol und Polaren haben und welche der Projectivität f conjugirt sind, bilden eine einfache lineare Mannigfaltigkeit, eine zweigliedrige Gruppe, von Reciprocitäten, deren gemeinsame Nullpaare die entsprechenden Geradenpaare einer quadratischen Verwandtschaft bilden. Die von uns gefundene Gerade v ist die der Geraden u in dieser quadratischen Verwandtschaft entsprechende Gerade.

Wir beabsichtigen eine neue Lösung des wichtigen Problems beizubringen: *In einer durch* 8 *Nullpaare gegebenen Reciprocität* $f(x,y)=0$ *zu einem gegebenen Punkte die Polare zu construiren.* Durch 8 unabhängige Nullpaare ist die bilineare Form $f(x,y)$ eindeutig bestimmt; 7 von diesen Punktepaaren bestimmen eine einfache lineare Mannigfaltigkeit bilinearer Formen — eine zweigliedrige Gruppe —, der auch f angehört, und deren gemeinsame Nullpaare entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft bilden; sämmtliche dieser Punktepaare sind offenbar auch Nullpaare von f. Eine quadratische Verwandtschaft ist somit durch 7 Punktepaare bestimmt, so dass zu jedem achten Punkte der entsprechende eindeutig auffindbar ist. Diese Aufgabe: In einer durch 7 entsprechende Punktepaare gegebenen quadratischen Verwandtschaft zu einem beliebigen Punkte den entsprechenden zu finden, ist völlig äquivalent mit der oben ausgesprochenen analogen Aufgabe für die reciproke Verwandtschaft, die Lösung der einen zieht die der andern nach sich. Kann man nämlich alle entsprechenden Paare einer durch 7 Paare gegebenen quadratischen Verwandtschaft construiren, so kann man auch in einer durch 8 Nullpaare gegebenen Reciprocität zu einem beliebigen Punkte x die Polare finden. Denn construirt man in derjenigen quadratischen Verwandtschaft, welche durch irgend 7 der 8 Paare definirt ist, den zu x entsprechenden Punkt y_1 und in derjenigen zweiten quadratischen Verwandtschaft, welche durch irgend 7 andere der 8 Punktepaare definirt ist, den zu x entsprechenden y_2, so ist die Gerade $y_1 y_2$ die gesuchte Polare von x, so dass die Construction der quadratischen Verwandtschaft aus 7 Punktepaaren die Construction der reciproken Verwandtschaft aus 8 Nullpaaren nach sich zieht. Aber auch umgekehrt folgt die Construction der quadratischen Verwandtschaft aus 7 Punktepaaren aus der der reciproken. Denn nimmt man ein achtes Punktepaar beliebig hinzu und construirt in der durch diese 8 Paare definirten Reciprocität zu x die Polare u_1, und in einer durch Adjunction eines anderen achten Punktepaares definirten Reciprocität zu x ebenfalls die Polare u_2, so ist der Schnittpunkt y von u_1 und u_2 der gesuchte in der durch die 7 Punktepaare definirten quadratischen Verwandtschaft dem Punkte x entsprechende Punkt. In der That sind also beide Probleme äquivalent, man hat nur nothwendig, eines von beiden zu lösen. Wir wollen demnach statt des Problems für die Reciprocität das analoge Problem für die quadratische Verwandtschaft behandeln: *In einer durch* 7 *Punktepaare:* $x^1, y^1; x^2, y^2; \ldots; x^7, y^7$ *definirten quadratischen Verwandtschaft zu einem beliebigen Punkte* x^8 *den entsprechenden Punkt* y^8 *zu finden.* Wie oben bemerkt sind 8 entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft gemeinsame Nullpaare

einer zweigliedrigen Gruppe bilinearer Formen, und mithin die 8 speciellen Formen:

$$u(x^1)v(y^1),\ u(x^2)v(y^2), \ldots, u(x^8)v(y^8),$$

8 zu dieser Gruppe conjugirte Formen*); da aber die zu einer zweigliedrigen Gruppe conjugirten Formen eine 7-gliedrige Gruppe bilden, so sind diese 8 Formen linear abhängig und es besteht eine Identität von der Form**)

$$\sum_{i=1}^{8} k_i u(x^i)v(y^i) = 0,$$

oder:

$$k_1 u(x^1)v(y^1) + k_2 u(x^2)v(y^2) + k_3 u(x^3)v(y^3) = -\sum_{\varrho=4}^{8} k_\varrho u(x^\varrho)\, v(y^\varrho).$$

Lässt sich eine bilineare Form $\varphi(u, v)$ als Summe von fünf Producten linearer Formen darstellen, also:

$$\varphi(u, v) = \sum_{\varrho=1}^{5} k_\varrho u(\alpha^\varrho) v(\beta^\varrho),$$

so wollen wir die von den Punkten $u(\alpha^\varrho)=0$, $v(\beta^\varrho)=0$ $(\varrho=1,2,\ldots,8)$ gebildeten beiden Fünfecke $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5\end{matrix}$ ein Paar polarer Fünfecke oder ein polares System der Form $\varphi(u, v)$ und der von ihr dargestellten Reciprocität nennen, in Analogie mit der für Paare polarer Dreiecke und polarer Vierecke eingeführten Bezeichnung.***) Dann gilt in Folge der letzten Gleichung der Satz: *Sind x^i, y^i $(i = 1, \ldots, 8)$ acht entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft, so bilden die Dreiecke $\begin{matrix}x_1x_2x_3\\ y_1y_2y_3\end{matrix}$ und die Fünfecke $\begin{matrix}x^4x^5x^6x^7x^8\\ y^4y^5y^6y^7y^8\end{matrix}$ ein polares System einer und derselben Reciprocität, so dass also der dem Punkte x^8 entsprechende Punkt y^8 das Fünfeck $x^4x^5x^6x^7x^8$ und das Viereck $y^4y^5y^6y^7$ zu einem Paar polarer Fünfecke derjenigen eindeutig bestimmten Reciprocität ergänzt, von welcher die Dreiecke $\begin{matrix}x^1x^2x^3\\ y^1y^2y^3\end{matrix}$ ein polares System bilden.* Es wird uns gelingen in überraschend einfacher Weise aus diesen Beziehungen den Punkt y^8 zu construiren, doch wird es zuvor nöthig sein, die Paare polarer Fünfecke einer Reciprocität, deren Eigenschaften bisher noch nicht untersucht zu sein scheinen, näher zu betrachten, was zu Resultaten führt, welche an sich nicht ohne Interesse sind.

---

*) Cf. Cr. Journ. Bd. 88, p. 246, 247.

**) Cf. Cr. Journ. Bd. 88, p. 248.

***) Cf. Cr. Journ. Bd. 90, p. 306, 314.

§ 3.

Paare polarer Fünfecke einer Reciprocität.

Definition: Sind 2 Fünfecke $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5\end{matrix}$ gegeben, so sollen 2 Ecken α^i, β^i, mit gleichem Index „einander entsprechend" heissen. Verbindet man 2 nicht entsprechende Ecken α^i, β^k mit den 3 noch übrigen entsprechenden Eckenpaaren: α^l, β^l; α^m, β^m; α^n, β^n, so dass i, k, l, m, n eine Permutation der 5 Elemente $1, 2, 3, 4, 5$ darstellt, so wird durch die 3 Strahlenpaare: $\alpha^i\alpha^l$, $\beta^k\beta^l$; $\alpha^i\alpha^m$, $\beta^k\beta^m$; $\alpha^i\alpha^n$, $\beta^k\beta^n$ ein projectivische Zuordnung:

$$\alpha^i(\alpha^l, \alpha^m, \alpha^n, \ldots) \barwedge \beta^k(\beta^l, \beta^m, \beta^n, \ldots)$$

der beiden Strahlenbüschel durch α^i und β^k festgesetzt. Jede derartige Projectivität soll *„eine dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität"* genannt werden. Die Projectivitäten:

$$\alpha^3(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^5(\beta^1, \beta^2, \beta^4, \ldots),$$
$$\alpha^4(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^5, \ldots) \barwedge \beta^3(\beta^1, \beta^2, \beta^5, \ldots)$$

bilden Beispiele von dem Fünfeckpaare verbundenen Projectivitäten.

Satz: *Bilden die beiden Fünfecke* $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5\end{matrix}$ *ein polares System der bilinearen Form* $\varphi(u, v)$, *so ist jede dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität zu* $\varphi(u, v)$ *conjugirt.* Denn jede bilineare Form $f(x, y)$, welche α^i, β^i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ zu Nullpaaren hat, ist zu $\varphi(u, v)$ conjugirt, da $\varphi(u, v)$ auf die Form:

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{5} k_i\, u(\alpha^i)\, v(\beta^i)$$

gebracht werden kann, und mithin f und φ conjugirt sind, wofern:

$$k_1 f(\alpha^1, \beta^1) + k_2 f(\alpha^2, \beta^2) + k_3 f(\alpha^3, \beta^3) + k_4 f(\alpha^4, \beta^4) + k_5 f(\alpha^5, \beta^5) = 0.$$

Betrachten wir nun irgend eine dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität z. B.:

$$\alpha^3(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^5(\beta^1, \beta^2, \beta^4, \ldots)$$

so wird diese durch die bilineare, zweitheilige Form:

$$(\alpha^3\alpha^2\alpha^4)(\beta^5\beta^1\beta^4)(\alpha^3\alpha^1 x)(\beta^5\beta^2 y) - (\alpha^3\alpha^1\alpha^4)(\beta^5\beta^2\beta^4)(\alpha^3\alpha^2 x)(\beta^5\beta^1 y) = 0$$

dargestellt, welche offenbar $\alpha^i\beta^i$ $(i = 1, 2, 3)$ zu Nullpaaren hat. Also ist diese zweitheilige Form zu $\varphi(u, v)$ conjugirt, also auch die durch sie dargestellte dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität. Aber es gilt auch umgekehrt der Satz: *Sind vier linear unabhängige einem*

Fünfeckpaare $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5\end{matrix}$ *verbundene Projectivitäten einer Reciprocität* $\varphi(u, v) = 0$ *conjugirt, so bildet das Fünfeckpaar ein polares System von* $\varphi(u, v)$. Denn die zu den 4 linear unabhängigen, verbundenen Projectivitäten gehörigen zweitheiligen Formen sind conjugirt den 5 speciellen Formen $u(\alpha^i)v(\beta^i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ und der Form φ, mithin befinden sich diese 6 Formen, da den 4 linear unabhängigen zweitheiligen Formen eine fünfgliedrige Gruppe conjugirter Formen gegenübersteht, in linearer Abhängigkeit, d. h.

$$\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{5} k_i u(\alpha^i) v(\beta^i),$$

also bilden die 2 Fünfecke ein polares System von $\varphi(u, v)$. Dass in der That stets 4 *linear unabhängige* verbundene Projectivitäten bei 2 Fünfecken, wo keine 3 Ecken in gerader Linie liegen, stets existiren, lässt sich an den 4 verbundenen Projectivitäten:

$$\begin{aligned}
\alpha^5(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4, \ldots) &\barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^4, \ldots),\\
\alpha^5(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^4, \ldots) &\barwedge \beta^3(\beta^1, \beta^2, \beta^4, \ldots),\\
\alpha^4(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^5, \ldots) &\barwedge \beta^3(\beta^1, \beta^2, \beta^5, \ldots),\\
\alpha^4(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \ldots) &\barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^5, \ldots),
\end{aligned}$$

deren zugehörige zweitheilige Formen, wie man leicht erkennt, sicher linear unabhängig sind, constatiren. Es sind daher von einem Fünfeckpaare, das ein polares System einer gegebenen Reciprocität bilden soll, genau 4 Bedingungen zu erfüllen, so dass eine 16-fache Mannigfaltigkeit polarer Fünfecke einer gegebenen Reciprocität existiren.

Ein Fünfeck $\alpha^1 \ldots \alpha^5$ *und ein Dreieck* $\beta^1\beta^2\beta^3$ *lässt sich durch ein — allein mit Hülfe des Lineals construirbares — Punktepaar* $\beta^4\beta^5$ *zu einem Paar polarer Fünfecke der gegebenen Reciprocität* $\varphi(u, v) = 0$ *ergänzen.* Da wir sahen, dass eine genau 16-fache Mannigfaltigkeit polarer Fünfeckpaare von $\varphi(u, v) = 0$ existirt, können wir ein Fünfeck $\alpha^1 \ldots \alpha^5$ und ein Dreieck $\beta^1\beta^2\beta^3$ des andern willkürlich annehmen, wodurch über genau 16 Bedingungen verfügt ist, so dass die Abzählung lehrt, dass die obige Aufgabe eine bestimmte ist. Nach dem oben bewiesenen Satze muss die Projectivität:

$$\alpha^5(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^4, \ldots)$$

zu $\varphi(u, v) = 0$ conjugirt sein, d. h. sie muss conjugirt sein zu derjenigen projectiven Zuordnung der Strahlenbüschel durch α^5, β^2, welche durch diejenigen Geradenpaare durch α^5, β^2, welche Nullpaare von $\varphi(u, v)$ sind, hergestellt wird (cf. § 1); diese letztere Projectivität sei mit φ_{52} bezeichnet. Dann ist die aus den beiden Projectivitäten

φ_{52} und $\alpha^5(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^4, \ldots)$ resultirende Projectivität eine Involution (cf. § 1). Von der verbundenen Projectivität:

$$\alpha^5(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^4, \ldots)$$

kennt man 2 Paare entsprechender Strahlen $\alpha^5\alpha^1$, $\beta^2\beta^1$ und $\alpha^5\alpha^3$, $\beta^2\beta^3$ und die conjugirte Projectivität φ_{52}. Durch 2 Paare entsprechender Strahlen und eine conjugirte Projectivität ist aber eine Projectivität eindeutig bestimmt. In der That, seien die den Geraden $\alpha^5\alpha^1$, $\alpha^5\alpha^3$ in φ_{52} entsprechenden Strahlen mit b^1, b^3 bezeichnet, so sind: b^1, $\beta^2\beta^1$ b^3, $\beta^2\beta^3$ entsprechende Strahlenpaare der resultirenden Projectivität, und da diese in unserem Falle eine Involution ist, so ist dieselbe durch diese beiden bekannten Strahlenpaare bestimmt. Nun kann man zu jedem Strahle durch α^5 den entsprechenden durch β^2 in Bezug auf die bisher noch nicht völlig bestimmte Projectivität

$$\alpha^5(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^4, \ldots)$$

finden. Um z. B. zu $\alpha^5\alpha^4$ den entsprechenden Strahl $\beta^2\beta^4$ zu finden, construire man den ihm in φ_{52} entsprechenden Strahl b^4, dann ist der gesuchte Strahl der zu b^4 entsprechende Strahl in der durch die zwei Strahlenpaare b^1, $\beta^2\beta^1$ und b^3, $\beta^2\beta^3$ völlig bestimmten resultirenden Involution v. Damit ist $\beta^2\beta^4$ bekannt. In genau derselben Weise kann man die dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität:

$$\alpha^5(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^4, \ldots) \barwedge \beta^3(\beta^1, \beta^2, \beta^4, \ldots)$$

benutzen, von welcher man ebenfalls 2 Strahlenpaare $\alpha^5\alpha^1$, $\beta^3\beta^1$ und $\alpha^5\alpha^2$, $\beta^3\beta^2$, und, da sie zu $\varphi(u, v)$ conjugirt ist, eine conjugirte Projectivität kennt, so dass in genau derselben Weise, wie soeben, $\beta^3\beta^4$ gefunden wird, und somit β^4, allein mit Hilfe des Lineals, als Schnittpunkt von $\beta^2\beta^4$ und $\beta^3\beta^4$ bekannt wird. Ebenso ergiebt sich β^5 durch analoge Benutzung der verbundenen Projectivitäten:

$$\alpha^4(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^5, \ldots) \barwedge \beta^3(\beta^1, \beta^2, \beta^5, \ldots)$$

und

$$\alpha^4(\alpha^1, \alpha^3, \alpha^5, \ldots) \barwedge \beta^2(\beta^1, \beta^3, \beta^5, \ldots).$$

Das so entstehende Fünfeck $\beta^1 \ldots \beta^5$ bildet mit dem Fünfeck $\alpha^1 \ldots \alpha^5$ zusammen ein polares System von $\varphi(u, v) = 0$, weil die 4 benutzten verbundenen Projectivitäten offenbar linear unabhängig und zu $\varphi(u, v)$ conjugirt sind (cf. p. 348, 349). Besonders merkwürdig ist es, dass sich das Punktepaar β^4, β^5 allein mit Hilfe des Lineals construiren lässt. — Ohne Beweis geben wir noch den Satz; *Zwei Vierecke* $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\end{matrix}$ *lassen sich durch genau* 2 *Punktepaare* α^5, β^5 *und* $\bar{\alpha}^5$, $\bar{\beta}^5$ *zu je einem Paar polarer Fünfseite einer gegebenen Reciprocität ergänzen.* Die beiden Punktepaare α^5, β^5 und $\bar{\alpha}^5$, $\bar{\beta}^5$ lassen sich unschwer nach den vorangeschickten Methoden construiren, worauf wir jedoch hier nicht näher eingehen wollen. —

§ 4.

Construction der quadratischen Verwandtschaft aus 7 entsprechenden Punktepaaren.

Sind 7 entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft $x^1, y^1, \ldots, x^7, y^7$ gegeben, und soll zu einem gegebenen 8^{ten} Punkt x^8 der entsprechende y^8 gefunden werden, so zeigten wir (p. 347), dass der gesuchte 8^{te} Punkt y^8 das Viereck $y^4y^5y^6y^7$ zu einem Fünfeck ergänzt, das mit dem Fünfeck $x^4x^5x^6x^7x^8$ ein polares System bildet einer reciproken Verwandtschaft $\varphi(u, v) = 0$, von welcher $\begin{smallmatrix} x^1 x^2 x^3 \\ y^1 y^2 y^3 \end{smallmatrix}$ ein Paar polarer Dreiecke bilden. Da $\begin{smallmatrix} x^1 x^2 x^3 \\ y^1 y^2 y^3 \end{smallmatrix}$ polare Dreiecke von $\varphi(u,v) = 0$ bilden, so sind die Ecken x^1, x^2, x^3 resp. die Polaren der Seiten: y^2y^3, y^3y^1, y^1y^2 *), so dass uns von der Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$ die Polaren der drei Punkte x^1, x^2, x^3 bekannt sind. Da ferner die beiden Fünfecke $\begin{smallmatrix} x^4 x^5 x^6 x^7 x^8 \\ y^4 y^5 y^6 y^7 y^8 \end{smallmatrix}$ ein polares System von $\varphi(u, v) = 0$ bilden sollen, so wissen wir, dass die beiden dem Fünfeckpaare verbundenen Projectivitäten:

$$x^8(x^5, x^6, x^7, \ldots) \,\overline{\wedge}\, y^4(y^5, y^6, y^7, \ldots),$$
$$x^8(x^4, x^6, x^7, \ldots) \,\overline{\wedge}\, y^5(y^4, y^6, y^7, \ldots)$$

in Bezug auf die Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$ conjugirt sind. Wir haben aber in § 2 gezeigt, dass man in Bezug auf eine Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$, von welcher man die Polaren dreier gegebener Punkte und zwei conjugirte Projectivitäten kennt, allein mit Hilfe des Lineals (durch Construction von 10 projectiven Elementen) zu jedem Element das entsprechende hinzufinden kann. Es ist uns somit die Reciprocität $\varphi(u,v) = 0$ vollkommen bekannt. Wir haben nun p. 349, 350 gezeigt, wie man — völlig linear — den Punkt y^8 so hinzufindet, dass $\begin{smallmatrix} x^4 x^5 x^6 x^7 x^8 \\ y^4 y^5 y^6 y^7 y^8 \end{smallmatrix}$ ein polares System einer gegebenen Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$ bilden. Es ist nämlich die dem Fünfeckpaare verbundene Projectivität:

$$x^7(x^4, x^6, x^8, \ldots) \,\overline{\wedge}\, y^5(y^4, y^6, y^8, \ldots)$$

bekannt durch 2 entsprechende Strahlenpaare x^7x^4, y^5y^4 und x^7x^6, y^5y^6 und durch die ihr conjugirte Reciprocität φ, welche in der Projectivität φ_{75}, die durch die den Strahlenbüscheln x^7, y^5 angehörigen Nullpaare von φ gebildet wird, eine zu der obigen Projectivität conjugirte Projectivität liefert. Entsprechen b^4, b^6, b^8 resp. in φ_{75} den Strahlen

*) Cf. Crelles Journal Bd. 90, p. 305.

x^7x^4, x^7x^6, x^7x^8, so ist y^5y^8 der dem Strahl b^8 entsprechende Strahl in der durch die beiden Strahlenpaare y^5y^4, b^4 und y^5y^6, b^6 definirten Involution. Ebenso findet man y^4y^8 aus der genau ebenso uns bekannten dem Fünfeckpaare verbundenen Projectivität:

$$x^7(x^5, x^6, x^8, \ldots) \barwedge y^4(y^5, y^6, y^8, \ldots).$$

Zusammenfassend haben wir also folgende:

Construction. In der durch das Paar polarer Dreiecke $\begin{matrix} x^1 x^2 x^3 \\ y^1 y^2 y^3 \end{matrix}$ und die beiden conjugirten Projectivitäten:

$$x^8(x^5, x^6, x^7, \ldots) \barwedge y^4(y^5, y^6, y^7, \ldots)$$

und

$$x^8(x^4, x^6, x^7, \ldots) \barwedge y^5(y^4, y^6, y^7, \ldots)$$

eindeutig bestimmten Reciprocität φ (cf. § 2) ergänzen wir $y^4y^5y^6y^7$ (cf. § 3) durch einen eindeutig bestimmten Punkt y^8 zu einem Fünfeck, welches mit $x^4x^5x^6x^7x^8$ ein polares System von φ bildet. Der Punkt y^8 ist der gewünschte dem Punkte x^8 in der durch die 7 Punktepaare x^1, $y^1, \ldots, x^7$, y^7 definirten quadratischen Verwandtschaft entsprechende Punkt. Die Construction ist eine durchaus lineare und ihre Ausführung verhältnissmässig einfach, es sind im Ganzen 16 projective Elemente (darunter 2 involutorische) zu construiren.*)

§ 5.

Construction der beiden durch 7 gegebene polare Punktepaare und ein polares Geradenpaar bestimmten Reciprocitäten.

Wir konnten (§ 1) eine Reciprocität sowohl durch eine bilineare Gleichung $f(x, y) = 0$ zwischen Punktcoordinaten, als auch durch eine solche: $\varphi(u, v) = 0$ zwischen Liniencoordinaten darstellen. Wir verstanden unter Nullpaaren der Reciprocität sowohl die Punktepaare x, y, welche Nullpaare von $f(x, y)$, als auch die Geradenpaare u, v, welche Nullpaare von $\varphi(u, v)$ waren. Um diese beiden Arten von Nullpaaren fortan zu unterscheiden, nennen wir *„polare Punktepaare"* der Reciprocität jedes Nullpaar x, y von $f(x, y)$, *„polare Geradenpaare"* jedes Nullpaar u, v von $\varphi(u, v)$, sodass ein polares Punkte-(Geraden-)Paar ein solches ist, bei welchem jeder Punkt (Gerade) die Polare (Pol) des andern enthält. Wo kein Missverständniss möglich ist, sollen beide Gebilde wieder als Nullpaare der Reciprocität bezeichnet werden.

Sind 7 Punktepaare α^ϱ, β^ϱ ($\varrho = 1, \ldots, 7$) und ein Geradenpaar a, b gegeben, so existiren 2 reciproke Verwandtschaften, von welchen

*) Von sonstigen Lösungen desselben Problems vgl. Schröter: Problematis geometrici etc. Crelle's Journ. Bd. 62; Reye: Geometrische Verwandtschaften II. Grades, Zeitschr. f. Math. Bd. 11.

$\alpha^\varrho\,\beta^\varrho$ polare Punktepaare und a, b ein polares Geradenpaar bilden. Denn stellen wir eine solche Reciprocität dar durch:

$$f(x,y)=\sum a_{ik}x_iy_k,$$

so haben wir für die Grössen a_{ik} die Gleichungen:

$$f(\alpha^\varrho,\beta^\varrho)=\sum a_{ik}\alpha_i^\varrho\beta_k^\varrho=0 \quad (\varrho=1,\ldots,7),$$

$$\varphi(a,b)=\sum \alpha_{ik}a_i\,b_k=0,$$

wo α_{ik} die Adjuncte von a_{ik} in $|a_{ik}|$ $(i,k=1,2,3)$ bedeutet, so dass wir für die 9 Grössen a_{ik} 7 lineare und eine quadratische Gleichung haben, wodurch 2 Systeme von Grössen a_{ik} bestimmt werden.

Es sollen die beiden durch 7 gegebene polare Punktepaare $\alpha^\varrho\,\beta^\varrho$ $(\varrho=1,\ldots,7)$ und ein polares Geradenpaar a, b bestimmten Reciprocitäten $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ construirt werden. Durch die 7 Punktepaare α^ϱ, β^ϱ ist eine quadratische Verwandtschaft bestimmt, welche diese 7 Paare zu entsprechenden Paaren hat. Die Punkte, welche der Geraden a entsprechen, erfüllen den der Geraden u correspondirenden Kegelschnitt. Schneidet derselbe die Gerade b in B_1, B_2, so existiren in a 2 Punkte A_1, A_2 derart, dass A_1B_1, A_2B_2 entsprechende Paare der quadratischen Verwandtschaft bilden. Bedeutet nun A einen von A_1, A_2 verschiedenen Punkt von a, und bezeichnen wir mit f_1 die durch die 8 uns bekannten Nullpaare α^ϱ, β^ϱ; A, B_1 und mit f_2 die durch die 8 uns bekannten Nullpaare α^ϱ, β^ϱ; A, B_2 definirte Reciprocität, so sind f_1 und f_2 die gesuchten Reciprocitäten. Denn es besitzt z. B. f_1 die 7 Punktepaare α^ϱ, β^ϱ zu Nullpaaren und mithin auch das Punktepaar A_1B_1 da jede Reciprocität, welche 7 entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft zu Nullpaaren hat, auch alle anderen entsprechenden Paare als Nullpaare besitzt. Ferner bildet AB_1 ein Nullpaar von f_1, so dass B_1 der Pol von AA_1 $d.i.\ a$ ist; nun liegt B_1 auf b, so das a und b ein polares Geradenpaar von f_1 bilden, also f_1 die eine, und ebenso f_2 die zweite der gewünschten Reciprocitäten ist. Man hat also folgende:

Construction: In derjenigen völlig bestimmten quadratischen Verwandtschaft, welche α^ϱ, α^ϱ $(\varrho=1,\ldots,7)$ zu entsprechenden Punkten besitzt, sei K der der Geraden a correspondirende Kegelschnitt. Bezeichnen wir mit B_1, B_2 die Schnittpunkte von K mit b, und ist A ein beliebiger Punkt von a, so sind die beiden (cf. § 4) vollständig bestimmten Reciprocitäten f_1 und f_2, welche die 8 Punktepaare α^ϱ, β^ϱ; A, B_1 resp. α^ϱ, β^ϱ; A, B^2 zu Nullpaaren haben, die gewünschten. — Die Aufgabe: *Wenn 7 Geradenpaare a^i, b^i und ein Punktepaar α, β*

gegeben ist, eine Reciprocität zu finden, von welcher diese 8 *Paare Nullpaare sind*, steht der vorigen dual gegenüber, und wird daher durch duale Uebertragung erledigt. —

§ 6.

Die gemeinsamen Nullpaare dreier Reciprocitäten.

Sind durch 3 bilineare — linear unabhängige — Formen $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f''(x, y)$ 3 Reciprocitäten definirt, so besitzen diese und die durch dieselben bestimmte dreigliedrige Gruppe (Netz) eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Nullpaare (polarer Punktepaare). Die Punkte der X-Ebene, welche einem gemeinsamen Nullpaare zugehören, erfüllen eine Curve 3ter Ordnung C^3: $D = 0$, und ebenso die entsprechenden Punkte der Y-Ebene eine zweite C^3: $\Delta = 0$. Jeder Punkt x von $D = 0$ wird durch einen eindeutig bestimmten Punkt y von $\Delta = 0$ zu einem gemeinsamen Nullpaar von $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f''(x, y)$ ergänzt, und umgekehrt, so dass die beiden Curven $D = 0$, $\Delta = 0$ eindeutig auf einander bezogen sind.*) Sind 6 Punktepaare α^i, β^i $(i = 1, \ldots, 6)$ gegeben, so wird dadurch eine dreigliedrige Gruppe bestimmt, von welcher sie gemeinsame Nullpaare sind, so dass durch 6 gemeinsame Nullpaare einer dreigliedrigen Gruppe alle weiteren bestimmt sind. Sind demnach 6 gemeinsame Nullpaare α^i, β^i $(i = 1, \ldots, 6)$ von f, f', f'' bekannt, so sind alle weiteren durch sie bestimmt, so dass sich aus diesen 6 Nullpaaren die beiden C^3: $D = 0$, $\Delta = 0$ erzeugen lassen müssen. Legen wir durch α^6 eine beliebige Gerade u, so wird dieselbe die C^3: $D = 0$ in noch 2 weiteren Punkten α^7, $\bar{\alpha}^7$ schneiden, nennen wir β^7, $\bar{\beta}^7$ die ihnen entsprechenden Punkte auf $\Delta = 0$, so sollen diese beiden weiteren Nullpaare α^7, β^7 und $\bar{\alpha}^7$, $\bar{\beta}^7$ contruirt werden, und da damit die Schnitte jeder beliebigen Geraden u durch α^6 mit $D = 0$ bestimmt sind, so wird damit eine Erzeugung der C^3: $D = 0$ erlangt sein.

Betrachten wir die 7 speciellen Formen:

$$u(\alpha^i)\, v(\beta^i) \quad (i = 1, \ldots, 7),$$

so sind dieselben conjugirt zu $f(x,y)$, $f'(x,y)$, $f''(x,y)$, da α^i, β^i $(i = 1, \ldots, 7)$ Nullpaare von f, f', f'' sind; die 7 speciellen Formen gehören daher der zu f, f', f'' gehörigen conjugirten 6-gliedrigen Gruppe an, sind also linear abhängig, so dass eine Identität folgender Form zwischen ihnen besteht:

$$\sum_{i=1}^{7} k_i u(\alpha^i)\, v(\beta^i) = 0.$$

---

*) Cf. Cr. Journ. Bd. 88, p. 248.

Also ist:

$$\sum_{\varrho=1}^{4} k_\varrho u(\alpha^\varrho) v(\beta^\varrho) = -\sum_{\sigma=5}^{7} k_\sigma u(\alpha^\sigma) v(\beta^\sigma) = \varphi(u, v)$$

d. h.:

Sind α^i, β^i $(i=1, \ldots, 7)$ 7 *gemeinsame Nullpaare dreier bilinearen Formen, so bilden die beiden Vierecke* $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\end{matrix}$ *und die beiden Dreiecke* $\begin{matrix}\alpha^5\alpha^6\alpha^7\\ \beta^5\beta^6\beta^7\end{matrix}$ *polare Systeme einer und derselben Reciprocität.* Sind nun $\alpha^1, \beta^1; \ldots; \alpha^6, \beta^6$ und die Gerade $u = \alpha^6\alpha^7$ gegeben, so sind α^7 und β^7 so zu bestimmen, dass sie die beiden Punktepaare α^5, β^5 und α^6, β^6 zu einem Paar polarer Dreiecke einer Reciprocität ergänzen, von welcher $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\end{matrix}$ ein Paar polarer Vierecke bilden. Von dieser Reciprocität bilden die Geradenpaare:

$$\alpha^1\alpha^2, \beta^3\beta^4;\ \alpha^1\alpha^3, \beta^2\beta^4;\ \alpha^1\alpha^4, \beta^2\beta^3;\ \alpha^2\alpha^3, \beta^1\beta^4;\ \alpha^2\alpha^4, \beta^1\beta^3;\ \alpha^3\alpha^4, \beta^1\beta^2$$

— als zugeordnete Seitenpaare polarer Vierecke — 6 polare Geradenpaare von $\varphi(u, v) = 0$, die aber, da sie ein abhängiges System bilden*), nur 5 unabhängigen Geradenpaaren äquivalent sind. Ferner ist $u = \alpha^6\alpha^7$ die Polare von β^5, so dass u mit 2 beliebigen Geraden v, v' durch β^5 zwei weitere polare Geradenpaare uv, uv' liefert. Schliesslich bilden α^5, β^6 noch ein polares Punktepaar von $\varphi(u, v) = 0$. Danach sind uns von der in Rede stehenden Reciprocität $\varphi(u, v) = 0$ bekannt 7 polare Geradenpaare und ein polares Punktepaar. Wir haben im vorigen Paragraphen gesehen, dass es genau 2 Reciprocitäten von der gewünschten Art giebt, und haben gelernt, dieselben zu construiren. Bedeuten $\alpha^5\alpha^7$ und $\alpha^5\bar{\alpha}^7$ die beiden Polaren von β^6 in Bezug auf diese beiden Reciprocitäten, so erhalten wir in deren Schnittpunkten $\alpha^7, \bar{\alpha}^7$ mit u die beiden gewünschten Schnittpunkte von u mit $D = 0$ und in den Polen $\beta^7, \bar{\beta}^7$ von $\alpha^5\alpha^6$ in Bezug auf diese beiden Reciprocitäten die zu $\alpha^7, \bar{\alpha}^7$ entsprechenden Punkte von $\Delta = 0$.

Damit sind die Schnittpunkte der $C^3 : D = 0$ auf jeder beliebigen Geraden u durch α^6 bestimmt, und damit eine Erzeugung dieser Curve und in analoger Weise der ihr entsprechenden $C^3 : \Delta = 0$ gegeben. —

---

*) Cf. Cr. Journ. Bd. 90, p. 313.

§ 7.

Anwendung auf die Construction der Flächen 2ter Ordnung und der Raumcurven 4ter Ordnung aus einer hinreichenden Anzahl ihrer Punkte.

Die im Vorigen geleisteten Constructionen der gemeinsamen Nullpaare von 2 und 3 Reciprocitäten aus resp. 7 und 8 gegebenen dieser Nullpaare (cf. §§ 4, 6) enthalten als specielle Fälle unter sich Lösungen des wichtigen Problems der Erzeugung einer Fläche 2ter Ordnung (Fl^2) und einer Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species (C^4) aus 9 resp. 8 ihrer Punkte. Sind zunächst 9 Punkte im Raume (nicht auf derselben Raumcurve 4ter Ordnung) $X^1, \ldots, X^9$ gegeben, so wird die durch diese bestimmte Fl^2 sich durch 2 reciproke Strahlenbündel, deren Scheitel in X^8, X^9 sich befinden, in der bekannten Weise erzeugen lassen*). Die dem Strahl $X^8\,X^\varrho$ ($\varrho = 1, \ldots, 7$) entsprechende Ebene wird den Strahl $X^9\,X^\varrho$ enthalten. Schneiden wir die reciproken Bündel durch eine beliebige Ebene E, so schneidet E jeden Strahl und die entsprechende Ebene in resp. einem Punkt und einer Geraden, welche entsprechende Elemente einer auf E befindlichen Reciprocität R bilden. Bedeutet nun X einen beliebigen Punkt der Fl^2 und bezeichnen wir die Schnittpunkte von X^8X, X^9X mit E resp. durch x, y, so sind die Punktepaare x, y Nullpaare dieser Reciprocität R. Dieselben Punktepaare sind aber auch Nullpaare einer zweiten Reciprocität; denn da $X^8\,X$ und $X^9\,X$ derselben Ebene angehören, so liegen x, y mit dem Schnittpunkte ξ von X^8X^9 mit E in derselben Geraden, es sind somit x, y Nullpaare der durch die bilineare Gleichung $(\xi x y) = 0$**) dargestellten Reciprocität, durch welche jedem Punkte x von E die Gerade ξx zugeordnet wird. Mithin sind die Punktepaare x, y, in welche die Punkte X der Fl^2 aus X^8 und X^9 auf E projicirt werden, gemeinsame Nullpaare der beiden Reciprocitäten R und $(\xi x y) = 0$, also entsprechende Punktepaare einer quadratischen Verwandtschaft. Durch 7 derselben sind uns alle weiteren bekannt. Nun kennen wir aber ausser X^8, X^9 noch 7 weitere Punkte von Fl^2 nämlich $X^1 \ldots X^7$, ihre Projectionen aus X^8, X^9 auf E liefern 7 entsprechende Punktepaare x^ϱ, y^ϱ ($\varrho = 1, \ldots, 7$) dieser quadratischen Verwandtschaft. Nach der in § 4 gelehrten Methode können wir in dieser Verwandtschaft zu

---

*) Cf. Schröter: Oberflächen 2. Ordnung p. 452.

**) Dabei bedeutet, wie üblich: $(\xi x y)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

wo ξ_i, x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) die ebenen Coordinaten von resp. ξ, x, y bedeuten.

jedem beliebigen Punkte x den entsprechenden y linear finden, mithin auf jedem beliebigen Strahl X^8x durch X^8 durch seinen Schnittpunkt X mit X^9y den zweiten Schnittpunkt mit Fl^2, wodurch successive eine Erzeugung aller Punkte von Fl^2 gegeben ist. Die in § 4 gegebene Construction des zu x entsprechenden Punktes y gestaltet sich vermöge der speciellen Beschaffenheit der Reciprocität $(\xi xy) = 0$ etwas einfacher, indem uns in dem Strahl ξx bereits eine Gerade für y gegeben ist, so dass nur noch *eine* weitere Gerade (nicht 2, wie im allgemeinen Fall) für y zu construiren ist. Während im allgemeinen Falle 16 projective Elemente zu construiren waren, sind hier nur 14 projective Elemente (darunter ein involutorisches) zu construiren nöthig. —

Raumcurven vierter Ordnung erster Species, C^4: Die Durchdringungscurve zweier Fl^2 und damit aller Fl^2 des durch diese constituirten Flächenbüschels ist eine Raumcurve 4ter Ordnung 1ter Species C^4 und ist, wie das Flächenbüschel durch 8 (nicht associirte) Punkte bestimmt. Sind also 8 Punkte X^i $(i = 1, \ldots, 8)$ derselben gegeben, so müssen sich alle weiteren dadurch bestimmen und die Curve aus ihnen erzeugen lassen. Projiciren wir die Curve aus den beiden Punkten X^8, X^7 auf irgend eine Ebene E, so sind diese beiden Projectionen 2 ebene Curven dritter Ordnung: C^3 und Γ^3; nennen wir x die Projection des Curvenpunktes X aus X^7, und y die aus X^8, so entspricht jedem Punkte x von C^3 ein Punkt y von Γ^3 und umgekehrt, so dass diese beiden Curven eindeutig auf einander bezogen sind. Je 2 entsprechende Punkte x, y dieser beiden Curven, die also die Projectionen desselben Curvenpunktes von C^4 auf E sind, sind gemeinsame Nullpaare von 3 Reciprocitäten. Ist nämlich F_1 eine der durch C^4 gehenden Fl^2, so wird diese Fl^2 durch eine reciproke Beziehung der beiden Bündel X^7, X^8 erzeugt, die entsprechenden Elemente dieser reciproken Bündel werden von der Ebene E ebenfalls in entsprechenden Elementen einer Reciprocität, welche mit R_1 bezeichnet sei, geschnitten, und es sind alle Punktepaare x, y, welche Projectionen desselben Punktes X von C^4 sind, Nullpaare von R_1. Ist F_2 eine zweite Fl^2 des Büschels und hat R_2 für diese die nämliche Bedeutung, wie R_1 für F_1, so sind alle Punktepaare x, y auch Nullpaare der Reciprocität R_2. Schliesslich liegen, da X^7X, X^8X derselben Ebene angehören, ihre Schnitte x, y mit E in derselben Geraden mit ξ, dem Schnittpunkt von X^7X^8 mit E, so dass: $(\xi xy) = 0$ ist, und daher die Punktepaare x, y Nullpaare der durch diese bilineare Gleichung dargestellten dritten Reciprocität sind. Die gemeinsamen Nullpaare von 3 Reciprocitäten bilden aber (cf. § 6) eine 6-gliedrige Gruppe, aus 6 Paaren haben wir alle weiteren construiren gelernt. Nun bilden aber, wenn wir die Schnitte von E mit X^7X^ϱ, X^8X^ϱ resp. mit x^ϱ, y^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, 6)$ bezeichnen, die 6 Punktepaare x^ϱ, y^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, 6)$ 6 uns bekannte gemeinsame

Nullpaare und wir haben gezeigt (§ 6), wie man alle weiteren construirt, indem wir die auf einer beliebigen Geraden u durch x^6 liegenden beiden übrigen Punkte von C^3: $x^7, \bar{x}^7$ und die ihnen resp. entsprechenden $y^7, \bar{y}^7$ construirten. Somit ergiebt sich, dass wir die Projectionen der Punkte von C^4 aus X^7, X^8 auf E und damit diese Punkte selbst construiren können. Jede beliebige Ebene e durch $X^7 X^6$ schneidet E in einer Geraden u, auf der wir die beiden Schnittpunkte $x^7, \bar{x}^7$ mit C^3 finden können, sind $y^7, \bar{y}^7$ die beiden entsprechenden Punkte, so geben die Schnittpunkte:

$$(X^8 y^7,\ X^7 x^7) \quad \text{und} \quad (X^8 \bar{y}^7,\ X^7 \bar{x}^7)$$

die beiden weiteren Schnittpunkte von e mit C^4, so dass wir auf diese Weise für jede Ebene e des Ebenenbüschels durch $X^7 X^6$ die beiden weiteren Schnittpunkte mit C^4 erhalten. Auch hier wird die Construction durch den Umstand, dass die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte x, y durch den festen Punkt ξ geht, einigermassen vereinfacht. —

Ueber die gemeinsamen Nullpaare von 4 Reciprocitäten und deren Benutzung zur Construction des achten Schnittpunkts dreier Fl^2 vgl. die angeführten Arbeiten von Herrn Rosanes Cr. J. Bd. 88, 90, sowie eine Arbeit von Herrn Sturm Cr. J. Bd. 99. —

§ 8.

Directe Erzeugung der Fläche zweiter Ordnung aus 9 ihrer Punkte. Erste Construction.

Das im vorigen Paragraphen behandelte Problem der Erzeugung der Fl^2 und C^4 aus einer hinreichenden Anzahl ihrer Punkte ist aber auch einer directen Behandlung mittels der oben auseinandergesetzten Methode fähig, welche zu ganz besonders einfachen Constructionen führt. Denn sind α^i $(i = 1, \ldots, 10)$ 10 Punkte einer Fl^2, und

$$u(\alpha^i) = u_1 \alpha_1^i + u_2 \alpha_2^i + u_3 \alpha_3^i + u_4 \alpha_4^i = 0$$

ihre Gleichungen, so besteht bekanntlich zwischen den 10 quadratischen Formen $u(\alpha^i)^2$ $(i = 1, \ldots, 10)$ eine lineare Identität von der Form:

$$\sum_{i=1}^{10} k_i u(\alpha^i)^2 = 0,$$

diese schreiben wir:

$$\sum_{\varrho=1}^{4} k_\varrho\, u(\alpha^\varrho)^2 = -\sum_{\sigma=5}^{10} k_\sigma\, u(\alpha^\sigma)^2 = \varphi(u, u), \quad \text{d. h.}$$

Sind α^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, 10)$ 10 *Punkte einer* Fl^2, *so existirt eine Fläche* 2^{ter} *Classe* $\varphi(u,u) = 0$, *von welcher* $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ *Polartetraeder und* $\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8\alpha^9\alpha^{10}$

Polarsechseck ist. *) Sind also 9 Punkte $\alpha^1, \ldots, \alpha^9$ einer Fl^2 gegeben, so ergänzt jeder zehnte α^{10} die 5 Punkte $\alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9$ zu einem Polarsechseck einer zweiten Fl^2: $\varphi(u, u) = 0$, von welcher $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ ein Polartetraeder ist. Wir können eine Gerade u durch α^9 beliebig annehmen und nach dem eindeutig bestimmten zweiten Schnittpunkt α^{10} von u mit der Fläche fragen. Wir wollen α^{10} auf u in der oben angedeuteten Weise so bestimmen, dass $\alpha^1 \ldots \alpha^4$ Polartetraeder, $\alpha^5 \ldots \alpha^{10}$ Polarsechseck ein und derselben Fläche 2ter Classe $\varphi(uu) = 0$ wird. Da $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ Polartetraeder von $\varphi(uu) = 0$ ist, so kennen wir in den 6 Ebenenpaaren derselben:

$$\alpha^1\alpha^2\alpha^3,\ \alpha^1\alpha^2\alpha^4;\ \alpha^1\alpha^2\alpha^3,\ \alpha^1\alpha^3\alpha^4;\ \alpha^1\alpha^2\alpha^3,\ \alpha^2\alpha^3\alpha^4;\ \alpha^1\alpha^2\alpha^4,\ \alpha^2\alpha^3\alpha^4;$$
$$\alpha^1\alpha^2\alpha^4,\ \alpha^1\alpha^3\alpha^4;\ \alpha^2\alpha^3\alpha^4,\ \alpha^1\alpha^3\alpha^4$$

6 conjugirte Ebenenpaare des Polarsystems von $\varphi(uu) = 0$. Da ferner die gegenüberliegenden Ebenenpaare eines Polarsechsecks conjugirte Ebenenpaare von $\varphi(uu) = 0$ sind **), so erhalten wir, wenn wir die Kante $\alpha^9\alpha^{10}$, wie oben, mit u bezeichnen, in:

$$u\alpha^5,\ \alpha^6\alpha^7\alpha^8;\ u\alpha^6,\ \alpha^5\alpha^7\alpha^8;\ u\alpha^7,\ \alpha^5\alpha^6\alpha^8;\ u\alpha^8,\ \alpha^5\alpha^6\alpha^7$$

4 weitere conjugirte Ebenenpaare des Polarsystems von $\varphi(uu) = 0$, die aber, wie man leicht erkennt, nur 3 unabhängigen conjugirten Ebenenpaaren äquivalent sind, da jede Fläche 2ten Grades, in Bezug auf welche 3 derselben conjugirt sind, auch das vierte Paar als conjugirtes Ebenenpaar besitzt. Somit kennen wir von dem Polarsysteme von $\varphi(uu) = 0$ 9 conjugirte Ebenenpaare, dadurch ist aber ein Polarsystem eindeutig bestimmt; wir werden unten zeigen, dass bei der hier stattfindenden speciellen Lage der conjugirten 9 Ebenenpaare man im Stande ist, in einfacher Weise zu jedem Punkte (Ebene) die zugehörige Polarebene (Pol) für dieses Polarsystem linear zu construiren. Construiren wir nun in Bezug auf das so bestimmte Polarsystem den Pol der Ebene $\alpha^5\alpha^6\alpha^9$, so muss derselbe auf der zu $\alpha^5\alpha^6\alpha^9$ conjugirten Ebene $\alpha^7\alpha^8\alpha^{10}$ liegen, so dass seine Verbindungsebene mit der Geraden $\alpha^7\alpha^8$ die Ebene $\alpha^7\alpha^8\alpha^{10}$ ist; dieselbe ist daher bestimmt und schneidet u in dem gesuchten zweiten Schnittpunkt α^{10} mit Fl^2. —

Hilfsaufgabe: *Von einer Fläche zweiter Classe* $\varphi(uu) = 0$ *ist ein Polartetraeder* $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ *und 3 Paare conjugirter Ebenen* u^1v^1; u^2v^2; u^3v^3 *gegeben, es soll zu einem beliebigen Element das polare Element construirt werden.*

Wir betrachten das Netz von Flächen zweiter Classe, welche

---

*) Cf. P. Serret: Géométrie de direction p. 444, dort wird ein Polarsechseck: „Hexaèdre conjugué" genannt; Reye: Ueber Polfünfecke und Polsechsecke räumlicher Polarsysteme, Cr. Journ. Bd. 77.

**) Cf. Reye, Serret a. a. O.

$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ zum Polartetraeder und u^1, v^1 als conjugirtes Ebenenpaar besitzen. Die Gleichung jeder Fläche desselben hat die Gestalt:

$$k_1 u(\alpha^1)^2 + k_2 u(\alpha^2)^2 + k_3 u(\alpha^3)^2 + k_4 u(\alpha^4)^2 = 0$$

und damit u^1, v^1 conjugirt seien, muss:

$$k_1 u^1(\alpha^1) v^1(\alpha^1) + k_2 u^1(\alpha^2) v^1(\alpha^2) + k_3 u^1(\alpha^3) v^1(\alpha^3) + k_4 u^1(\alpha^4) v^1(\alpha^4) = 0,$$

also ergiebt sich durch Subtraction:

$$\sum_{i=1}^{3} k_i \left\{ u^1(\alpha^4)\, v^1(\alpha^4)\, u(\alpha^i)^2 - u^1(\alpha^i)\, v^1(\alpha^i)\, u(\alpha^4)^2 \right\} = 0.$$

Dies ist die Gleichung irgend einer Fläche des Netzes, die Grössen k_1, k_2, k_3 bedeuten willkürliche Parameter. Das Netz enthält demnach die 3 speciellen Flächen 2ter Classe:

$$u^1(\alpha^4) v^1(\alpha^4) u(\alpha^i)^2 - u^1(\alpha^i) v^1(\alpha^i) u(\alpha^4)^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Diese 3 speciellen Flächen 2ter Classe sind Punktepaare; das dem Werthe $i = 1$ entsprechende ist auf der Tetraederkante $\alpha^1\alpha^4$ zu den Ecken α^1 und α^4 harmonisch gelegen; es liegt ferner harmonisch mit den Schnittpunkten u^1_{14}, v^1_{14} von u^1, v^1 mit $\alpha^1\alpha^4$, da $u^1 v^1$ conjugirt in Bezug auf alle Flächen unseres Netzes ist, also auch in Bezug auf die durch dieses Punktepaar dargestellte. Der Pol jeder Ebene u in Bezug auf die durch dieses Punktepaar dargestellte Fläche 2ter Classe bildet mit dem Schnittpunkt u_{14} von u mit $\alpha^1\alpha^4$ ein Punktepaar, das der durch die beiden Punktepaare α^1, α^4 und u^1_{14}, v^1_{14} auf $\alpha^1\alpha^4$ definirten Involution angehört, so dass der Pol einer jeden Ebene u in Bezug auf diese specielle Fläche 2ter Classe des Netzes durch Construction eines 6ten involutorischen Elementes bestimmt ist. Analog sind die Pole von u in Bezug auf die beiden anderen speciellen Flächen des Netzes, welche Punktepaare resp. auf $\alpha^2\alpha^4$, $\alpha^3\alpha^4$ darstellen, zu construiren möglich. Die Pole von u in Bezug auf alle Flächen 2ter Classe unseres Netzes sind auf einer Ebene $\bar{v}$ gelegen, der zu u in Bezug auf das ganze Netz „*conjugirten Ebene*". Da man die Pole von u in Bezug auf die obigen 3 speciellen Flächen, welche das Netz constituiren, linear (durch Construction von 3 involutorischen Elementen) auffinden kann, so kennt man in ihrer Verbindungsebene $\bar{v}$ die in Bezug auf das ganze Netz zu u conjugirte Ebene. Unsere gesuchte Fläche 2ter Classe $\varphi(uu) = 0$ gehört dem Netze an, folglich liegt der Pol von u^3 in Bezug auf $\varphi(uu) = 0$ ebenfalls auf der zu u^3 in Bezug auf das Netz conjugirten Ebene $\bar{v}^3$, welche in der oben gezeigten Weise linear construirt werden kann. — Betrachten wir nun genau ebenso das Netz von Flächen 2ter Classe, welches $\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4$ zum Polartetraeder und u^2, v^2 als conjugirtes Ebenenpaar besitzt, so kann man völlig analog die zu u^3 in Bezug auf alle Flächen dieses Netzes conjugirte Ebene $\bar{\bar{v}}^3$ construiren,

auf dieser liegt der Pol U^3 von u^3 in Bezug auf $\varphi(uu) = 0$; derselbe ist also der Schnittpunkt der 3 bekannten Ebenen v^3, $\bar{v}^3$, $\bar{\bar{v}}^3$ und somit ist zur Ebene u^3 in dem gesuchten Polarsystem der Pol U^3 durch Construction von 6 involutorischen Elementen gefunden. Durch ein Polartetraeder und den Pol U^3 von u^3 ist nun aber das ganze Polarsystem von $\varphi(uu) = 0$ bestimmt, um zu einer Ebene (Punkt) den Pol (Polarebene) zu finden, sind 3 involutorische Elemente zu construiren nöthig.*) Zur Construction des Punktes U^3 selbst bedurfte es der Construction von 6 involutorischen Elementen, so dass die ganze Construction des zweiten Schnittpunktes einer beliebigen Geraden durch α^9 mit einer durch die 9 Punkte $\alpha^1 \dots \alpha^9$ bestimmten Fläche 2ter Ordnung im Ganzen der Auffindung von nur 9 involutorischen Elementen bedarf. Wir können daher nun auf jeder Geraden u durch α^9 den zweiten Schnittpunkt mit der Fläche construiren, also diese vollständig successive erzeugen. —

Zweite Construction: Wir wollen noch eine zweite Construction der Fläche 2ter Ordnung Fl^2 angeben, welche den „natürlichen"**) Weg ihrer Erzeugung aus 9 gegebenen Punkten einschlägt, indem sie die Bündel, welche 2 der gegebenen Punkte zu Scheiteln haben, in eine derartige reciproke Beziehung zu setzen lehrt, dass durch dieselbe die Fläche 2ter Ordnung erzeugt wird. Dazu ist es, wie wir erkennen werden, nur nöthig, auf der von 3 der 9 Punkte α^1, α^2, α^3 bestimmten Ebene den Kegelschnitt aufzufinden, welchen die Fl^2 auf dieser Ebene ausschneidet; da 3 Punkte α^1, α^2, α^3 desselben bekannt sind, so sind nur noch zwei weitere seiner Punkte hinzuzufinden. Wir wollen daher dieses Problem zunächst in Angriff nehmen, und folgen darin dem Gedankengang von Herrn Paul Serret***), dessen Construction sich jedoch etwas vereinfachen lässt. Es seien $\alpha^1, \dots, \alpha^9$ die 9 gegebenen Punkte der Fl^2, es soll ein 10ter Punkt α gefunden werden, welcher auf dem von Fl^2 in der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ ausgeschnittenen Kegelschnitt sich befindet. Aus der p. 359 hergeleiteten Identität für 10 Punkte $\alpha, \alpha^1, \dots, \alpha^9$ derselben Fl^2:

$$ku(\alpha)^2 + k_1 u(\alpha^1)^2 + k_2 u(\alpha^2)^2 + k_3 u(\alpha^3)^2 = -\sum_{\sigma=4}^{9} k_\sigma u(\alpha^\sigma)^2 = \varphi(u, u)$$

ergiebt sich, da α, α^1, α^2, α^3 derselben Ebene angehören, dass die Determinante von

$$\varphi(u, u) = ku(\alpha)^2 + k_1 u(\alpha^1)^2 + k_2 u(\alpha^2)^2 + k_3 u(\alpha^3)^2$$

verschwinden muss, da dieselbe offenbar die Determinante $(\alpha\alpha^1\alpha^2\alpha^3) = 0$

*) Cf. Fiedler: Darstellende Geometrie Bd. III, p. 597 ff. 3te Aufl.

**) Cf. Schröter; Oberflächen 2. Ordnung p. 475. 476.

***) Cf. P. Serret: Géometrie de direction p. 442.

als Factor enthält. Die Fläche 2ter Classe $\varphi(uu) = 0$, welche $\alpha\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ zum Polartetraeder, $\alpha^4\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8\alpha^9$ zum Polarsechseck besitzt, ist also eine specielle und zwar bekanntlich ein der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ angehöriger Kegelschnitt.*) Das Polarsystem dieser speciellen Fläche 2ter Classe $\varphi = 0$ reducirt sich auf dasjenige des ebenen Kegelschnittes in $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, indem der Pol irgend einer Ebene u in Bezug auf $\varphi = 0$ nichts anderes ist, als der Pol der Schnittgeraden von u mit $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ in Bezug auf den in Rede stehenden Kegelschnitt, der nun ebenfalls als „Kegelschnitt φ" bezeichnet werde. Das Viereck $\alpha\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ ist offenbar ein Polarviereck dieses Kegelschnitts φ, und da das Sechseck $\alpha^4\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8\alpha^9$ ein Polarsechseck der speciellen Fläche 2ter Classe $\varphi(uu) = 0$ war, also seine Gegenebenenpaare conjugirt in Bezug auf $\varphi(uu) = 0$ sind, so sind die Schnittgeraden dieser 10 Gegenebenenpaare mit $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ 10 conjugirte Geradenpaare in Bezug auf den Kegelschnitt φ. Da nun aber alle 10 Gegenebenenpaare eines Sechsecks in Bezug auf eine Fläche 2ter Classe conjugirt sind, wenn 4 (linear unabhängige) conjugirt sind**), so werden auch alle Kegelschnitte der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, weil sie als specielle Flächen 2ter Classe auffassbar sind, die 10 Geradenpaare, in welchen die 10 Gegenebenenpaare des Sechsecks die Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ schneiden, als conjugirte Geradenpaare besitzen, wofern für sie 4 dieser Geradenpaare conjugirt sind. Die 10 Geradenpaare, in welchen die Gegenebenenpaare eines Sechsecks von einer Ebene geschnitten werden, sind also so beschaffen, dass jeder Kegelschnitt, welcher 4 von ihnen zu conjugirten Geradenpaaren hat, auch die übrigen als conjugirte Geradenpaare besitzt. Diese 10 conjugirten Geradenpaare des Kegelschnitts φ sind also nur 4 unabhängigen äquivalent. Also ergiebt sich: sind α^i $(i = 1, \ldots, 9)$ 9 Punkte einer Fl^2, so ergänzt jeder Punkt α desjenigen Kegelschnitts, welchen die Fl^2 auf der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ ausschneidet, das Dreieck $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ zu einem Polarviereck eines zweiten Kegelschnitts φ, von welchem wir 4 weitere linear unabhängige conjugirte Geradenpaare kennen durch die Geradenpaare, in welchen die Gegenebenenpaare des Sechsecks $\alpha^4\alpha^5\alpha^6\alpha^7\alpha^8\alpha^9$ von der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ geschnitten werden. Alle Kegelschnitte aber, zu welchen diese 4 Geradenpaare conjugirt sind, bilden eine Kegelschnittschaar (2-fache lineare Mannigfaltigkeit von Curven 2ter Classe), und es bilden daher diejenigen Punkte α, welche das Dreieck $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ zu einem Polarviereck in Bezug auf jeden einzelnen Kegelschnitt dieser Schaar ergänzen, denjenigen Kegelschnitt, in welchem die durch die 9 Punkte α^i $(i = 1, \ldots, 9)$ bestimmte Fl^2 die Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ schneidet. Es wird nur nöthig sein, für 2 Kegelschnitte dieser Schaar die Punkte

*) Cf. Hesse: Analytische Geometrie des Raumes p. 172.

**) Cf. Reye, Cr. J. Bd. 77, p. 282; Serret a. a. O. p. 268.

α, α' so zu bestimmen, dass $\alpha\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, $\alpha'\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ Polarvierecke dieser Kegelschnitte werden, um in den 5 Punkten α, α', α^1, α^2, α^3 eine hinreichende Anzahl von Punkten des gesuchten Kegelschnitts zu besitzen. Es lassen sich aber aus der Figur heraus sofort von 2 Kegelschnitten dieser Schaar die Polarsysteme angeben; denn betrachten wir die 10 Punkte und 10 Geraden, in welchen die 10 Kanten und die 10 diesen Kanten gegenüberliegenden Ebenen irgend eines Fünfecks des Sechsecks die Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ schneiden, so sind diese 10 Punkte und 10 Geraden bekanntlich resp. die Pole und Polaren eines ebenen Polarsystems, dessen Kernkegelschnitt der obigen Schaar angehört. Die Durchschnittsfiguren zweier der Fünfecke des Sechsecks mit der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ liefern also unmittelbar die Polarsysteme zweier Kegelschnitte unserer Schaar. In Bezug auf jedes dieser beiden Polarsysteme lassen sich aber $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ eindeutig durch je einen Punkt α resp. α' zu einem Polarviereck ergänzen. Denn ist A^3 der Pol von $\alpha^1\alpha^2$, A^2 der Pol von $\alpha^1\alpha^3$ in Bezug auf eines dieser Polarsysteme, so ist der Schnittpunkt α von $A^3\alpha^3$ und $A^2\alpha^2$ der gesuchte Punkt, da die 2 Gegenseitenpaare $\alpha^1\alpha^2$, $\alpha^3\alpha$ und $\alpha^1\alpha^3$, $\alpha^2\alpha$ in Bezug auf das betreffende Polarsystem conjugirt sind. Zur Construction des Punktes α ist also nur die Aufsuchung der Pole zweier bekannter Geraden ($\alpha^1\alpha^2$, $\alpha^1\alpha^3$) in einem bekannten Polarsystem nöthig, was die Construction von 4 involutorischen Elementen erheischt. Ebenso findet man einen weiteren Punkt α' des gesuchten Kegelschnittes, so dass dieser Kegelschnitt in linearer Weise durch Construction von 8 involutorischen Elementen construirbar wird.

Wir wollen nun zeigen, dass man, sobald der Kegelschnitt K der Fl^2 in der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ bekannt ist, 2 reciproke Bündel auffinden kann, welche die Fl^2 erzeugen; die Scheitel dieser Bündel sollen in α^1 und α^4 sich befinden, dann wissen wir, dass sich diese Strahlenbündel auf einfach unendlich viele Arten reciprok so beziehen lassen, dass sie die gegebene Fläche 2ter Ordnung erzeugen; wir können noch einem beliebigen Strahle $\alpha^1\alpha$, welcher nach einem Punkte α der Fl^2 hingeht, eine beliebige Ebene durch $\alpha^4\alpha$ zuordnen.*) Ist also α ein Punkt des in der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ von Fl^2 ausgeschnittenen Kegelschnittes K und ordnen wir dem Strahl $\alpha^1\alpha$ irgend eine Ebene a durch $\alpha^4\alpha$ zu, so ist damit allen in der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ befindlichen Strahlen durch α^1 die entsprechende Ebene durch α^4 zugeordnet. Denn ist β der zweite von α verschiedene Schnittpunkt von a mit K, so ist die Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ die entsprechende Ebene des Strahles $\alpha^4\beta$; denn mit dem Strahl $\alpha^4\beta$ bildet sowohl der Strahl $\alpha^1\beta$, als auch der Strahl $\alpha^1\alpha$ ein Nullpaar unserer Reciprocität, das letztere, weil $\alpha^4\beta$ in der Polarebene von $\alpha^1\alpha$

*) Cf. Schröter: Oberflächen 2. O. p. 461.

liegt. Irgend einem beliebigen Strahl $\alpha^1\gamma$, welcher α^1 mit dem Punkte γ des Kegelschnittes K verbindet, entspricht daher die Ebene $\alpha^4\beta\gamma$, so dass den Strahlen, welche α^4 mit den Punkten γ des Kegelschnittes K verbinden, projectivisch zugeordnet sind die Ebenen des Ebenenbüschels $\alpha^4\beta$, welche $\alpha^4\beta$ ebenfalls mit den Punkten γ von K verbinden. In der gesuchten Reciprocität kennen wir daher jetzt alle Strahlen, welche den Ebenen des Ebenenbüschels $\alpha^4\beta$ entsprechen. Betrachten wir nun die Ebene $\alpha^4\beta\alpha^5$, so schneidet dieselbe den Kegelschnitt K ausser in β in dem weiteren Punkte $\bar{\alpha}^5$, und es ist daher $\alpha^1\bar{\alpha}^5$ der entsprechende Strahl von $\alpha^4\beta\alpha^5$. Da der Strahl $\alpha^4\alpha^5$ in der dem Strahl $\alpha^1\bar{\alpha}^5$ entsprechenden Ebene liegt, so enthält die dem Strahl $\alpha^4\alpha^5$ entsprechende Ebene den Strahl $\alpha^1\bar{\alpha}^5$, ferner enthält die dem Strahl $\alpha^4\alpha^5$ entsprechende Ebene den Strahl $\alpha^1\alpha^5$, also ist $\alpha^1\bar{\alpha}^5\alpha^5$ die dem Strahl $\alpha^4\alpha^5$ entsprechende Ebene. Dieselbe ist daher construirbar. Genau ebenso kann man die den Strahlen $\alpha^4\alpha^6$, $\alpha^4\alpha^7$ entsprechenden Ebenen auffinden: und da man die dem Strahl $\alpha^4\beta$ entsprechende Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ kennt, so sind uns von der gesuchten Reciprocität die den 4 Strahlen $\alpha^4\alpha^5$, $\alpha^4\alpha^6$, $\alpha^4\alpha^7$, $\alpha^4\beta$ entsprechenden Ebenen bekannt, und damit ist uns die ganze die Fl^2 erzeugende Reciprocität gegeben. Somit ergiebt sich, dass uns die Kenntniss des in der Ebene $\alpha^1\alpha^2\alpha^3$ von Fl^2 ausgeschnittenen Kegelschnittes K sofort zur Kenntniss zweier die Fläche erzeugender reciproker Bündel hinführt. —

Erzeugung der Raumcurve 4^{ter} *Ordnung* 1^{ter} *Species aus* 8 *ihrer Punkte:* Seien $\alpha^1, \ldots, \alpha^8$ acht gegebene (nicht associirte) Punkte, so existirt durch diese eine eindeutig bestimmte Raumcurve 4^{ter} Ordnung 1^{ter} Art: C^4, der Schnitt des durch die 8 Punkte bestimmten Flächenbüschels 2^{ter} Ordnung. Sei E eine beliebige Ebene durch $\alpha^7\alpha^8$, so schneidet die C^4 die Ebene E in noch 2 weiteren Punkten α, α'. Jede Fl^2 durch die 8 Punkte $\alpha^1, \ldots, \alpha^8$ enthält die ganze C^4, also liegen die Schnittpunkte α, α' der letzteren mit E auf demjenigen Kegelschnitt, in welchem die Fl^2 die Ebene E schneidet. Ist ξ ein beliebiger Punkt auf E, so enthält die Fl^2: f_1, welche durch die 9 Punkte $\alpha^1, \ldots, \alpha^8, \xi$ geht, unsere C^4 vollständig, der Schnitt k_1 von f_1 mit E ist nach der auf p. 40ff. gelehrten Methode linear construirbar, da man in E 3 Punkte α^4, α^8, ξ von f_1 kennt. Auf diesem Kegelschnitt K_1 liegen die gesuchten Punkte α, α'. Ist η ein zweiter von ξ verschiedener Punkt von E, so giebt der ebenfalls bekannte Kegelschnitt K_2, in welchem die durch die 9 Punkte $\alpha^1, \ldots, \alpha^8, \eta$ bestimmte Fl^2: f_2 die Ebene E schneidet, einen zweiten Ort für die Punkte α, α'. Dieselben sind daher als die beiden von α^7, α^8 verschiedenen Durchschnitte der beiden bekannten Kegelschnitte K_1 und K_2 bestimmt. Somit erhält man auf jeder beliebigen Ebene E durch α^7, α^8 die beiden letzten von α^7, α^8 verschiedenen Schnittpunkte mit C^4 und kann

auf diese Weise durch Variation der Ebene E successive die ganze C^4 erzeugen. —

Weiteres über Constructionen der Raumcurven 4^{ter} Ordnung, vgl. P. Serret: Géométrie de direction p. 367 ff. —

§ 9.

Construction des achten Schnittpunkts dreier Flächen 2ter Ordnung.

Herr P. Serret beweist in seiner Géométrie de direction p. 312 den Satz:

Sind $\alpha^1, \ldots, \alpha^8$ *acht Schnittpunkte dreier Flächen 2ter Ordnung, so schneidet die Verbindungslinie irgend zweier Punkte z. B.* $\alpha^1\alpha^2$ *die 10 Gegenebenenpaare des von den 6 übrigen Punkten gebildeten Sechsecks in 10 Punktepaaren einer Involution, welcher auch das Punktepaar* α^1, α^2 *angehört.* Da in der That zwischen den Quadraten $u(\alpha^i)^2$ der linken Seiten der Gleichungen der Punkte α^i $(i = 1, \ldots, 8)$ eine lineare Identität besteht von der Form:

$$\sum_{i=1}^{8} k_i u(\alpha^i)^2 = 0,$$

so folgt daraus:

$$\sum_{\varrho=1}^{2} k_\varrho u(\alpha^\varrho)^2 = -\sum_{\sigma=3}^{8} k_\sigma (u\alpha^\sigma)^2,$$

d. h. die beiden Gleichungen:

$$\sum_{\varrho=1}^{2} k_\varrho u(\alpha^\varrho)^2 = 0, \quad \sum_{\sigma=3}^{8} k_\sigma\, u(\alpha^\sigma)^2 = 0$$

stellen dieselbe Fläche zweiter Classe dar. Aus der ersten Form ihrer Gleichung erkennt man, dass diese Fläche in ein zu α^1, α^2 harmonisch gelegenes Punktepaar auf $\alpha^1\alpha^2$ ausgeartet ist, die zweite Form der Flächengleichung sagt aus, dass das Sechseck $\alpha^3 \ldots \alpha^8$ ein Polarsechseck der Fläche ist, also seine 10 Gegenebenenpaare conjugirte Ebenenpaare sind, d. h. ihre Schnittpunkte mit $\alpha^1\alpha^2$ harmonisch zu dem die Fläche darstellenden Punktepaare liegen. Die 10 Punktepaare, in welcher die 10 Gegenebenenpaare des Sechsecks $\alpha^3 \ldots \alpha^8$ die Gerade $\alpha^1\alpha^2$ schneiden, und das Punktepaar α^1, α^2 sind also 11 Paare derselben Involution auf $\alpha^1\alpha^2$, welche Involution mit J_1 bezeichnet werde.

Sind $\alpha^1, \ldots, \alpha^7$ gegeben, so führt uns der Satz zu einer einfachen und directen Construction des achten Punktes α^8, welcher es vielleicht als Vorzug anzurechnen ist, dass sie fast ausschliesslich in einer

Geraden sich vollzieht. Es handelt sich nämlich nur darum von der Involution J_1, von welcher man ein Paar entsprechender Punkte α^1, α^2 kennt, noch ein weiteres entsprechendes Punktepaar zu finden. Denn dann ist die Involution J_1 bekannt und mit ihr auch der gesuchte Punkt α^8, da man nur die entsprechenden Punkte der Schnittpunkte der Ebenen $\alpha^3\alpha^4\alpha^5$, $\alpha^3\alpha^4\alpha^6$, $\alpha^3\alpha^4\alpha^7$ mit $\alpha^1\alpha^2$ in J_1 zu construiren hat; diese sind die Schnittpunkte der Ebenen $\alpha^6\alpha^7\alpha^8$, $\alpha^5\alpha^7\alpha^8$, $\alpha^5\alpha^6\alpha^8$ mit $\alpha^1\alpha^2$ und geben daher resp. mit $\alpha^6\alpha^7$, $\alpha^5\alpha^7$, $\alpha^5\alpha^6$ verbunden die drei Ebenen $\alpha^6\alpha^7\alpha^8$, $\alpha^5\alpha^7\alpha^8$, $\alpha^5\alpha^6\alpha^8$, als deren Schnittpunkt α^8 bekannt wird. Es handelt sich also allein darum ein zweites Punktepaar der Involution J_1 aufzufinden; dazu verfahren wir folgendermassen. Wir wollen den Schnittpunkt der Ebene $\alpha^i\alpha^k\alpha^l$ mit $\alpha^1\alpha^2$ durch $[ikl]$ bezeichnen. Dann sind die 3 Punktepaare:

$$[768],\ [745];\quad [758],\ [746];\quad [748],\ [756]$$

Punktepaare einer zweiten Involution J_2 auf $\alpha^1\alpha^2$. Denn es sind diese 3 Punktepaare diejenigen Punktepaare, in welchen die Gerade $\alpha^1\alpha^2$ die 3 Ebenenpaare schneidet, welche die 3 Paar Gegenkanten des Tetraeders $\alpha^4\alpha^5\alpha^6\alpha^8$ mit α^7 verbinden. Es werden aber stets die 3 Ebenenpaare, welche die 3 Paar Gegenkanten eines Tetraeders mit einem beliebigen Punkte verbinden, von jeder Geraden in 3 Punktepaaren einer Involution geschnitten. Wir haben daher auf $\alpha^1\alpha^2$ zwei Involutionen, J_1 und J_2. Nun entspricht den 3 Punkten:

$$[768],\ [758],\ [748]$$

in J_1 resp.:

$$[345],\ [346],\ [356],$$

in J_2 resp.:

$$[745],\ [746],\ [756].$$

Die Punktepaare x, X aber, welche demselben Punkte ξ in den beiden Involutionen J_1 und J_2 entsprechen, sind entsprechende Punktepaare einer Projectivität Π, der aus J_1 und J_2 resultirenden Projectivität; mithin sind

$$[745],\ [746],\ [756]$$

diejenigen Punkte, welche in Π den 3 Punkten

$$[345],\ [346],\ [356]$$

entsprechen; wir kennen also mit diesen 3 entsprechenden Punktepaaren die Projectivität Π vollständig, und können linear zu jedem Punkte den ihm in Π entsprechenden construiren. Nun entspricht in J_1 dem Punkte α^1 der Punkt α^2, mithin entspricht in J_2 dem Punkte α^1 derjenige Punkt β^2, welcher in Π dem Punkte α^2 entspricht, so dass also folgende Doppelverhältnissgleichheit stattfindet:

$$([345],\ [346],\ [356],\ \alpha^2) \barwedge ([745],\ [746],\ [756],\ \beta^2).$$

Andererseits entspricht in J_2 umgekehrt dem Punkte β^2 der Punkt α^1, also entspricht in J_1 dem Punkte β^2 der Punkt β^1, welcher in Π dem Punkte α^1 entspricht, so dass also β^1 definirt ist durch:

$$([345], [346], [356], \beta^1) \barwedge ([745], [746], [756], \alpha^1).$$

Damit haben wir in β_1, β_2 ein zweites Punktepaar von J_1 erhalten, mithin ist diese Involution bestimmt durch 2 ihrer Punktepaare α^1, α^2 und β^1, β^2. Sucht man nun z. B. zu den 3 Punkten

$$[345], [346], [347]$$

in J_1 die 3 entsprechenden Punkte:

$$[678], [578], [568]$$

und verbindet dieselben resp. mit den 3 Geraden:

$$\alpha^6\alpha^7, \alpha^5\alpha^7, \alpha^5\alpha^6$$

durch die 3 Ebenen:

$$\alpha^6\alpha^7\alpha^8, \alpha^5\alpha^7\alpha^8, \alpha^5\alpha^6\alpha^8,$$

so schneiden sich diese 3 Ebenen in dem gesuchten Punkte α^8. Wir gelangen also zu folgender:

Construction: Man schneide die Gerade $\alpha^1\alpha^2$ mit den 3 Ebenenpaaren:

$$\alpha^3\alpha^4\alpha^5, \alpha^7\alpha^4\alpha^5; \quad \alpha^3\alpha^4\alpha^6, \alpha^7\alpha^4\alpha^6; \quad \alpha^3\alpha^5\alpha^6, \alpha^7\alpha^5\alpha^6$$

in den 3 Punktepaaren:

$$[345], [745]; \quad [346], [746]; \quad [356], [756]$$

und suche in der durch diese 3 Punktepaare bestimmten Projectivität den zu α^2 entsprechenden Punkt β^2, und den Punkt β^1, welchem der Punkt α^1 entspricht; sodann in der durch die beiden Punktepaare α^1, α^2 und β^1, β^2 bestimmten Involution die zu [345], [346], [347] resp. entsprechenden Punkte [678], [578], [568], verbinde dieselben resp. mit den 3 Geraden:

$$\alpha^6\alpha^7, \alpha^5\alpha^7, \alpha^5\alpha^6$$

durch die 3 Ebenen

$$\alpha^6\alpha^7\alpha^8, \alpha^5\alpha^7\alpha^8, \alpha^5\alpha^6\alpha^8,$$

deren Schnittpunkt α^8 der gesuchte Punkt ist.

Die Construction gebraucht somit die Aufsuchung zweier projectiver und dreier involutorischer Elemente sämmtlich in der Geraden $\alpha^1\alpha^2$ gelegen.

Liegen von den 5 Punkten α^3, α^4, α^5, α^6, α^7 keine 4 in einer Ebene, so wird die Construction nur dann versagen, wenn das nach der obigen Vorschrift construirte Punktepaar β^1, β^2 der Involution J_1 mit α^1, α^2 zusammenfällt. Dies tritt aber nur dann ein, wenn α^1, α^2 das Doppelpunktpaar der Projectivität Π ist. In diesem Falle ist aber:

$$([345], [745], \alpha^1, \alpha^2) \barwedge ([346], [746], \alpha^1, \alpha^2) \barwedge ([356], [756], \alpha^1, \alpha^2)$$

d. h. es sind in den 3 Ebenenbüscheln, welche die Geraden $\alpha^4\alpha^5$, $\alpha^4\alpha^6$, $\alpha^5\alpha^6$ zu Axen haben, projectiv folgende 3 . 4 Ebenen:

$$\alpha^4\alpha^5(\alpha^3, \alpha^7, \alpha^1, \alpha^2) \,\overline{\wedge}\, \alpha^4\alpha^6(\alpha^3, \alpha^7, \alpha^1, \alpha^2) \,\overline{\wedge}\, \alpha^5\alpha^6(\alpha^3, \alpha^7, \alpha^1, \alpha^2)$$

d. h. die 4 Punkte α^1, α^2, α^3, α^7 sind Schnittpunkte von je 3 entsprechenden Ebenen dreier projectiver Ebenenbüschel, welche resp. $\alpha^4\alpha^5$, $\alpha^4\alpha^6$, $\alpha^5\alpha^6$ zu Axen haben, d. h. α^4, α^5, α^6, α^1, α^2, α^3, α^7 liegen auf derselben Raumcurve 3ter Ordnung. In diesem Falle aber wird bekanntlich auch der Punkt α^8 unbestimmt, jeder Punkt jener Raumcurve 3ter Ordnung kann als solcher fungiren. —

Breslau, October 1890.

Ueber Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven.*)

Von

Franz Meyer in Clausthal.

Für die Reducibilität algebraischer Formen bietet die Geometrie ein weites Feld des Vorkommens. Insbesondere weiss man seit Plücker von den zusammengesetzten Singularitäten algebraischer Curven, dass dieselben durch das Zusammenrücken verschiedenartiger einfacher, vorher getrennter, Ordnungs- und Classensingularitäten entstehen. Daraus folgt, dass die Discriminanten und Resultanten der binären Gleichungen, von denen die Arten der einfachen Singularitäten abhängen, in mannigfaltigster Weise irreducible Factoren mit einander gemein haben müssen, die sich allerdings, ihrer Natur und Anzahl nach, mit dem jeweils ausgezeichneten Rationalitätsbereich ändern werden.

Es gebührt Herrn Brill**) das Verdienst, die Untersuchung einer noch so complicirten Singularität einer ebenen algebraischen Curve auf die des nämlichen Vorkommnisses bei einer ganz speciellen Gattung solcher Curven zurückgeführt zu haben, für die die Zerlegung in die einfachen Plücker'schen Singularitäten in übersichtlicher Weise gelingt.

Eine derartig „*rational-ganze*" Curve lässt sich im Wesentlichen als eine Curve vom Geschlecht Null charakterisiren, für welche Ordnung und Classe die gleichen sind. Es findet diese Festlegung ihren algebraischen Ausdruck darin, dass die Gleichungen für die Parameter der Wendepunkte und Spitzen, deren durchaus willkürliche Coefficien-

*) Vgl. die vorläufige Mittheilung in den Göttinger Nachrichten 1888 Nr. 5.

**) Brill, „*Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies*" diese Annalen XVI. Von demselben Verfasser ist hier noch zu erwähnen die Arbeit: „*Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades*" diese Annalen XX, in der (sogar im n-dimensionalen Gebiete) die erste der unten aufgestellten Discriminantenformeln aufgestellt ist (pag. 338) sowie auch der Aufsatz: „*Ueber rationale Curven vierter Ordnung*" diese Annalen XII, wo für $n = 4$ unter ausschliesslicher Adjunction der Doppelpunkts-Argumentenpaare die Zerfällung der drei Discriminanten geleistet ist.

ten den natürlichen Rationalitätsbereich für die Curve abgeben, die letztere in projectivischem Sinne vollständig und eindeutig bestimmen.

Herr Brill hat überdies die Discriminanten der nunmehr allein noch in Betracht kommenden Gleichungen für die Parameter der Doppelpunkte und Doppeltangenten in Elementarfactoren zerfällt, welche in dem vorgelegten Bereiche irreducibel sind.

Bevor zu einer weiteren Ausdehnung solcher Reducibilitätsfragen, insbesondere auf Raumcurven,*) geschritten werden konnte, erschien es nothwendig, erst die entsprechende Untersuchung für die punktallgemeinen Curven „R_n“ (in der Ebene) vom Geschlecht Null zu erledigen, also die Discriminanten und Resultanten der Gleichungen für die Argumente der Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten in nicht weiter zerlegbare Factoren zu spalten. Auch in diesem Falle ist der zu Grunde zu legende Rationalitätsbereich noch ein völlig bestimmter, da bekanntlich jede Invariante einer Curve R_n eine ganze, homogene und isobare Function der dreireihigen Determinanten „δ“ ist, welche sich aus den Coefficienten der drei, die Coordinaten eines Curvenpunktes darstellenden ganzen Functionen einer Veränderlichen bilden lassen. Eben diese Grössen δ sind die Elemente des Rationalitätsbereiches.

Mit der Zerlegung der oben genannten sechs Invarianten beschäftigt sich die vorliegende Abhandlung.

Um möglichst wenig vorauszusetzen, sind im Beginne (§ I, II) die Gleichungen für die drei Arten von einfachen Singularitäten noch einmal abgeleitet worden, und zwar auf einem sehr einfachen Wege mittels der Correspondenz, welche zwischen dem Berührungs- und den Restpunkten einer Tangente der R_n besteht. In § III sind die unmittelbar aus jenen Gleichungen folgenden Grade ihrer Discriminanten und Resultanten in den δ zusammengestellt.

Der erste Theil der Aufgabe besteht darin, für die in Frage kommenden acht Elementarfactoren, deren geometrische Bedeutung von vornherein feststeht, die bezüglichen Eliminationen aufzusuchen, welche dieselben, von fremden Factoren befreit, ergeben, und vor Allem ihren Grad (in den δ) zu ermitteln.

Bei zweien jener acht Bildungen gelingt das direct (§ IV), bei drei weiteren mit Hülfe der zu den drei gegebenen ganzen Functionen „conjugirten“ Formen (§§ V, VI, VII).

Hinsichtlich der drei noch restirenden Invarianten erscheint indessen ein neues Hülfsmittel**) unabweisbar zu sein, das Verfahren des

*) Vgl. die darauf bezüglichen Mittheilungen des Verfassers in den Göttinger Nachrichten Nr. 10 und Nr. 15 vom Jahre 1890, sowie Nr. 1 und Nr. 3 von 1891.

**) Diese Methode des Projicirens wird von den Geometern in neuerer Zeit vielfach angewandt, um projectivische Eigenschaften geometrischer Gebilde aus

„*Projicirens*“ (§§ VIII, IX). Man denkt sich die vorliegende, ebene $R_n = R_n^2$ als das perspectivische Bild einer, ebenfalls punktallgemeinen räumlichen R_n^3. Soll dann die R_n^2 einer Invariantenbedingung genügen, so wird das Projectionscentrum einer gewissen Fläche angehören: die linke Seite der Flächengleichung deckt sich, bei passender Wahl des Coordinatensystems, geradezu mit der linken Seite jener Bedingung.

Nachdem nunmehr die acht erforderlichen Gradzahlen gefunden sind (§ IX), kann man die sechs Zerlegungsgleichungen mit unbekannten Exponenten für die einzelnen Factoren ansetzen (§ X).

Diese Exponentenzahlen resultiren, wie die Gradvergleichung lehrt, als die Lösungen gewisser linearer diophantischer Gleichungen.

Da in zwei Fällen vieldeutige Lösungen existiren, so muss die Entscheidung durch das Beispiel der Curve vierter Ordnung herbeigeführt werden. Dabei bietet sich von selbst eine Methode, die wahre Quelle der Exponentenanzahlen in dem Verhalten der Anfangs- resp. Endglieder der Singularitätengleichungen gegenüber gewissen Grenzübergängen zu erkennen (§§ XI, XII), welche erwachsen, sobald man die Verschmelzung zweier einfacher Singularitäten von einer einzigen, beliebig kleinen Grösse ε abhängig macht. Der Fall des „Wendeberührfactors“ (§ XII) zeigt, mit welcher Vorsicht man dabei zu Werke zu gehen hat.

In § XIII werden noch die Grade der acht Elementarfactoren durch ihre (geeignet normirten) Gewichte ersetzt, wodurch die bezüglichen Formeln an Durchsichtigkeit erheblich gewinnen.

Eine Vergleichung zweier der gewonnenen Zerlegungen mit den analogen, von Herrn Brill herrührenden zeigt die charakteristischen Gemeinsamkeiten, wie Unterschiede (§ XIV).

Den Schluss bildet eine überaus plastische Realisirung sämmtlicher Zerlegungen vermöge gewisser (Chasles'scher) Correspondenzen, welche zugleich einen dritten, rein geometrischen Beweis der ersteren enthält.

§ I.

Die Correspondenz der Curve R_n.

1. Die homogenen Punktcoordinaten x_i einer ebenen, rationalen Curve n^{ter} Ordnung R_n sind ganzen Functionen $f_i(\lambda)$ n^{ter} Ordnung eines Parameters λ proportional. Nimmt man der Einfachheit halber den betr. Proportionalitätsfactor gleich der Einheit an, so hat man ($i = 1, 2, 3$):

$$(1) \qquad x_i = f_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_{in}.$$

denen entsprechender, in höheren Räumen gelegener abzuleiten. Bezwecks Ausführung von Eliminationen ist dieselbe wohl nur erst in vereinzelten Fällen benützt worden.

Die homogenen Coordinaten u_i einer Tangente der R_n verhalten sich, wie die bez. Functionaldeterminanten der f_i; wir schreiben:

$$(2)\qquad u_i = \begin{vmatrix} f_k(\lambda) & f_{k1}(\lambda) \\ f_l(\lambda) & f_{l1}(\lambda) \end{vmatrix} = F_i(\lambda),$$

wo der Index 1 die erste Ableitung nach λ bezeichnet. Die Curve R_n wird als eine „punktallgemeine" ihres Geschlechts vorausgesetzt d. h. mit einfachen und getrennten Ordnungssingularitäten — Doppelpunkten, Doppeltangenten, Wendungen. Die rechten Seiten von (2) haben dann keinen Factor in λ gemein, und ihr Grad in λ (wenigstens für eine derselben) steigt bis zu $2(n-1)$, der Classe der Curve.

2. Eine Tangente „λ" mit den Coordinaten u:

$$(3)\qquad u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

trifft die R_n noch in $n-2$ Restpunkten „λ_1", welche Wurzeln der Gleichung sind:

$$(4)\qquad C(\overset{n-2,}{\lambda_1}\ \overset{2(n-2)}{\lambda}) \equiv \frac{1}{(\lambda_1-\lambda)^2}\,|f(\lambda_1), f(\lambda), f_1(\lambda)| = 0$$

wo in der dreireihigen Determinante rechterhand der Index $i(=1,2,3)$ der Kürze wegen unterdrückt ist.

Umgekehrt, bei festgehaltenem λ_1, stellt (4) die $2(n-2)=2(n-1)-2$ Resttangenten λ dar, welche vom Punkte λ_1 noch an die Curve gelegt werden können.

Die Gleichung (4) möge daher schlechtweg als „*Correspondenz*" C der R_n bezeichnet werden.

3. Um die auf der rechten Seite von (4) vorgeschriebene Division mit $(\lambda_1-\lambda)^2$ auszuführen, entwickele man die $f(\lambda_1)$ nach Potenzen von $(\lambda_1-\lambda)$:

$$(5)\quad f(\lambda_1) = f(\lambda) + (\lambda_1-\lambda)f_1(\lambda) + (\lambda_1-\lambda)^2 f_2(\lambda) + \cdots + (\lambda_1-\lambda)^n f_n(\lambda)$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}(4')\quad C &\equiv |f_2(\lambda) + (\lambda_1-\lambda)f_3(\lambda) + \cdots + (\lambda_1-\lambda)^{n-2} f_n(\lambda), f(\lambda), f_1(\lambda)| \\ &\equiv |f(\lambda), f_1(\lambda), f_2(\lambda)| + (\lambda_1-\lambda)\,|f(\lambda), f_1(\lambda), f_3(\lambda)| + \cdots \\ &\qquad + (\lambda_1-\lambda)^{n-2}\,|f(\lambda), f_1(\lambda), f_n(\lambda)|.\end{aligned}$$

Hier sind sämmtliche Coefficienten der Potenzen von $\lambda_1-\lambda$ vom ersten Grade in den dreireihigen Determinanten „δ" der a_{ik} (1).

§ II.

Die Gleichungen für die Argumente der Singularitäten.

4. Die Correspondenz $C=0$ (4') führt unmittelbar zur Aufstellung der Gleichungen für die Argumente λ der Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppeltangenten.

Ein Wendepunkt entsteht, sobald ein Berührungspunkt λ der Tangente u (3) mit noch einem der Restpunkte λ_1 zusammenfällt; somit geht $C = 0$ (4') für $\lambda_1 - \lambda = 0$ über in die wohlbekannte Gleichung für die $3(n-2)$ Wendepunkte:

(6) $$C(\lambda, \lambda) \equiv \overset{3(n-2)}{\Omega}(\lambda) = 0.$$

5. Eine Doppeltangente (λ_1, λ) resultirt, wenn zwei der $n-2$ Restpunkte in einen — λ_1 — coincidiren. Demnach liefert die nach λ_1 genommene Discriminante von C, gleich Null gesetzt, die $4(n-2)(n-3)$ Berührungspunkte der $2(n-2)(n-3)$ Doppeltangenten:

(7) $$D_{\lambda_1}(C) \equiv \overset{4(n-2)(n-3)}{\mathsf{M}}(\lambda) = 0.$$

In der That ist $D_{\lambda_1}(C)$ vom Grade $2\{(n-2)-1\} = 2(n-3)$ in den Coefficienten von C, also bezüglich λ vom Grade

$$\{2(n-3)\}\,\{2(n-2)\} = 4(n-2)\,(n-3).$$

Insbesondere zeigt $2(n-3)$ den Grad von $D_{\lambda_1} = \mathsf{M}$ in den ϑ an.

6. Dagegen zerfällt die in analoger Weise bez. λ gebildete Discriminante $D_\lambda(C)$ von C in zwei rationale Factoren. Denn von den $2(n-2)$ Tangenten, die im Allgemeinen von einem Punkte λ_1 der Curve an dieselbe gehen, können nur dann zwei zusammenrücken, wenn der betr. Punkt entweder ein Doppelpunkt, oder aber einer der Restpunkte ist, welche eine Wendetangente noch auf der Curve ausschneidet.

Nun ist die Anzahl der letzteren offenbar gleich $3(n-2)(n-3)$, diejenige der Doppelpunkte gleich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; andererseits giebt $2\{2(n-2)-1\} = 2(2n-5)$ den Grad von $D_\lambda(C)$ in den Coefficienten von C an, somit $2(2n-5)(n-2)$ denjenigen in λ, und es ist

$$2(2n-5)(n-2) = 2\,\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 3(n-2)(n-3).$$

Man hat also:

(8) $$D_\lambda(C) \equiv \overset{(n-1)(n-2)}{\Lambda}(\lambda) \cdot \overset{4(n-2)(n-3)}{\mathsf{P}}(\lambda)$$

wo $\Lambda = 0$ die Schnittelemente der Doppelpunkte, $\mathsf{P} = 0$ die Restpunkte der Wendetangenten repräsentirt.

7. Um den Grad von Λ in den ϑ zu bestimmen, leiten wir die Formen Ω, Λ, M auf eine zweite Art ab.

Man kann fragen, wann eine Tangente λ so beschaffen ist, dass die Tangente eines der Restpunkte λ_1 wiederum durch den Punkt λ hindurchgeht. Ersichtlich ist das nur in drei Fällen möglich: entweder ist λ_1 der zweite Berührungspunkt einer Doppeltangente, oder es haben sich die Punkte λ und λ_1 $(=\lambda)$ in einem Wendepunkte vereinigt, oder endlich es sind λ, λ_1 die beiden Parameter eines Doppel-

punktes. Algebraisch bedeutet das, dies das Resultat der Elimination von λ_1 (oder auch λ) aus den beiden Correspondenzformen $C(\lambda_1, \lambda)$, $C(\lambda, \lambda_1)$ die Factoren Ω, Λ, M enthalten muss.

Die gemeinte Resultante ist in der übrig bleibenden Variabeln λ vom Grade $4(n-2)^2 + (n-2)^2 = 5(n-2)^2$. Andererseits ist die Summe der Grade von Ω, Λ, M:

$$3(n-2) + (n-1)(n-2) + 4(n-2)(n-3) = 5(n-2)^2,$$

und es ist somit, in leicht verständlichen Zeichen:*)

$$R_{\lambda_1}\{C(\lambda_1, \lambda), C(\lambda, \lambda_1)\} = \Omega\Lambda\mathsf{M}. \tag{9}$$

Jetzt zähle man die Grade der beiden Seiten von (9) in den δ ab. Links ergiebt sich die Anzahl $2(n-2) + (n-2) = 3(n-2)$; rechts bemerkt man bei Ω den Grad 1, bei M (cf. Nr. 5) den Grad $2(n-3)$, sodass für Λ die Zahl $n - 1$ übrig bleibt.

Ueberträgt man dies rückwärts auf die Zerlegung (8), so leitet sich unmittelbar $3(n-3)$ als Gradzahl von P bez. der δ ab.

8. Die Ergebnisse bezüglich der Gradzahlen der Formen Ω, Λ, M mögen in der Tabelle vereinigt werden:

$$\begin{cases} \Omega = \Omega(\overset{3(n-2)}{\lambda}, \overset{1}{\delta}), \\ \Lambda = \Lambda(\overset{(n-1)(n-2)}{\lambda}, \overset{n-1}{\delta}), \\ \mathsf{M} = \mathsf{M}(\overset{4(n-2)(n-3)}{\lambda}, \overset{2(n-3)}{\delta}). \end{cases} \tag{10}$$

§ III.

Die Grade der Discriminanten und Resultanten der Singularitätengleichungen.

9. Aus der Tabelle (10) entspringt unverzüglich die weitere, welche die Grade der Discriminanten und Resultanten von Ω, Λ, M in den δ verzeichnet, nämlich:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} D(\Omega) & \Big| \; 2(3n-7), \\ D(\Lambda) & \Big| \; 2(n-1)\{(n-1)(n-2) - 1\}, \\ D(\mathsf{M}) & \Big| \; 4(n-3)\{4(n-2)(n-3) - 1\}, \end{cases} \\ \begin{cases} R(\Omega\Lambda) & \Big| \; 4(n-1)(n-2), \\ R(\Omega\mathsf{M}) & \Big| \; 10(n-2)(n-3), \\ R(\Lambda\mathsf{M}) & \Big| \; 6(n-1)(n-2)(n-3). \end{cases} \end{array} \tag{11}$$

*) Eine entsprechende Abzählung für den umfassenderen Fall, dass die Curve R_n eine Anzahl r getrennter Spitzen besitzt — wodurch die Classe der Curven, wie auch der Grad von $C(\lambda_1, \lambda)$ in λ_1 um r sinken — liefert die Zerlegung $R_{\lambda_1} = \mathsf{P}\Omega\Lambda\mathsf{M}$, wo die vier Factoren rechts durch ihr Verschwinden wieder die (eigentlichen) Singularitäten darstellen.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Zerlegungen dieser sechs ganzen rationalen Functionen der δ in ihre ganzen rationalen, bez. der δ irreducibeln Factoren nachzuweisen. Zuvor werden aber die gemeinten Elementarfactoren selbst, deren Verschwinden je ein in gewisser Art vor sich gehendes Zusammenrücken irgend zweier, gleicher oder ungleicher Singularitäten bedingt, aufgestellt werden müssen.

§ IV.

Der Cuspidal- und Undulationsfactor.

10. Die Curve R_n kann im Besondern einen Rückkehrpunkt (Spitze) aufweisen, wenn die beiden Argumente eines Doppelpunkts coincidiren. Denken wir uns die Form Λ für den Augenblick in die, den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkten entsprechenden (in den δ natürlich irrationalen) quadratischen Formen zerlegt, so stellt sich der „*Cuspidalfactor*", in dessen Verschwinden das Criterium für das Eintreten einer Spitze besteht, dar als das Product der Discriminanten jener quadratischen Factoren. Genau nun so, wie aus dem Producte der letzteren die Form Λ vom Grade $n-1$ in den δ hervorgeht, muss der Cuspidalfactor als das Product der bezüglichen Discriminanten von doppelt so hohem Grade in den δ ausfallen. Zugleich ist damit bewiesen, dass der so entstandene Cuspidalfactor nicht etwa die Potenz einer noch einfacheren Bildung sein kann. Wir notiren:

$$(12) \qquad [\Lambda\Lambda] = (\overset{2(n-1)}{\delta}).$$

11. Die Form (11) lässt sich nun auch leicht auf rationalem Wege herstellen.

Die Argumente α, β eines Doppelpunktes genügen wegen (1) den Bestimmungsgleichungen:

$$(13) \qquad f_1(\alpha) : f_2(\alpha) : f_3(\alpha) = f_1(\beta) : f_2(\beta) : f_3(\beta);$$

demnach müssen nach (2) für das Argument ϱ einer Spitze die Gleichungen erfüllt sein:

$$(14) \qquad F_1(\varrho) = 0, \quad F_2(\varrho) = 0, \quad F_3(\varrho) = 0.$$

Die beiden Gleichungen $F_1(\lambda) = 0$, $F_2(\lambda) = 0$ werden aber auch für $f_3(\lambda) = 0$, $f_{31}(\lambda) = 0$ befriedigt, sodass die Resultante der beiden Formen $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ sowohl den Cuspidalfactor $[\Lambda\Lambda]$, wie die Discriminante $D(f_3)$ als Factor enthalten muss. Die Vergleichung der Gradzahlen lehrt dann sofort, dass

$$(15) \qquad R\{F_1(\lambda),\ F_2(\lambda)\} = [\Lambda\Lambda]\, D\{f_3(\lambda)\}$$

ist.

12. Das Verschwinden des „*Undulationsfactors*" soll anzeigen, dass die beiden Berührpunkte einer Doppeltangente in der Weise zusammenrücken, dass die letztere die Curve „undulirt" d. h. in vier consecutiven Punkten trifft.

Ueberträgt man die Ueberlegung der Nr. 10 auf den vorliegenden Fall, so erscheint der Undulationsfactor als das Product der Discriminanten von den $2(n-2)(n-3)$, in der Doppeltangentenform $\mathsf{M}(\lambda)$ (7) enthaltenen (irrationalen) quadratischen Factoren, und wird also vom Grade $4(n-3)$ in den δ, in Zeichen:

$$(16) \qquad [\mathsf{MM}] = (\overset{4(n-3)}{\delta}).$$

13. Behufs rationaler Bildung von (16) bemerke man, dass für $[\mathsf{MM}] = 0$ die Correspondenz (4') durch das Quadrat von $\lambda_1 - \lambda$ theilbar wird, oder, was das Nämliche ist, die beiden ersten Glieder von (4') zugleich verschwinden:

$$(17) \qquad |f f_1 f_2| = 0, \quad |f f_1 f_3| = 0.$$

Diese beiden Gleichungen bestehen indessen auch dann nebeneinander (für einen gewissen Werth von λ), wenn entweder die Formen $F_i(\lambda)$ (2) sämmtlich verschwinden i. e. nach Nr. 11 für $[\Lambda\Lambda] = 0$, oder aber, wenn die Determinante „δ_{012}" der drei ersten Coefficientenverticalen von (1) den Werth Null annimmt, da in letzterem Falle den Gleichungen (17) durch $\lambda = \infty$ Genüge geschieht.

Die linken Seiten von (17) sind in λ vom Grade $3(n-2)$ resp. $3(n-2)-1$, in den δ vom Grade Eins, also ihre Resultante in den δ vom Grade $6(n-2)-1$.

Andererseits ergiebt die Summe der Grade von $[\Lambda\Lambda]$, $[\mathsf{MM}]$, δ_{012} in den δ:

$$2(n-1) + 4(n-3) + 1 = 6(n-2) - 1,$$

folglich existirt die Zerlegung:

$$(18) \qquad R\{|f f_1 f_2|, |f f_1 f_3|\} = \delta_{012} \cdot [\Lambda\Lambda]\,[\mathsf{MM}].$$

Da aber die Form $|f f_1 f_3|$ mit der ersten Ableitung von

$$|f f_1 f_2| = \Omega(\lambda) \; (6)$$

nach λ zusammenfällt, so nimmt (18) die Form an:

$$(18)' \qquad D(\Omega) = [\Lambda\Lambda]\,[\mathsf{MM}].$$

Damit ist die erste der sechs unter (11) aufgeführten Bildungen in ihre bezüglich der δ irreducibeln Bestandtheile zerlegt.

§ V.

Einführung der conjugirten Formen.*)

14. Die zu den $f(\lambda)$ (1) „conjugirten" Formen setzen sich linear aus $n-2$ linear unabhängigen unter ihnen zusammen. Nennt man dieselben $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_{n-2}(\lambda)$, wo

$$(19)\quad \varphi_k(\lambda) = \alpha_{k0} - \binom{n}{1}\alpha_{k1}\lambda + \binom{n}{2}\alpha_{k2}\lambda^2 - \cdots + (-1)^n \alpha_{kn}\lambda^n = \alpha_{k\lambda}^n,$$

so genügen die φ den $3(n-2)$ Bestimmungsgleichungen

$$(20)\qquad (f, \varphi)^{(n)} = 0.$$

Die dreireihigen Determinanten der a (1) sind den correspondirenden $(n-2)$-reihigen Determinanten δ der α proportional. Die Proportionalität geht in die Gleichheit über, wenn man, was erlaubt ist, die φ mit einem passenden Factor multiplicirt. Wir setzen das in der Folge als geschehen voraus. Sollen n Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der Curve R_n auf einer Geraden liegen, so sind die Bedingungen zu erfüllen:

$$(21)\qquad \alpha_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n} = 0.$$

Eliminirt man aus (21) $n-3$ der n Argumente, etwa $\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_n$, so wird das Eliminationsresultat $R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$:

$$(22)\qquad R = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)} \left| f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3) \right|.$$

Die Division der Determinante der f durch die Differenzen der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ist also links bereits vollzogen. Darin, und weil die Form R für $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ in die Correspondenzform (4) übergeht

$$(23)\qquad C(\lambda_1, \lambda) = R(\lambda_1, \lambda, \lambda).$$

liegt der Grund, wesshalb, bei Zugrundelegung der Formen φ eine Reihe von Invarianten der Curve R_n rein und isolirt erhalten werden, während dies bei Benutzung der f unmöglich ist.

15. Als Beispiele wählen wir zunächst die Form $\mathsf{P}(\lambda)$ (8) für die Restpunkte der Wendetangenten sowie den Undulationsfactor $[\mathsf{MM}]$ (16).

Eliminirt man aus den Beziehungen:

$$(24)\qquad \alpha_{\lambda_1^2\lambda\lambda_5\lambda_6\cdots\lambda_n} = 0$$

alle Argumente bis auf λ, so resultirt eine Form vom Grade $3(n-2)(n-3)$ in λ und vom Grade $3(n-3)$ in den δ, welche also, wie die Vergleichung beider Seiten von (8) lehrt, genau mit $\mathsf{P}(\lambda)$ übereinstimmt.

*) Eine ausführliche Darstellung der conjugirten Formen φ findet sich in des Verfassers *„Apolarität und rationale Curven"*, Tübingen, 1883.

Ferner wird das Resultat der Elimination aller Grössen λ aus den Gleichungen

(25) $$\alpha_{\lambda_1^4 \lambda_5 \lambda_6 \cdots \lambda_n} = 0$$

eine Bildung vom Grade $4(n-3)$ in den δ, ist also mit dem Undulationsfactor $[\mathsf{MM}]$ identisch.

§ VI.

Der Tritangenten- und Wendeberührfactor.

16. Mit gleicher Leichtigkeit gelingt noch, mit Hülfe der conjugirten Formen, die Herstellung der Criterien für das Zustandekommen einer „*Tritangente*" d. i. einer die Curve R dreimal berührenden Geraden, sowie einer „*Wendeberührlinie*" d. i. einer die Curve noch einmal berührenden Wendetangente.

Soll eine Gerade die Curve dreimal berühren, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass

(26) $$\alpha_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_7 \lambda_8 \cdots \lambda_n} = 0$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Argumente der Berührungs- und $\lambda_7, \lambda_8, \ldots, \lambda_n$ diejenigen der Restpunkte bezeichnen. Jede der beiden Gruppen tritt in (26) symmetrisch auf. Daher ist die Resultante der $n-2$ Gleichungen (26) in den Coefficienten einer jeden der Formen α_λ^n, und damit auch in den δ vom Grade

$$2^3 \cdot \frac{(n-3)!}{3!(n-6!} = \frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5),$$

und es ergiebt sich so der Tritangentenfactor „$[\mathsf{T}_3]$":

(27) $$[\mathsf{T}_3] = \Big(\overset{\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)}{\delta}\Big).$$

In ähnlicher Weise erledigt sich der Fall, wo eine Wendetangente λ_1 die Curve noch ausserdem einmal, in λ_2 berührt, während sie noch die Restpunkte $\lambda_6, \lambda_7, \ldots, \lambda_n$ ausschneiden möge. Man hat die Resultante der Gleichungen:

(28) $$\alpha_{\lambda_1^3 \lambda_2^2 \lambda_6 \lambda_7 \cdots \lambda_n} = 0$$

zu bilden, deren Grad in den δ wird:

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 6(n-3)(n-4).$$

Dies liefert den Wendeberührfactor „$[\Omega \mathsf{M}]$":

(29) $$[\Omega \mathsf{M}] = \Big(\overset{6(n-3)(n-4)}{\delta}\Big).$$

§ VII.

Der Trinodalfactor.

17. Grössere Schwierigkeiten macht bereits die Ermittelung des „*Trinodalfactors*“, dessen Verschwinden mit der Existenz eines dreifachen Punktes der Curve R äquivalent ist.

Man verstehe unter

(30) $$\alpha_{\lambda^3}^{(0)},\ \alpha_{\lambda^3}^{(1)},\ \ldots,\ \alpha_{\lambda^3}^{(n-3)}$$

die $(n-3)^{\text{ten}}$, nach λ und einer homogen machenden Variabeln μ genommenen Ableitungen einer Form α_λ^n (19), und setze noch zur Abkürzung, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ irgend drei Parameter bedeuten:

(31) $$\mathsf{A}^{(0)} = \alpha_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{(0)},\quad \mathsf{A}^{(1)} = \alpha_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{(1)},\ \ldots,\ \mathsf{A}^{(n-3)} = \alpha_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}^{(n-3)}.$$

Dann ist die $(n-2)$-reihige Determinante der A:

(32) $$R = |\mathsf{A}^{(0)},\ \mathsf{A}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(n-3)}| = |\mathsf{A}|$$

nichts Anderes, als das unter (22) aufgeführte Eliminationsresultat:

(22) $$R(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}\,|f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)|.$$

$R = 0$ ist das Criterium für drei, auf einer Geraden liegenden Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von der Curve.

Sollen aber $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die einem dreifachen Punkte Δ_3 zugehörigen Argumente sein, so ist dazu offenbar das Verschwinden sämmtlicher erster Minoren von R nothwendig und hinreichend, was vier von einander unabhängigen Relationen zwischen den $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ äquivalent ist. Bedient man sich, um das Resultat der Elimination der letzteren Grössen zu fixiren, des Zeichens $[R_I]$, so kommt für den zu bestimmenden Trinodalfactor „$[\Delta_3]$“:

(23) $$[\Delta_3] = [R_I].$$

18. Um den Grad der rechten Seite in den δ zu finden, schlagen wir einen Umweg ein.

Wir ersetzen die willkürlichen Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jeder Form α_λ^n (19) durch die andern:

(24) $$\alpha_0 = \beta_0 + \lambda_4\beta_1,\ \alpha_1 = \beta_1 + \lambda_4\beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n + \lambda_4\beta_{n+1},$$

wodurch die $\mathsf{A}^{(i)}$ in $\mathsf{B}^{(i)}$, R in S übergehen möge.

Die Formen $\mathsf{B}^{(i)}$ lassen sich auffassen als die, zu (31) analogen Polarenbildungen:

(32) $$\mathsf{B}^{(i)} = \beta_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^{(i)}$$

von $n-2$ binären Formen $\beta_{\lambda^4}^{(i)}$, die ihrerseits mit den $(n-3)^{\text{ten}}$ nach λ und μ genommenen Ableitungen einer Form β_λ^{n+1} übereinstimmen.

Construirt man jetzt die zu den $n-2$ Formen β conjugirte Gruppe, die durch die vier linear unabhängigen Formen $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(33)\qquad g_1(\lambda),\ g_2(\lambda),\ g_3(\lambda),\ g_4(\lambda)$$

repräsentirt sei, und denkt sich die letzteren als die homogenen Punktcoordinaten einer rationalen Raumcurve R_{n+1}, so verschwinden alle Minoren erster Ordnung von S dann und nur dann, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Parameter sind, welche einer die Curve R_{n+1} viermal treffenden Sehne zugehören. Solcher Sehnen giebt es aber bekanntlich $\frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{3}$, sodass nach Elimination von $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ eine Bildung vom vierfach so hohen Grade in λ_4 hervorgehen muss. Da nun λ_4 in allen Formen $\mathsf{B}^{(i)}$ linear, und mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zusammen symmetrisch eingeht, so muss $[S_I]$ in den β, und somit auch $[R_I]$ in den α, also auch in den δ vom Grade $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ sein, folglich kommt:

$$(34)\qquad [\Delta_3] = \left(\delta^{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}}\right).$$

§ VIII.

Das Hülfsprincip des Projicirens.*)

19. Was die noch übrigen Coincidenzen von Singularitäten angeht, so würden jetzt die Bedingungen zu eruiren sein, unter denen auf der Curve R eine Selbstberührung eintritt, eine Doppelpunktstangente noch einmal berührt und endlich der eine Zweig eines Doppelpunktes eine Wendung aufweist.

Die dazu erforderlichen Eliminationen sind indessen verwickelter Natur, sodass wir vorziehen, weitere Hülfsvariable einzuführen mittels einer Methode, welche auch die früher bereits gewonnenen Elementarcriterien von Neuem liefern wird. Dabei werden sich sämmtliche Criterien getrennt von einander ergeben.

20. Man fasse die Curve $R(1)$ als Projection einer rationalen Raumcurve gleicher Ordnung auf. Die erstere sei dann mit $R^{(2)}$, die letztere mit $R^{(3)}$ bezeichnet. Die letztere findet ihre Darstellung dadurch, dass zu den Coordinaten x_1, x_2, x_3 eine vierte x_4 (oder auch eine lineare Combination der vier x), zu den $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$ eine weitere, mit x_4 proportionale Form $f_4(\lambda)$ n^{ter} Ordnung mit willkürlichen Coefficienten hinzutritt. Umgekehrt verringert sich dabei die Zahl der conjugirten Formen $\varphi(\lambda)$ (19) um irgend eine unter ihnen. Die Projection der Curve $R^{(3)}$ von irgend einem Raumpunkte auf irgend eine Raumebene wird, bei der Allgemeinheit der Coefficienten

*) Wegen der algebraischen Formulirung dieses Princips vgl. § XV.

in den vier Formen f, zu einer $R^{(2)}$ führen, die in ihren Singularitäten keinerlei Besonderheit zeigt. Soll eine solche in's Leben treten — es kommen hier immer nur Besonderheiten einfachster Art in Betracht, die von einer einzigen Bedingung abhängen — so muss, wenn man sich die Projectionsebene beliebig, aber fest gewählt denkt, der Projectionspunkt auf einer algebraischen Fläche liegen, welche durch die gedachte Bedingung repräsentirt ist.

21. Es handelt sich vor Allem um den Nachweis, dass die Ordnung der in Rede stehenden Fläche — deren Irreducibilität in jedem einzelnen Falle aus ihrer Entstehung a priori einleuchten wird — genau gleich dem Grade der correspondirenden Bedingung in den Ausdrücken „δ“ der Projectionscurve ausfällt. Das wird eben daraus hervorgehen, dass die linke Seite der Flächengleichung, etwa bis auf einen, von den Coordinaten unabhängigen, nur durch die Hülfsparameter bedingten Factor, mit der linken Seite der bezüglichen Bedingungsgleichung i. e. dem fraglichen „Elementarfactor“ identisch ist.

22. Zu dem Zwecke gehen wir auf die Bedeutung der Relationen (21) (deren Anzahl jetzt nur $n-3$ beträgt):

$$(21) \qquad a_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = 0$$

für die Raumcurve $R^{(3)}$ etwas genauer ein. Schneidet man die letztere mit einer Ebene (u):

$$(35) \qquad u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

so hängen die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ der n Schnittpunkte von der Gleichung ab:

$$(36) \qquad s_0 \lambda^n - s_1 \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n = 0,$$

wo mit Rücksicht auf (1), (nur dass der Index i von 1 bis 4 läuft):

$$(37) \qquad (-1)^\varkappa s_\varkappa = u_1 a_{1\varkappa} + u_2 a_{2\varkappa} + u_3 a_{3\varkappa} + u_4 a_{4\varkappa}.$$

Durch Elimination der u entspringen daraus die Gleichungen (21), oder, wenn man will, gewisse lineare Combinationen derselben.

Legt man nunmehr der Ebene (u) (35) die Beschränkung auf, durch einen festen Punkt (x') zu gehen, so vermehrt sich das System (37) um die Gleichung:

$$(38) \qquad 0 = u_1 x_1' + u_2 x_2' + u_3 x_3' + u_4 x_4'$$

und damit tritt auch zu dem Systeme (21) eine weitere Beziehung von der nämlichen Form:

$$(39) \qquad a^{(n-2)}_{\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n} = 0,$$

in deren Coefficienten die x' linear eingehen. Und umgekehrt drückt augenscheinlich eine willkürlich gewählte (wenn nur von den Relationen (21) linear independente) Beziehung (39), im Verein mit (21), das Gleiche aus: Die Punktgruppen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der $R^{(3)}$ liegen

sämmtlich auf Ebenen (u) durch einen festen Punkt (x'), dessen Coordinaten linear durch die Coefficienten α von (21), (39) ausdrückbar sind.

Für das Gesagte ist die kürzere Formulirung erlaubt:

„*Eine beliebig, nur linear unabhängig von* (21) *anzunehmende Gleichung* (39) *ist diejenige eines Raumpunktes* (x'), *als dessen polyedrale Coordinaten die Coefficienten* $s_\varkappa$ *in der Gleichung* (36) *anzusehen sind: das Coordinatenpolyeder wird dabei gebildet aus den* $(n+1)$ *Punkten* $(a_0)(a_1)\ldots(a_n)$, *deren Gleichungen* — $s_\varkappa = 0$ — *vermöge der* $(n-3)$ *Relationen* (21) *mit einander verknüpft sind.*

Durch Projection vom Punkte (x') *aus auf eine beliebige Ebene geht die* $R^{(3)}$ *über in eine* $R^{(2)}$, *deren Punktcoordinaten drei geeigneten linearen Combinationen der vier Formen* $f(\lambda)$ *proportional sind, während die zu diesen drei Combinationsformen conjugirte Gruppe durch die mit* (21), (39) *correspondirenden Formen* α_λ^n *dargestellt wird.*“

Damit ist die in Nr. 21 vorangestellte Behauptung erwiesen. Indem wir uns auf die Ermittelung des Grades der auf die $R^{(2)}$ bezüglichen „*Elementarfactoren*“ beschränken, leiten wir den ihm gleichen Grad der Fläche, der der Projectionspunkt (x') angehören muss, wenn ein solcher Elementarfactor verschwinden soll, mittels Methoden ab, die dem Gebrauche der räumlichen, insbesondere der Liniencoordinaten, eigenthümlich sind.

§ IX.

Die Grade der acht Elementarfactoren.

23. Das Verschwinden irgend eines der auf die Projectionscurve $R^{(2)}(1)$ bezüglichen Elementarfactoren wird, wie sich zeigen wird, stets darauf hinauskommen, dass der zur Raumcurve $R^{(3)}$ gehörige Projectionspunkt (x') entweder auf einer solchen Sehne derselben liegt, dass zwischen deren Parametern λ_1, λ_2 noch eine algebraische Beziehung obwaltet, oder aber auf gewissen singulären Ebenen.

24. Die Liniencoordinaten $p_{i\varkappa}$ einer Sehne λ_1, λ_2 der $R^{(3)}$:

$$(1)' \qquad x_i = f_i(\overset{n}{\lambda}) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

verhalten sich, wie die zweireihigen Determinanten der $f_i(\lambda_1)$, $f_i(\lambda_2)$

$$(40) \qquad p_{i\varkappa} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{vmatrix} f_i(\lambda_1), & f_i(\lambda_2) \\ f_\varkappa(\lambda_1), & f_\varkappa(\lambda_2) \end{vmatrix} = \Phi_{i\varkappa}(\overset{n-1}{\widehat{\lambda_1, \lambda_2}}),$$

die in λ_1, λ_2 symmetrisch und vom Grade $n-1$ ausfallen.

Sind nun die λ_1, λ_2 noch an eine Bedingung gebunden:

$$(41) \qquad F(\overset{\mu}{\lambda_1}, \overset{\nu}{\lambda_2}) = 0,$$

so erfüllen die Sehnen (40) eine Regelfläche der Ordnung $(n-1)(\mu+\nu)$

resp. $\frac{(n-1)(\mu+\nu)}{2}$, jenachdem die Form $F(41)$ in ihren beiden Argumenten unsymmetrisch oder symmetrisch ist. In der That geht dies sofort aus der Elimination von λ_2 (oder λ_1) aus den beiden Gleichungen hervor:

$$(42) \qquad \begin{cases} \sum p_{i\varkappa} p'_{lm} \equiv \sum \Phi_{i\varkappa} p'_{lm} \equiv \Phi(\overbrace{\lambda_1, \lambda_2}^{n-1}) = 0, \\ F(\overset{\mu}{\lambda_1}, \overset{\nu}{\lambda_2}) = 0, \end{cases}$$

die entstehen, sobald man die in Rede stehende Regelfläche mit einer Geraden (p') schneidet.

25. Besitzt dagegen die $R^{(3)}$ eine gewisse endliche Gruppe von π singulären Ebenen und der Projectionspunkt (x') soll irgend einer unter ihnen angehören, so ist der geometrische Ort von (x') eine Fläche der Ordnung π, nämlich eben das Aggregat jener singulären Ebenen.

26. Die zweite Art von Flächen (x'), als die einfachere, möge zuerst abgehandelt werden; zu ihr werden drei Fälle gehören. Erstlich kommt die Gruppe der Hyperosculationsebenen in Betracht. Die zugehörigen Hyperosculationspunkte λ werden durch Nullsetzen der vierreihigen Determinante geliefert, welche sich aus den dritten (nach λ und einer homogen machenden Variabeln zu nehmenden) Ableitungen der $f(\lambda)$ bilden lässt. Man hat also $4(n-3)$ solcher Ebenen, und da, wenn man von einem ihrer Punkte (x') die $R^{(3)}$ projicirt, und nur dann, die Projectionscurve $R^{(2)}$ eine „Undulation“ aufweist, so wird, wie unter (16) angegeben, der „Undulationsfactor“ vom Grade $4(n-3)$ in den δ.

27. Zweitens ist die Gruppe der die $R^{(3)}$ dreimal berührenden Ebenen in's Auge zu fassen. Die je drei Berührpunkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind durch die $n-3$ Gleichungen bestimmt:

$$(43) \qquad \alpha_{\lambda_1^3 \lambda_2^3 \lambda_3^3 \lambda_7 \lambda_8 \cdots \lambda_n} = 0.$$

Die Elimination aller λ bis auf λ_1 erzielt eine Endgleichung vom Grade $4(n-3)(n-4)(n-5)$; somit ist $\frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5)$ die Anzahl der die $R^{(3)}$ dreimal berührenden Ebenen und gleichzeitig der Grad des „Tritangentenfactors“ (27) in den δ.

28. Endlich sind noch diejenigen Schmiegungsebenen der $R^{(3)}$ zu bestimmen, welche die Curve noch einmal berühren. Man eliminire aus:

$$(44) \qquad \alpha_{\lambda_1^3 \lambda_2^2 \lambda_6 \lambda_7 \cdots \lambda_n} = 0$$

alle Argumente bis auf das erste λ_1: die Ordnung $6(n-3)(n-4)$ der Resultante wird zum Grade des „Wendeberührfactors“ (29).

29. Man erkennt unschwer, dass die Behandlung der in den letzten drei Nummern durchgeführten Fälle nicht wesentlich von der früher besprochenen (Nr. 15, 16) abweicht; sie sind auch nur der Vollständigkeit halber noch einmal erwähnt worden, und um den Gegensatz deutlicher hervortreten zu lassen, den das bei den Fällen zweiter Art einzuschlagende Verfahren darbietet.

30. Soll, um wieder mit dem einfachsten Vorkommniss zu beginnen, irgend ein Doppelpunkt der $R^{(2)}$ in eine Spitze ausarten, so muss der Projectionspunkt (x') auf die Tangentenregelfläche der $R^{(3)}$ rücken. Die Form $F(\overset{\mu}{\lambda_1}, \overset{\nu}{\lambda_2})$ (41) stimmt dann mit der Differenz $\lambda_1 - \lambda_2$ überein, und die Ordnung der Fläche, also auch der Grad des „Cuspidalfactors“ (12), wird gleich $(n-1)(\mu+\nu) = 2(n-1)$.

31. Wir wenden uns zu dem — in § VII auf einem Umwege bereits abgeleiteten — „Trinodalfactor“. Da die $R^{(3)}$ in eine Curve mit dreifachem Punkt projicirt werden soll, so muss durch den Projectionspunkt eine solche Sehne (λ_1, λ_2) an die $R^{(3)}$ gehen, welche die Curve noch einmal, in λ_3, trifft. Nun projicirt sich andererseits die $R_n^{(3)}$ vom Punkte λ_1 (und ebenso vom Punkte λ_2) aus in eine $R_{n-1}^{(2)}$ mit $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Doppelpunkten; mithin wird die Correspondenz $F(\lambda_1, \lambda_2)$ hier symmetrisch in beiden Argumenten vom Grade $(n-2)(n-3)$, sodass danach die Ordnung der von den dreifachen Sehnen der $R^{(3)}$ gebildeten Regelfläche zunächst gleich $(n-1)(n-2)(n-3)$ resultiren würde. Da indessen jede der dreifachen Sehnen hierbei dreimalzählend vorkommt, so ist auch die wirkliche Ordnung der Fläche nur der dritte Theil jener Zahl. Das war aber das in (34) notirte Ergebniss.

Algebraisch bedeutet die eben angestellte Abzählung die Zurückführung der Aufgabe auf die einfachere, früher $\big((8), (9)\big)$ erledigte, die Gleichung für die Doppelpunktsargumente einer $R_{n-1}^{(2)}$ herzuleiten. Die letztere ist projectivisch durch die zu ihr gehörige Gruppe der conjugirten Formen $\alpha_{\lambda^{n-1}\lambda_1}$ festgelegt, und ihre Doppelpunktsform Λ (10), die sowohl in λ_1, wie in λ_2 bis zum Grade $(n-2)(n-3)$ ansteigt, wird identisch mit der gesuchten Correspondenzform $F(\lambda_1, \lambda_2)$.

32. Eine „Selbstberührung“ der $R_n^{(2)}$ tritt ein, wenn der Projectionspunkt auf einer derartigen Sehne (λ_1, λ_2) der $R^{(3)}$ liegt, dass die letztere Curve noch in λ_1, λ_2 von einer Ebene berührt wird. Durch Elimination der $\lambda_5, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ aus den Gleichungen

$$(45) \qquad \alpha_{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_5 \lambda_6 \cdots \lambda_n} = 0$$

ergiebt sich die Gleichung $F(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ als symmetrisch in λ_1, λ_2 vom Grade $2(n-3)$. Die Ordnung der bezüglichen Sehnenfläche

wird demnach $2(n-1)(n-3)$, und man hat für den „Selbstberührungsfactor $[\Delta_2 \mathrm{T}_2]$“ der $R^{(2)}$:

(46) $$[\Delta_2 \mathrm{T}_2] = (\overset{2(n-1)(n-3)}{\delta}).$$

33. Irgend ein Doppelpunkt λ_1, λ_2 der $R^{(2)}$ weist in einem seiner Zweige eine Wendung auf, wenn für die Raumcurve $R^{(3)}$ die Schmiegungsebene λ_1 (resp. λ_2) noch durch den Punkt λ_2 (resp. λ_1) geht. Das Resultat der Elimination der Restparameter $\lambda_5, \lambda_6, \ldots, \lambda_n$ aus den Bedingungsgleichungen:

(47) $$\alpha_{\lambda_1^3 \lambda_2 \lambda_5 \lambda_6 \cdots \lambda_n} = 0$$

ist eine Form $F(\overset{3(n-3),}{\lambda_1}\ \overset{(n-3)}{\lambda_2})$. Die betreffenden Sehnen erfüllen demnach eine Fläche der Ordnung $4 \cdot \frac{(n-1)(n-3)}{2} = 2(n-1)(n-3)$ und es kommt für den „Doppelpunktswendungsfactor $[\Omega \Lambda]$“ der $R^{(2)}$:

(48) $$[\Omega \Lambda] = (\overset{4(n-1)(n-3)}{\delta}).$$

34. Den Schluss macht die Aufstellung des Criteriums dafür, dass eine Doppelpunktstangente der $R^{(2)}$ noch einmal berührt, oder auch dualistisch, dass sich in dem einen Berührungspunkte einer Doppeltangente ein Doppelpunkt befindet.

Der projicirenden Sehne (λ_1, λ_2) der $R^{(3)}$ muss dann die Eigenschaft zukommen, dass die (sie enthaltende) Berührungsebene $(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$ die Curve noch einmal, in λ_3 berührt, und man hat aus den bezüglichen Bedingungsgleichungen:

(49) $$\alpha_{\lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3^2 \lambda_6 \lambda_7 \cdots \lambda_n} = 0$$

die $\lambda_3, \lambda_6, \lambda_7, \ldots, \lambda_n$ zu eliminiren, um die zugehörige Form $F(\lambda_1, \lambda_2)$ zu erhalten. Letztere wird vom Grade $4(n-3)(n-4)$ in λ_1 und vom Grade $2(n-3)(n-4)$ in λ_2. Die Summe beider Anzahlen ist mit $(n-1)$ zu multipliciren, um die Ordnung der in Betracht kommenden Regelfläche zu haben, und es ist demgemäss für den „Doppelpunktstangentenberührfactor $[\Lambda \mathrm{M}]$“:

(50) $$[\Lambda \mathrm{M}] = (\overset{6(n-1)(n-3)(n-4)}{\delta}).$$

35. Die so nach einheitlicher Methode hergeleiteten acht Anzahlen für den Grad, welcher den behandelten acht Elementarfactoren in den dreireihigen Determinanten $|a_i a_k a_l| = \delta_{ikl} = \delta$ eignet, sollen in der Tabelle zusammengefasst werden:

(51) $$\left\{\begin{array}{l|ll|l}
[\Lambda\Lambda] & 2(n-1); & & \\
[\mathrm{MM}] & 4(n-3); & & \\
[\Delta_2 \mathrm{T}_2] & 2(n-1)(n-3); & [\Delta_3] & \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3), \\
[\Omega\Lambda] & 4(n-1)(n-3); & [\mathrm{T}_3] & \frac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5), \\
[\Omega \mathrm{M}] & 6(n-3)(n-4); & [\Lambda \mathrm{M}] & 6(n-1)(n-3)(n-4).
\end{array}\right.$$

§ X.

Die sechs Zerfällungsgleichungen.

36. Die Zerlegung der drei Discriminanten und der drei Resultanten der Tabelle (11) ist jetzt ausführbar.

Welche der Elementarfactoren bei jeder der sechs Zerfällungen in's Spiel kommen, ist a priori evident; es kann sich also nur um die Ermittelung der jeweiligen Vielfachheit oder der Exponenten handeln, mit welchen jene Factoren behaftet sind. Da ist es wiederum klar, dass die Exponenten aller, mit Ausnahme des Cuspidalfactors $[\Lambda\Lambda]$, feste d. h. von n unabhängige (ganze, positive) Zahlen sind. Denn beim Verschwinden irgend eines der sieben andern Factoren rückt für jede $R^{(2)}$, welches auch ihre Ordnung n sein mag, immer je die gleiche Anzahl von Singularitätsargumenten zusammen.

Zum Theil trifft das auch für das Verschwinden des Cuspidalfactors zu: denn in einer Spitze vereinigen sich immer die Argumente zweier (einander gleich gewordener) Doppelpunkte und eines Wendepunkts. Aber andererseits gehen von einer Spitze (welche die Classe der R_n um Eins, also auf die Zahl $2n - 3$ erniedrigt) noch $2n - 6$ Tangenten an die Curve, und diese letzteren gelten als ebensoviele ausgeartete Doppeltangenten, deren einer Berührpunkt je in die Spitze hineingerückt ist.

Daraus folgt, dass wohl in den Formen $D(\Omega)$, $D(\Lambda)$, $R(\Omega\Lambda)$ die Vielfachheit von $[\Lambda\Lambda]$ ebenfalls eine constante sein muss, dagegen in den Formen $D(\mathsf{M})$, $R(\Omega\mathsf{M})$, $R(\Lambda\mathsf{M})$ von n abhängig. Die bezügliche Function von n kann, wie die Vergleichung der Grade für beide Seiten der Zerfällungsgleichungen lehrt, nur eine ganze rationale sein, und zwar bei $R(\Omega\mathsf{M})$ vom ersten, bei $D(\mathsf{M})$ und $R(\Lambda\mathsf{M})$ höchstens vom zweiten Grade. Bezeichnen also α, α', α'', β, γ, δ, ε, ... unbekannte Zahlen, so lässt sich für die gemeinten Factorenzerspaltungen das folgende Schema ansetzen;

$$(52)\quad \begin{cases} D(\Omega) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha}[\mathsf{M}\mathsf{M}]^{\beta}, \\ D(\Lambda) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha}[\Delta_2\mathsf{T}_2]^{\beta}[\Delta_3]^{\gamma}, \\ D(\mathsf{M}) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha n^2+\alpha' n+\alpha''}[\Delta_2\mathsf{T}_2]^{\beta}[\mathsf{M}\mathsf{M}]^{\gamma}[\Omega\mathsf{M}]^{\delta}[\mathsf{T}_3]^{\varepsilon}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(\Omega\Lambda) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha}[\Omega\Lambda]^{\beta}, \\ R(\Omega\mathsf{M}) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha n+\alpha'}[\mathsf{M}\mathsf{M}]^{\beta}[\Omega\mathsf{M}]^{\gamma}, \\ R(\Lambda\mathsf{M}) = [\Lambda\Lambda]^{\alpha n^2+\alpha' n+\alpha''}[\Delta_2\mathsf{T}_2]^{\beta}[\Lambda\mathsf{M}]^{\gamma}. \end{cases}$$

Der Kürze wegen sind dabei dieselben Buchstaben wiederholt worden, trotzdem sie immer andere und wieder andere Exponenten angeben.

Die ganzen Zahlen $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ sind nothwendig positiv und grösser als Null und das Gleiche gilt von α in der ersten, zweiten, vierten und fünften Formel, während in den zwei übrigen $\alpha \geqq 0$, α' und α'' dagegen hier und in der fünften eventuell $\gtreqless 0$ ausfallen können.

37. Die Gradvergleichung bei der ersten der Identitäten (52) ergiebt unmittelbar $\alpha = 1$, $\beta = 1$, was schon unter (18') festgestellt war.

An zweiter Stelle, bei $D(\Lambda)$ kommt identisch:

$$(53)\quad 2(n-1)\{(n-1)(n-2)-1\} = 2(n-1)\{\alpha + \beta(n-3) + \tfrac{\gamma}{6}(n-2)(n-3)\},$$

also sofort daraus $\gamma = 6$, weiter $3 = 5 - \beta$ i. e. $\beta = 2$, und damit $\alpha = 1$.

38. Indem die nächstfolgende Zerlegung, als die complicirteste zurückgestellt werden möge, haben wir für die vierte:

$$(54)\qquad 2(n-1)\,.\,2(n-2) = 2(n-1)\{\alpha + 2\beta(n-3)\},$$

was zur unmittelbaren Folge hat:

$$\alpha = 2, \quad \beta = 1.$$

39. Die fünfte der Identitäten (52) führt zu:

$$(55)\qquad \begin{aligned} 10(n-2)(n-3) = 2(n-1)(\alpha n + \alpha') &+ 4\beta(n-3) \\ &+ 6\gamma(n-3)(n-4) \end{aligned}$$

und durch Vergleichung der Coefficienten von n^2, n, 1 zu:

$$(56)\qquad \begin{cases} 5 = \alpha + 3\gamma, \\ 25 = \alpha - \alpha' - 2\beta + 21\gamma, \\ 30 = 36\gamma - \alpha' - 6\beta. \end{cases}$$

Gemäss der Forderung $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ hat die erste dieser Relationen nur die eine Lösung $\alpha = 2$, $\gamma = 1$, wodurch die beiden andern werden:

$$-2 = \alpha' + 2\beta, \quad 6 = \alpha' + 6\beta,$$

also nur durch

$$\alpha' = -6, \quad \beta = 2$$

befriedigt werden.

40. Für die beiden noch restirenden Zerlegungen, welche sich auf die dritte und sechste Formel (52) beziehen, wird die Methode der Coefficientenvergleichung allein nicht ausreichen zur Bestimmung sämmtlicher Exponentenzahlen, sondern es wird sich als nöthig erweisen, für gewisse niedrigste Ordnungen n, etwa $n = 4$, direct vorzugehen.

Behufs Aufsuchung der Exponenten in der letzten Formel (52) hat man zuvörderst:

$$(57)\qquad \begin{aligned} 6(n-1)(n-2)(n-3) &= 2(n-1)(\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha'') \\ &+ 2\beta(n-1)(n-3) + 6\gamma(n-1)(n-3)(n-4), \end{aligned}$$

was jedenfalls die Theilbarkeit der quadratischen Form $\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha''$ durch $n - 3$ nach sich zieht:

$$\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha'' = (n-3)(\alpha n + \alpha_1).$$

Nach beiderseitigem Heben mit $2(n-1)(n-3)$ bleibt:

$$(57') \qquad 3(n-2) = \alpha n + \alpha_1 + \beta + 3\gamma(n-4)$$

und diese Identität zerlegt sich in die beiden Gleichungen:

$$3 = \alpha + 3\gamma, \quad -6 = \alpha_1 + \beta - 12\gamma,$$

deren erste die ausschliessliche Lösung $\gamma = 1$, $\alpha = 0$ besitzt, wodurch die andere übergeht in:

$$6 = \alpha_1 + \beta.$$

Hier sind vorderhand die fünf Werthsysteme $\alpha_1, \beta = (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ möglich. Erst die genauere Untersuchung des Falles $n = 4$ wird lehren, dass β allein der Werth Vier, demnach α_1 der Werth Zwei zukommt.

41. Aehnlich, nur noch verwickelter, sind die Vorkommnisse bei der Zerlegung von $D(\mathsf{M})$, nämlich in der dritten Formel (52).

Vermöge Gradvergleichung findet man zunächst:

$$(58) \quad \begin{aligned} 4(n-3)\{4(n-2)(n-3)-1\} &= 2(n-1)(\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha'') \\ &+ 2\beta(n-1)(n-3) + 4\gamma(n-3) + 6\delta(n-3)(n-4) \\ &+ \tfrac{4}{3}\varepsilon(n-3)(n-4)(n-5), \end{aligned}$$

sodass wiederum die quadratische Form $\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha''$ zerspaltbar ist in

$$\alpha n^2 + \alpha' n + \alpha'' = (n-3)(\alpha n + \alpha_1),$$

wodurch sich (58) vereinfacht zu:

$$(58') \quad \begin{aligned} 2\{4(n-2)(n-3)-1\} &= (n-1)(\alpha n + \alpha_1) + \beta(n-1) + 2\gamma \\ &+ 3\delta(n-4) + \tfrac{2}{3}\varepsilon(n-4)(n-5). \end{aligned}$$

Die drei damit äquivalenten Relationen zwischen den Zahlen $\alpha, \alpha_1, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ lassen für die letzteren, wie leicht zu erkennen, eine mehrfache Mannigfaltigkeit von Lösungen zu. Ohne uns daher auf dieselben einzulassen, nehmen wir gleich das unten bewiesene Ergebniss zu Hülfe, dass für $n = 4$ (wo die Factoren $[\mathsf{T}_3]$, $[\Omega\mathsf{M}]$ überhaupt nicht auftreten können) $\beta = 2$, $\gamma = 1$ und $4\alpha + \alpha_1 = 2$ wird. Nun geht aus (58') für $\beta = 2$, $\gamma = 1$ hervor:

$$(59) \quad \left\{ \begin{aligned} 8 &= \alpha + \tfrac{2}{3}\varepsilon, \\ -40 &= \alpha_1 - \alpha + 2 + 3\delta - 6\varepsilon, \\ 46 &= -\alpha_1 - 12\delta + \tfrac{40}{3}\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Die erste dieser Beziehungen überzeugt uns davon, dass die ganze positive Zahl $\varepsilon (> 0)$ durch drei theilbar sein muss:

$$\varepsilon = 3\varepsilon_1, \quad 8 = \alpha + 2\varepsilon_1.$$

Denn sonst wäre α ein irreducibler Bruch mit dem Nenner drei, was nicht angeht, da $(n-3)(\alpha n + \alpha_1)$ für jedes $n (\geqq 4)$ ganzzahlig ausfallen muss. Die Gleichung $8 = \alpha + 2\varepsilon_1$ bietet nur vier brauchbare Lösungen, nämlich $\varepsilon_1, \alpha = (1, 6), (2, 4), (3, 2), (4, 0)$. Aus den beiden weiteren Relationen (59) folgt aber durch Addition:

$$4 + \alpha + 9\delta = 22\varepsilon_1.$$

wodurch von den vier angeführten Werthsystemen (ε_1, α) alle bis auf $\varepsilon_1 = 2$, $\alpha = 4$ ausgeschlossen werden. Damit wird zugleich $\delta = 4$, und, wegen $4\alpha + \alpha_1 = 2$ endlich $\alpha_1 = -14$.

42. Durch Zusammenfassung der in den Nummern 37 bis 41 erzielten Resultate gestaltet sich demnach die Tabelle (32) definitiv, wie folgt:

$$(60) \quad \begin{cases} D(\Omega) = [\Lambda\Lambda][\mathrm{MM}], \\ D(\Lambda) = [\Lambda\Lambda][\Delta_2 \mathrm{T}_2]^2[\Delta_3]^6, \\ D(\mathrm{M}) = [\Lambda\Lambda]^{2(n-3)\{2(n-3)-1\}}[\Delta_2 \mathrm{T}_2]^2[\mathrm{MM}][\Omega \mathrm{M}]^4[\mathrm{T}_3]^6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(\Omega\Lambda) = [\Lambda\Lambda]^2[\Omega\Lambda], \\ R(\Omega \mathrm{M}) = [\Lambda\Lambda]^{2(n-3)}[\mathrm{MM}]^2[\Omega \mathrm{M}], \\ R(\Lambda \mathrm{M}) = [\Lambda\Lambda]^{2(n-3)}[\Delta_2 \mathrm{T}_2]^4[\Lambda \mathrm{M}]. \end{cases}$$

Man ersieht daraus beiläufig, dass $D(\Omega)$ sowohl in $D(\mathrm{M})$, wie in $R(\Omega \mathrm{M})$ als Factor enthalten ist.

§ XI.

Der Fall $n = 4$.

43. Während die Bezeichnung (1) der Formen $f(\lambda)$ beibehalten werde, notiren wir die conjugirten $\varphi(\lambda)$ (19) jetzt lieber mit:

$$(61) \quad \begin{cases} \varphi_1(\lambda) = \alpha_{\lambda^4} = \alpha_0 + 4\alpha_1\lambda + 6\alpha_2\lambda^2 + 4\alpha_3\lambda^3 + \alpha_4\lambda^4, \\ \varphi_2(\lambda) = \beta_{\lambda^4} = \beta_0 + 4\beta_1\lambda + 6\beta_2\lambda^2 + 4\beta_3\lambda^3 + \beta_4\lambda^4 \end{cases}$$

und setzen zur Abkürzung für die (den $\delta_{lmn} = |a_l a_m a_n|$ proportionalen) zweireihigen Determinanten:

$$(62) \quad \begin{vmatrix} \alpha_\iota & \alpha_\varkappa \\ \beta_\iota & \beta_\varkappa \end{vmatrix} = \pi_{\iota\varkappa}.$$

Von den ganzen Functionen Ω, Λ, M berechnen wir insbesondere je die beiden äussersten Coefficienten, da es zweckmässig ist, das Argument $\lambda = 0$ (resp. $\lambda = \infty$) der Reihe nach zu einem der Singularitätenargumente zu machen.

Die Form Ω, als Functionaldeterminante der binären Formen (61), lautet unter der festgesetzten Beschränkung:

$$\Omega(\lambda) = \pi_{01} + 3\pi_{02}\lambda + \cdots + 3\pi_{24}\lambda^5 + \pi_{34}\lambda^6. \tag{63}$$

Zweitens gelangt man zur Doppeltangentenform M am einfachsten durch Elimination von λ_1 aus:

$$\begin{cases} \alpha_{\lambda^2\lambda_1^2} = (\alpha_0 + 2\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2) + 2\lambda_1(\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda + \alpha_3\lambda^2) \\ \qquad\qquad + \lambda_1^2(\alpha_2 + 2\alpha_3\lambda + \alpha_3\lambda^2) = 0, \\ \beta_{\lambda^2\lambda_1^2} = (\beta_0 + 2\beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2) + 2\lambda_1(\beta_1 + 2\beta_2\lambda + \beta_3\lambda^2) \\ \qquad\qquad + \lambda_1^2(\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_1\lambda^2) \quad = 0, \end{cases}$$

also:

$$\begin{aligned} \mathsf{M}(\lambda) = {} & (4\pi_{01}\pi_{12} - \pi_{02}^2) + 4\lambda\{2\pi_{01}\pi_{13} + \pi_{02}(\pi_{12} - \pi_{03})\} + \cdots \\ & + (4\pi_{34}\pi_{23} - \pi_{24}^2)\lambda^8 + 4\lambda^7\{2\pi_{34}\pi_{13} + \pi_{24}(\pi_{23} - \pi_{14})\} + \cdots. \end{aligned} \tag{64}$$

Für einen Doppelpunkt (λ, λ_1) endlich müssen alle drei Determinanten der Matrix verschwinden:

$$\left|\begin{matrix} \alpha_0 + \alpha_1(\lambda + \lambda_1) + \alpha_2\lambda_1\lambda, & \alpha_1 + \alpha_2(\lambda + \lambda_1) + \alpha_3\lambda_1\lambda, \\ & \alpha_2 + \alpha_3(\lambda + \lambda_1) + \alpha_4\lambda_1\lambda, \\ \beta_0 + \beta_1(\lambda + \lambda_1) + \beta_2\lambda_1\lambda, & \beta_1 + \beta_2(\lambda + \lambda_1) + \beta_3\lambda_1\lambda, \\ & \beta_2 + \beta_3(\lambda + \lambda_1) + \beta_4\lambda_1\lambda, \end{matrix}\right| = 0 \tag{65}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix},$$

sodass die Doppelpunktsform Λ dadurch zu Stande kommt, dass das Resultat der Elimination von λ_1 aus $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 \end{vmatrix} = 0$ und $\begin{vmatrix} \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} = 0$ dividirt wird durch dasjenige der Elimination von λ_1 aus $\mathsf{A}_1 = 0$, $\mathsf{B}_1 = 0$. Die Ausführung leitet zu der Entwickelung:

$$\begin{aligned} \Lambda(\lambda) = {} & \frac{1}{\pi_{12}}\left\{\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \\ \pi_{12} & \pi_{13} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{02} & \pi_{12} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{23} \end{vmatrix}^2\right\} \\ & + \frac{\lambda}{\pi_{12}}\left[\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \\ \pi_{12} & \pi_{13} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{02} & \pi_{13} \\ \pi_{13} & \pi_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \pi_{01}, & \pi_{03} + \pi_{12} \\ \pi_{12}, & \pi_{14} + \pi_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{02} & \pi_{12} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{13} \\ \pi_{12} & \pi_{24} \end{vmatrix}\right. \\ & \qquad + \begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \\ \pi_{12} & \pi_{13} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{03} & \pi_{12} \\ \pi_{14} & \pi_{23} \end{vmatrix} \qquad\qquad - 2\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{02} & \pi_{12} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{vmatrix} \\ & \qquad \left. - \frac{\pi_{13}}{\pi_{12}}\left\{\begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{02} \\ \pi_{12} & \pi_{13} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \pi_{02} & \pi_{12} \\ \pi_{13} & \pi_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \pi_{01} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{23} \end{vmatrix}^2\right\}\right] + \cdots \end{aligned} \tag{66}$$

wo die Coefficienten von λ^6, λ^5 aus den angeschriebenen von λ^0, λ^1 durch Vertauschung der π mit den symmetrisch gelegenen Grössen hervorgehen.

44. Vermöge der Ausdrücke (63), (64), (66) lässt sich für den vorliegenden Fall zunächst die Vielfachheit des Cuspidalfactors $[\mathsf{\Lambda\Lambda}]$ in den Formeln (52) rechnerisch nachweisen.

Soll nämlich die Curve R_4 im Punkte $\lambda = 0$ eine Spitze erhalten, so ist dazu, wie die Bildung (15) erkennen lässt, das gleichzeitige Verschwinden von π_{01}, π_{02}, π_{12} nothwendig und hinreichend. Setzt man demgemäss

$$(67) \qquad \pi_{01} = \varepsilon\varrho_{01}, \quad \pi_{02} = \varepsilon\varrho_{02}, \quad \pi_{12} = \varepsilon\varrho_{12}$$

und berücksichtigt, dass dann $[\mathsf{\Lambda\Lambda}]$ mit der ersten Potenz von ε proportional wird, so hat man nur noch zu ermitteln, durch welche Potenz von ε die linken Seiten von (52) jeweilig theilbar werden, um mit diesen Potenzexponenten zugleich die betr. Vielfachheit des Factors $[\mathsf{\Lambda\Lambda}]$ zu haben.

Durch Substitution von (67) nehmen die Entwickelungen (63), (64), (66) die Form an:

$$(68) \qquad \begin{cases} \Omega(\lambda) = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\lambda + \omega_2\lambda^2 + \cdots = 0, \\ \mathsf{\Lambda}(\lambda) = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda^2 + \cdots = 0, \\ \mathsf{M}(\lambda) = \varepsilon^2\mu_0 + \varepsilon\mu_1\lambda + \mu_2\lambda^2 + \cdots = 0 \end{cases}$$

wo die ω, λ, μ den Factor ε nicht mehr enthalten.

Die Bézout'sche Bildungsweise der Discriminanten und Resultanten lässt direct ablesen, dass $D(\Omega)$ und $D(\mathsf{\Lambda})$ mit der ersten, dagegen $D(\mathsf{M})$, $R(\Omega\mathsf{\Lambda})$, $R(\Omega\mathsf{M})$, $R(\mathsf{\Lambda M})$ mit der zweiten Potenz von ε proportional werden.

Eine höhere Potenz von ε kann nicht ausgeschieden werden, da sonst (ausser den in $\lambda = 0$ entfallenden Argumenten) noch weitere gleiche resp. gemeinsame Wurzeln der Gleichungen (68) existiren müssten, was nicht der Fall sein kann.

45. Eine Undulation im Punkte $\lambda = 0$ kann nur für $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ d. i. $\pi_{01} = 0$, $\pi_{02} = 0$, $\pi_{03} = 0$, $\pi_{04} = 0$ (ohne dass π_{12} mitverschwindet) eintreten. Man setze dementsprechend:

$$(69) \qquad \pi_{0i} = \varepsilon\pi'_{0i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

so wird einerseits der Undulationsfactor $[\mathsf{MM}]$ als die Resultante der beiden Formen α_{λ^2}, β_{λ^2} (61) mit der ersten (und keiner höheren) Potenz von ε proportional. Andererseits nehmen jetzt $\Omega(\lambda)$ und $\mathsf{M}(\lambda)$ die Gestalt an:

$$(70) \qquad \begin{cases} \Omega(\lambda) = \varepsilon\omega_0 + \varepsilon\omega_1\lambda + \omega_2\lambda^2 + \cdots, \\ \mathsf{M}(\lambda) = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\lambda + \mu_2\lambda^2 + \cdots \end{cases}$$

sodass die Discriminanten beider Formen durch ε, ihre Resultante indessen noch durch ε^2 theilbar wird.

46. Der Selbstberührungsfactor $[\Delta_2 T_2]$ fällt hier mit der Discriminante der Invariante j des Formenbüschels $\alpha_{\lambda^6} + \varkappa\beta_{\lambda^6}$ zusammen. Sollen im Besondern $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ seine beiden Parameter werden, so haben gleichzeitig π_{20}, π_{21}, π_{23}, π_{24} und π_{13} zu verschwinden. Nimmt man aber wiederum diese fünf Grössen mit einer und derselben Grösse ε proportional an, so zeigt sich, dass noch die erste Potenz von ε als Factor in $[\Delta_2 T_2]$ enthalten ist. Die Formen Λ und M weisen ε auf, wie folgt:

$$(71)\quad \begin{cases} \Lambda(\lambda) = \varepsilon\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda^2 + \cdots + \lambda_4\lambda^4 + \varepsilon\lambda_5\lambda^5 + \varepsilon\lambda_6\lambda^6, \\ M(\lambda) = \varepsilon\mu_0 + \varepsilon\mu_1\lambda + \mu_2\lambda^2 + \cdots + \mu_6\lambda^6 + \varepsilon\mu_7\lambda^7 + \varepsilon\mu_8\lambda^8; \end{cases}$$

ihre Discriminanten werden durch ε^2, ihre Resultante durch ε^4 theilbar.

47. Um den Einfluss des Trinodalfactors $[\Delta_3]$ zu studiren, ist es zweckmässig, in der Canonisirung der Formen noch einen Schritt weiter zu gehen. Man denke sich einen der drei Doppelpunkte bereits mit den canonischen Argumenten $0, \infty$ versehen. Dann dürfen wir, ohne der Allgemeinheit zu vergeben, die Coefficienten von α_{λ^4} so annehmen, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\alpha_0 = \alpha_4 = 1$ wird. Damit kommt für den Trinodalfactor

$$(72)\qquad [\Delta_3] = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} = \beta_1\beta_3 - \beta_2^2$$

und für die Form Λ:

$$(73)\qquad \begin{aligned} \Lambda(\lambda) = 0 &+ \beta_2(\beta_1\beta_3 - \beta_2^2)\lambda + \lambda_2\lambda^2 + \lambda_3\lambda^3 + \lambda_4\lambda^4 \\ &+ \beta_2(\beta_1\beta_3 - \beta_2^2)\lambda^5 + 0\,.\,\lambda^6. \end{aligned}$$

Die Discriminante $D(\Lambda)$ würde somit zunächst durch die vierte Potenz von $[\Delta_3]$ theilbar werden. Davon entfällt die zweite Potenz je auf die Bedingung, dass sich von den sechs Doppelpunktsargumenten zwei in $\lambda = 0$, resp. zwei in $\lambda = \infty$ vereinigen. Da aber beim wirklichen Eintreten eines dreifachen Punktes auch noch die beiden letzten jener sechs Wurzeln coincidiren müssen, so erfordert die Symmetrie, dass noch einmal eine zweite Potenz von $[\Delta_3]$ in $D(\Lambda)$ auftreten muss, im Ganzen demnach die sechste Potenz.

Dasselbe Ergebniss lässt sich indessen auch ohne die gemachte Annahme ableiten. Wir setzen:

$$(74)\quad \pi_{12} = \varepsilon\pi'_{12},\quad \pi_{13} = \varepsilon\pi'_{13},\quad \pi_{23} = \varepsilon\pi'_{23},\quad \pi_{01}\pi_{03} - \pi_{02}^2 = \varepsilon\pi,$$

so ist durch das Verschwinden von ε das Criterium dafür gegeben, dass ein dreifacher Punkt entsteht, für den zwei Parameter die Werthe

$0, \infty$ annehmen. $[\Delta_3]$ wird mit der ersten Potenz von ε proportional, und Λ schreibt sich:

(75) $\Lambda(\lambda) = \varepsilon^2\lambda_0 + \varepsilon\lambda_1\lambda + \lambda_2\lambda^2 + \cdots + \lambda_4\lambda^2 + \varepsilon\lambda_5\lambda + \varepsilon^2\lambda^6.$

Im Uebrigen schliesst man, wie oben.

46. Was endlich den Factor $[\Omega\Lambda]$ angeht, so hat man im Zweige $\lambda = 0$ eines Doppelpunkts $(0, \infty)$ eine Wendung für

$$\pi_{12} = \pi_{13} = \pi_{23} = \pi_{01} = 0.$$

Macht man also wieder die genannten vier π mit einer Grösse ε proportional, so haben die gleiche Eigenschaft nur je das erste Glied der Formen Ω und Λ, und damit auch ihre Resultante. Es kann daher auch nur die erste Potenz von $[\Omega\Lambda]$ in $R(\Omega\Lambda)$ enthalten sein.

Es sind auf diese Weise nicht nur die in Nr. 40 und 41 vorweggenommenen Hülfsresultate begründet, sondern überhaupt die Zerlegungen (52) für $n = 4$ von Neuem abgeleitet worden.

Man kann indessen, im Wesentlichen mit denselben Hülfsmitteln, auch für ein beliebiges n die Natur der den einzelnen Factoren in (52) zukommenden Vielfachheiten aufdecken, was sofort in Angriff genommen werden soll.

§ XII.

Die Vielfachheiten der Zerlegungsfactoren.

47. Wir operiren wiederum gleichzeitig mit den Formen $f(\lambda) = \alpha_\lambda{}^n$ und ihren conjugirten $\varphi(\lambda) = \alpha_{\lambda}{}^{n}$, und bevorzugen die canonischen Argumente $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, sowie als typische Grundlage den Fall $n = 6$.

Die Discriminante der Wendepunktsform Ω erledigt sich mit einer einzigen Bemerkung. Die Entwickelung von Ω beginnt mit:

(76) $\Omega(\lambda) = \delta_{012} + a\lambda\delta_{013} + (b_1\lambda^2\delta_{014} + b_2\lambda^2\delta_{023}) + \cdots.$

Behufs Coincidenz zweier Wurzeln von $\Omega = 0$ in $\lambda = 0$ haben δ_{012} und δ_{013} zu verschwinden. Das hat zur Folge, dass entweder die ganze Matrix $|a_0\ a_1|$ der aus den beiden ersten Verticalen der a gebildeten Reihen, und damit alle $\delta_{01\varkappa}(\varkappa = 2, 3, 4, \ldots)$ verschwinden, oder aber noch δ_{023} und δ_{123}. Das Erstere entspricht dem Eintreten einer Spitze, das Letztere dem einer Undulation.

In der That wird für $\delta_{01\varkappa} = \varepsilon\delta'_{01\varkappa}$ der Cuspidalfactor mit ε proportional, andererseits aber auch $D(\Omega)$. Das Letztere gilt aber auch für $\delta_{012} = \varepsilon\delta'_{012}$, $\delta_{013} = \varepsilon\delta'_{013}$, $\delta_{023} = \varepsilon\delta'_{023}$, $\delta_{123} = \varepsilon\delta'_{123}$, es kann somit auch der in $D(\Omega)$ enthaltene Undulationsfactor, als ganze Function der δ, nur durch die erste Potenz von ε aufgehen. Das ist der Inhalt der ersten Zerlegungsformel (52).

48. Das von λ freie Glied der Doppeltangentenform $\mathsf{M}(\lambda)$ kann man vermöge der in (7) gegebenen Herleitung ohne Weiteres hinschreiben, es ist die Discriminante der Form

$$(77)\qquad \begin{aligned} \mathsf{T} &= |\alpha_0+\alpha_1\lambda_1,\ \alpha_1+\alpha_2\lambda_1,\ldots,\ \alpha_{n-3}+\alpha_{n-2}\lambda_1| \\ &= \delta_{012}+\delta_{013}\lambda_1+\delta_{014}\lambda_1^2+\cdots+\delta_{01n}\lambda_1^{n-2}. \end{aligned}$$

Um das Gleiche für die Doppelpunktsform $\Lambda(\lambda)$ zu leisten, beachte man, dass auf Grund der Beziehung (9) das von λ freie Glied des Productes $\Lambda\mathsf{M}\Omega$ gleich der Resultante aus der Form T (77) und aus der ähnlich gebildeten:

$$(78)\quad \begin{aligned} \Delta &= |\alpha_0+2\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2,\ \alpha_1+2\alpha_2\lambda+\alpha_3\lambda^2,\ldots,\alpha_{n-3}+2\alpha_{n-2}\lambda+\alpha_{n-1}\lambda^2| \\ &= \delta_{012}+2\delta_{013}\lambda+\Delta_2\lambda^2+\cdots \end{aligned}$$

ist.

Wir legen die beiden Ergebnisse in den Formeln nieder:

$$(79)\qquad \mathsf{M}(0)=D(\mathsf{T}),\quad \Lambda(0)=\frac{R(\Delta,\mathsf{T})}{\delta_{012}\cdot D(\mathsf{T})}.$$

49. Mit Hülfe der Darstellungen (76) und (79) ist die Vielfachheit des Cuspidalfactors $[\Lambda\Lambda]$ für sämmtliche Zerlegungen (52) unschwer zu bestimmen. Setzt man wieder, wie oben, $\delta_{01\varkappa}=\varepsilon\delta'_{01\varkappa}$, so enthalten sämmtliche Coefficienten von T (77) den Factor ε, sodass die Discriminante von T noch durch $\varepsilon^{2(n-3)}$, die Resultante von Δ und T noch durch $\varepsilon^{2(n-2)}$, und endlich $\Lambda(0)$ noch durch ε^1 theilbar wird. Daraus lässt sich weiter folgern, dass die Coefficienten von $\mathsf{M}(\lambda)$ successive um Eins abnehmende Potenzen von ε aufweisen:

$$(80)\quad \begin{aligned} \mathsf{M}(\lambda) &= \mu_0\varepsilon^{2(n-3)}+\mu_1\lambda\varepsilon^{2(n-3)-1}+\cdots+\mu_{2(n-3)-1}\lambda^{2(n-3)-1}\varepsilon^1 \\ &\quad +\mu_{2(n-3)}\lambda^{2(n-3)}+\cdots: \end{aligned}$$

Denn mit verschwindendem ε rückt von $2(n-3)$ Doppeltangenten je der eine Berührpunkt in die Spitze $\lambda=0$ herein: setzt man also vor erfolgtem Grenzübergang irgend eines der fraglichen (und gleichberechtigten) Berührargumente τ mit einer unendlich kleinen Grösse η vergleichbar, also ihr Product mit $\eta^{2(n-3)}$, so ergiebt sich aus der Aequivalenz von $\eta^{2(n-3)}$ mit $\varepsilon^{2(n-3)}$, dass η mit ε selbst vertauscht werden kann. Mithin nehmen in $\mathsf{M}(\lambda)$ die Potenzen von ε genau so ab, wie in dem Producte der $(\tau-\lambda)$. q. e. d.

Dies liefert endlich gemäss (9) die Entwickelung für Λ:

$$(81)\qquad \Lambda(\lambda)=\lambda_0\varepsilon+\lambda_1\varepsilon\lambda+\lambda_2\lambda^2+\cdots.$$

Aus der Art des Auftretens von ε in den Anfangsgliedern von Ω, M, Λ fliesst unverzüglich die Vielfachheit von ε und damit von $[\Lambda\Lambda]$, wie sie für die Discriminanten und Resultanten jener drei Formen in (52) angegeben steht.

50. Auch der Undulationsfactor $[\mathsf{M}\mathsf{M}]$ macht keine Schwierigkeiten. Wie in Nr. 47 substituiren wir für δ_{012}, δ_{013}, δ_{023}, δ_{123} mit

ε proportionale Ausdrücke. Dann enthalten die beiden ersten Glieder von Ω, wie auch das erste von M ε zur ersten Potenz. Da auch das zweite Glied von M noch mit ε verschwinden muss, ε aber hier keinenfalls in einer höheren Potenz auftreten darf, als im ersten Gliede, so kann das wiederum nur die erste Potenz sein. Damit ist erklärt, wesshalb ε, also auch das ihm proportionale $[\mathsf{M}\mathsf{M}]$ in $D(\Omega)$ und $D(\mathsf{M})$ nur einfach, in $R(\Omega\mathsf{M})$ dagegen doppelt auftritt.

51. Zur Untersuchung des Trinodalfactors $[\Delta_3]$ nehme man für den Augenblick an, irgend einer der Doppelpunkte besitze bereits das Argumentenpaar $(0, \infty)$, dann dürfen wir in der ersten der Formen α_{λ^n} sämmtliche Coefficienten bis auf die beiden äusseren gleich Null annehmen. Seien β_{λ^n}, $\gamma_{\lambda^n}\ldots$ die weiteren zugehörigen Formen, so kann ein dreifacher Punkt $(0, \infty, \lambda_3)$ nur unter der Bedingung entstehen, dass die Beziehungen

$$(82) \qquad \beta_{0,\infty,\lambda_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_n} = 0, \quad \gamma_{0,\infty,\lambda_3,\lambda_4,\ldots,\lambda_n} = 0, \ldots$$

bei festem λ_3 für ein einfach unendliches System von Werthen $(\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_n)$ erfüllt werden. Bezeichnen $r_{\lambda^{n-2}}$, $s_{\lambda^{n-2}}$ die zu den Formen $\beta_{0,\infty,\lambda^{n-2}}$, $\gamma_{0,\infty,\lambda^{n-2}}, \ldots$ conjugirte, so ist die gemeinte Bedingung äquivalent mit dem gleichzeitigen Verschwinden von $r_{\lambda_3{}^{n-2}}$ und $s_{\lambda_3{}^{n-2}}$. Der Trinodalfactor ist somit in unserem Falle in zwei Factoren zerlegbar, von denen der eine, auf den Doppelpunkt $(0, \infty)$ bezügliche übereinstimmt mit der Resultante $R(r, s)$ d. i. einer Bildung, die in den Coefficienten $\beta, \gamma, \ldots$ von (82) je vom Grade $n-2$ wird:

$$(83) \qquad R(r, s) = (\overbrace{\beta, \gamma, \ldots}^{n-2}).$$

Versteht man demnach wieder unter ε eine beliebig kleine Grösse und setzt

$$(84) \qquad R(r, s) = \varepsilon R',$$

so verschwindet in der Doppelpunktsform $\Lambda(\lambda)$ je das äusserste Glied, während das nächst benachbarte noch ε, aber nur in der ersten Potenz als Factor enthält. Denn die Coefficienten von Λ sind, nach (10), vom Grade $n-1$ in den $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Es kommt also

$$(85) \qquad \Lambda(\lambda) = 0 + a\varepsilon\lambda + \cdots + a'\varepsilon\lambda^{(n-1)(n-2)-1} + 0 \,.\, \lambda^{(n-1)(n-2)}.$$

Hebt man nachträglich die Specialisirung der Argumente $(0, \infty)$ wieder auf, und setzt demgemäss

$$(86) \qquad \pi_{12} = \varepsilon\pi'_{12}, \quad \pi_{13} = \varepsilon\pi'_{13}, \quad \pi_{23} = \varepsilon\pi'_{23}, \quad R = \varepsilon R',$$

so ändert sich, wie schon für $n = 4$ nachgewiesen, die Form (85) nur insofern, als an die Stelle der Null beidemal ε^2 tritt.

Um jetzt die alleinige Wirkung des Argumentes 0 zu erkennen, bringt man mittels einer linearen Transformation das Argument ∞ an irgend eine andere, endliche Stelle, sodass nur noch die beiden ersten Glieder von $\mathsf{\Lambda}$ in Betracht kommen. Diese liefern zur Discriminante den Factor ε^2: wegen des symmetrischen Einflusses aber, den alle drei Argumente des dreifachen Punktes auf das Verschwinden von $[\mathsf{\Delta}_3]$ haben, ist jener Factor ε^2 dreifach zu nehmen. Daher die sechste Potenz von $[\mathsf{\Delta}_3]$ in $D(\mathsf{\Lambda})$ (52).

Dass sich genau in derselben Art drei Doppeltangenten zu einer dreifachen Tangente vereinigen, ist evident.

52. Die Factoren $[\mathsf{\Omega\Lambda}]$ und $[\mathsf{\Lambda M}]$ in $R(\mathsf{\Omega\Lambda})$ resp. $R(\mathsf{\Lambda M})$ können mit zwei Worten ihre Erledigung finden. Verlegt man das bezügliche Argument von Ω resp. M in die Nähe von $\lambda = 0$, so wird jedesmal das erste Glied von Ω resp. M proportional mit ε: wie daher auch das erste Glied der zugehörigen Form $\mathsf{\Lambda}$ beschaffen sein mag, die Resultante kann immer nur die erste Potenz von ε enthalten.

Das Gleiche gilt auch noch von dem Factor $[\mathsf{\Omega M}]$ in $R(\mathsf{\Omega M})$. Es erübrigt noch, das Verhalten von $[\mathsf{\Omega M}]$ in der Discriminante von M, sowie des Selbstberührungsfactors $[\mathsf{\Delta}_2\mathsf{T}_2]$ in $D(\mathsf{\Lambda})$, $D(\mathsf{M})$ und $R(\mathsf{\Lambda M})$ einzusehen.

53. Was den letzteren Factor angeht, so verfahre man, wie eben. Sollen die Argumente einer Doppeltangente in die eines Doppelpunktes $(0, \infty)$ hereinrücken, so haben die Gleichungen zu bestehen:

$$\beta_{0,0,\infty,\infty,\lambda_5,\lambda_6,\cdots,\lambda_n} = 0, \quad \gamma_{0,0,\infty,\infty,\lambda_5,\lambda_6,\cdots,\lambda_n} = 0, \ldots \tag{87}$$

während wiederum $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ gesetzt ist. Der Selbstberührfactor erweist sich mit dem Quadrate der Resultante P von (87) proportional. Die Vergleichsgrösse ε tritt in $\mathsf{\Lambda}$ und M auf, wie folgt:

$$\begin{cases} \mathsf{\Lambda}(\lambda) = 0 + a\varepsilon\lambda + \cdots + a'\varepsilon\lambda^{(n-1)(n-2)-1} + 0\,.\,\lambda^{(n-1)(n-2)}, \\ \mathsf{M}(\lambda) = \varepsilon^2 + b\varepsilon\lambda + \cdots + b'\varepsilon\lambda^{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon^2\lambda^{4(n-2)(n-3)}. \end{cases} \tag{88}$$

$D(\mathsf{\Lambda})$ wird durch ε^4, also durch $[\mathsf{\Delta}_2\mathsf{T}_2]^2$ theilbar; desgleichen $D(\mathsf{M})$, dagegen $R(\mathsf{\Lambda M})$ durch $[\mathsf{\Delta}_2\mathsf{T}_2]^4$.

Substituirt man nunmehr wieder statt $0, \infty$ in der Nähe befindliche Werthe, so werden $\mathsf{\Lambda}$ und M zu:

$$\begin{cases} \mathsf{\Lambda}(\lambda) = \varepsilon + a\varepsilon\lambda + \cdots + a'\varepsilon\lambda^{(n-1)(n-2)-1} + \varepsilon\lambda^{(n-1)(n-2)}, \\ \mathsf{M}(\lambda) = \varepsilon + b\varepsilon\lambda + \cdots + b'\varepsilon\lambda^{4(n-2)(n-3)-1} + \varepsilon\lambda^{4(n-2)(n-3)}, \end{cases} \tag{89}$$

während $[\mathsf{\Delta}_2\mathsf{T}_2]$ nur noch mit der ersten Potenz von ε vergleichbar wird. Da aber $D(\mathsf{\Lambda})$, $D(\mathsf{M})$, $R(\mathsf{\Lambda M})$ jetzt nur noch durch ε^2, ε^2, ε^4 theilbar sind, so ergiebt sich je die nämliche Vielfachheit von $[\mathsf{\Delta}_2\mathsf{T}_2]$ von Neuem.

54. Als Typus zur Behandlung des Wendeberührfactors $[\Omega \mathsf{M}]$ kann der Fall $n = 5$ dienen. Zunächst berechne man die beiden ersten Glieder von $\mathsf{M}(\lambda)$. Mit Einführung der Abkürzungen:

$$(90)\qquad \mathsf{A}_0 = \alpha_0 + 2\alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2,\quad \mathsf{A}_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda + \alpha_3\lambda^2, \ldots \\ \ldots, \mathsf{A}_3 = \alpha_3 + 2\alpha_4\lambda + \alpha_5\lambda^2$$

wird die Correspondenzform $C(\lambda^6, \lambda_1{}^3)$ (4):

$$(91)\qquad C = |\mathsf{A}_0\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2| + \lambda_1|\mathsf{A}_0\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3| + \lambda_1{}^2|\mathsf{A}_0\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3| + \lambda_1{}^3|\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3|,$$

wo

$$(92)\qquad \begin{cases} |\mathsf{A}_0\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2| = \delta_{012} + 2\delta_{013}\lambda + \cdots, \\ |\mathsf{A}_0\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3| = \delta_{013} + 2(\delta_{014} + \delta_{023})\lambda + \cdots, \\ |\mathsf{A}_0\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3| = \delta_{023} + 2\lambda(\delta_{024} + \delta_{123})\lambda + \cdots, \\ |\mathsf{A}_1\mathsf{A}_2\mathsf{A}_3| = \delta_{123} + 2\delta_{124}\lambda + \cdots. \end{cases}$$

Danach kommt für $\mathsf{M}(\lambda)$:

$$(93)\qquad \mathsf{M}(\lambda) = \mathsf{M}_0 + 4\mathsf{M}_1\lambda + \cdots,$$

wo M_0, M_1 die Bedeutungen haben:

$$(94)\qquad \begin{cases} \mathsf{M}_0 = 4(3\delta_{012}\delta_{023} - \delta_{013}^2)(3\delta_{013}\delta_{123} - \delta_{023}^2) - (9\delta_{012}\delta_{123} - \delta_{013}\delta_{023})^2, \\ \mathsf{M}_1 = (3\delta_{012}\delta_{023} - \delta_{013}^2)[6(\delta_{013}\delta_{124} + \delta_{123}\delta_{014} + \delta_{123}\delta_{023}) \\ \qquad\qquad - 4(\delta_{023}\delta_{024} + \delta_{023}\delta_{123})] \\ \quad + (3\delta_{013}\delta_{123} - \delta_{023}^2)[6(\delta_{012}\delta_{024} + \delta_{012}\delta_{123} + \delta_{013}\delta_{023}) \\ \qquad\qquad - 4(\delta_{013}\delta_{014} + \delta_{013}\delta_{023})] \\ \quad - (9\delta_{012}\delta_{123} - \delta_{013}\delta_{023})(9\delta_{012}\delta_{124} + 9\delta_{013}\delta_{123} - \delta_{013}\delta_{024} \\ \qquad\qquad - \delta_{013}\delta_{123} - \delta_{023}\delta_{014} - \delta_{023}\delta_{023}). \end{cases}$$

Indem wir alle $\delta_{23\varkappa}$ $(\varkappa = 0, 1, 4, 5)$ gleich Null annehmen, haben wir nur einer Doppeltangente die Argumente $0, \infty$ beigelegt.*)

Dadurch vereinfachen sich M_0 und M_1 zu:

$$(95)\qquad \mathsf{M}_0 = 0,\quad \mathsf{M}_1 = -12\delta_{013}^3\delta_{124}$$

und entsprechend die beiden letzten Glieder von M, sodass nunmehr:

$$(96)\qquad \mathsf{M} = 0 + (-48)\delta_{013}^3\delta_{124}\lambda + \cdots + (-48)\delta_{245}^3\delta_{134}\lambda^{23} + 0\,.\,\lambda^{24}.$$

---

*) Würde man von dieser canonischen Festlegung keinen Gebrauch machen (wie in den bisher behandelten Fällen), sondern nur sämmtliche $\delta_{2i\varkappa}$ mit ε proportional machen, so nähme M die Gestalt an:

$$\mathsf{M} = a_0\varepsilon + a_1\varepsilon\lambda + \cdots + a_{23}\varepsilon^2\lambda^{23} + a_{24}\varepsilon\lambda^{24}.$$

Die beiden Anfangsglieder liefern für die Discriminante von M die erste Potenz von ε als Beitrag, die beiden Endglieder zunächst nur die zweite Potenz von ε, während $[\Omega \mathsf{M}]$ mit ε selbst proportional wird. Dass thatsächlich die von den Endgliedern herrührende Potenz von ε die dritte sein muss, sodass aus der Discriminante von M ε^4 heraustritt i. e. der Coefficient von ε^3 auch noch verschwindet, dürfte auf directem Wege nur sehr schwierig zu erhärten sein.

Soll noch eine zweite Doppeltangente mit jener so coincidiren, dass zugleich in den Berührpunkt „0" ein Wendepunkt rückt, so müssen α_2, β_2, γ_2 einzeln verschwinden. Macht man daher

$$(97)\quad \delta_{201}=\varepsilon\delta'_{201},\ \delta_{204}=\varepsilon\delta'_{204},\ \delta_{205}=\varepsilon\delta'_{205},\ \delta_{214}=\varepsilon\delta'_{214},\ \delta_{215}=\varepsilon\delta'_{215},\ \delta_{245}=\varepsilon\delta'_{245},$$

so überzeugt man sich leicht, dass $[\Omega \mathsf{M}]$ mit ε^2 proportional wird. Da jetzt M die Form annimmt:

$$(98)\quad \mathsf{M}=0+a\varepsilon\lambda+\cdots+a'\varepsilon^3\lambda^{23}+0\,.\,\lambda^{24},$$

so wird die Discriminante von M mit $\varepsilon^2\,.\,\varepsilon^6=\varepsilon^8=(\varepsilon^2)^4$, und die Resultante von Ω und M mit ε^2 vergleichbar.

Also ist $[\Omega \mathsf{M}]$ bis zur vierten Potenz in $D(\mathsf{M})$ und (wie schon oben bemerkt), zur ersten Potenz in $R(\Omega \mathsf{M})$ enthalten.

§ XIII.

Die Gewichte der Elementarfactoren.

55. Wir schicken den Hülfssatz voraus:

„Legt man der dreireihigen Determinante $\delta_{ikl}=|a_ia_ka_l|$ das Gewicht $i+k+l-3$ bei, so besitzt jede Combinantinvariante der drei Formen $f(\lambda)$, vom Grade ϱ in den δ, das Gewicht $\frac{3}{2}(n-2)$."

Der Beweis dieser Verallgemeinerung eines bekannten, für *eine* binäre Form gültigen Satzes wird genau in analoger*) Weise geführt, sobald man noch berücksichtigt: dass jede derartige ternäre Invariante nach dem wohlbekannten Gordan'schen Satze eine binäre Invariante der Grundform $\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}\,|f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)|$ ist.

56. Danach hat die Gradtabelle (51) die folgende, noch durchsichtigere Gewichtstabelle zur unmittelbaren Consequenz:

$$(99)\quad \begin{cases} [\Lambda\Lambda]:\ 3(n-1)(n-2);\quad [\Delta_2\mathsf{T}_2]:\ 3(n-1)(n-2)(n-3),\\ [\mathsf{M}\mathsf{M}]:\ 6(n-2)(n-3);\quad [\Omega\mathsf{M}]:\ 9(n-2)(n-3)(n-4),\\ \qquad\qquad [\Omega\Lambda]:\ 6(n-1)(n-2)(n-3),\\ [\Delta_3]:\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-2)(n-3),\\ [\mathsf{T}_3]:\ 2(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),\\ [\Lambda\mathsf{M}]:\ 9(n-1)(n-2)(n-3)(n-4). \end{cases}$$

Man ersieht deutlich daraus, wie die Curven R_n niedrigster Ordnung, für welche irgend einer der Factoren in Activität treten kann, lauten:

*) Man sehe etwa F. di Bruno: *„Einleitung in die Theorie der binären Formen"* deutsche Ausgabe von Walter, pag. 106.

$$\begin{cases} [\Lambda\Lambda]:\ R_3, \\ [\mathrm{MM}],\ [\Delta_2 \mathrm{T}_2],\ [\Omega\Lambda],\ [\Delta_3]:\ R_4, \\ [\Omega \mathrm{M}],\ [\Lambda \mathrm{M}]:\ R_5, \\ [\mathrm{T}_3]:\ R_6, \end{cases}$$

indem für Werthe von n unterhalb der jeweiligen Grenze der betreffende Factor immer verschwindet. Eine scheinbare Ausnahme hiervon bildet der Fall $n = 1$, insofern nur die Zahlen bei den Bildungen $[\Lambda\Lambda]$, $[\Delta_2 \mathrm{T}_2]$, $[\Omega\Lambda]$, $[\Delta_3]$, $[\mathrm{T}_3]$ mit dem Factor $n - 1$ behaftet sind. Dass dies aber für die drei übrigen nicht eintritt, stimmt mit dem Umstande völlig überein, als eine gerade Linie thatsächlich, und zwar in unendlicher Mannigfaltigkeit, Undulationspunkte, Wendeberührpunktepaare, und Tritangentenpunkttripel zulässt.

§ XIV.

Vergleich mit den Brill'schen Zerlegungsformeln.

57. Herr Brill*) führt das Studium einer irgendwie zusammengesetzten Singularität auf einer ebenen algebraischen Curve zurück auf dasjenige eben derselben Singularität auf einer besonders gearteten „rational-ganzen“ Curve, welche die vorliegende Curve an der betreffenden Stelle (und in ihrer nächsten Umgebung) zu ersetzen geeignet ist. Diese rational-ganzen Curven sind unter den rationalen dadurch ausgezeichnet, dass ihre nicht homogenen Punkt- und Liniencoordinaten ganzen Functionen eines Parameters λ gleich werden. Es hat das zugleich zur Folge, dass für sie Ordnung und Classe übereinstimmen, und somit jede etwa eintretende Coincidenz von Singularitäten auch ihr dualistisches Seitenstück zulässt.

Als Rationalitätsbereich gelten die Coefficienten der beiden binären Formen, welche gleich Null gesetzt, die (je getrennt vorausgesetzten) Wendepunkte und Spitzen darstellen. Darin liegt begründet, dass einerseits bei Erfülltsein von nur einer Bedingung zwischen den (ursprünglich von einander unabhängigen) Coefficienten jener Formen die rational-ganze Curve eine Singularität aufweisen kann, die bei unsern punktallgemeinen R_n ausgeschlossen blieb — insofern nämlich Spitzen beim Zusammenrücken von einfachen Singularitäten betheiligt sind — dass aber auf der andern Seite gerade umgekehrt die Eventualität einer weiteren Spitze (resp. einer Wendetangente) dort abgeschnitten ist, während bei den R_n der Spitzenfactor einen massgebenden Einfluss ausübte.

58. Sieht man indessen von den nicht gemeinsamen Elementar-

*) l. c. diese Annalen XVI, insbesondere pag. 388.

factoren ab, so erscheint es immerhin merkwürdig, dass trotz der Verschiedenheit der beiden Rationalitätsbereiche die Exponenten der Zerlegungsfactoren in den von Herrn Brill in Untersuchung gezogenen Fällen völlig übereinstimmen.

Besonders tritt dies bei der Zerfällung der Discriminante der Doppeltangentenform hervor. Unter Benutzung unserer Bezeichnungen lautet nämlich bei H. Brill die bezügliche Formel:

$$(100)\qquad D(\mathsf{M}) = [CJ]\,.\,[\Delta_2\mathsf{T}_2]^2\,.\,[\mathsf{T}_3]^6\,.\,[\mathsf{M}\mathsf{M}]\,.\,[\Omega\mathsf{M}]^4,$$

wo $[CJ]=0$ das Eintreten einer „Schnabelspitze“ anzeigt, in der sich eine Spitze mit einem Wendepunkt (und noch einem Doppelpunkt, sowie einer Doppeltangente) vereinigt. Die bezügliche Formel (60) unterscheidet sich von (100) nur dadurch, dass sie den Factor $[CJ]$ überhaupt nicht aufweist (da ja das Auftreten einer Schnabelspitze für eine punktallgemeine R_n zwei Bedingungen erfordern würde), während umgekehrt in der Zerlegung (100) der Cuspidalfactor $[\Lambda\Lambda]$ fehlt, da eine weitere Spitze sich von selbst verbietet.

Aehnliches gilt von der Zerlegung $D(\Lambda)$, welche sich bei einer rational-ganzen Curve vollkommen dualistisch zu (100) verhalten muss. Für unsere R_n dagegen kommen die den Factoren $[CJ]$, $[\mathsf{M}\mathsf{M}]$, $[\Omega\mathsf{M}]$ dualistisch entsprechenden in Wegfall, da das Verschwinden eines solchen wiederum mehr als eine Bedingung erheischen würde, während dafür der Factor $[\Lambda\Lambda]$ eintritt. Dagegen finden die beiden Potenzen $[\Delta_2\mathsf{T}_2]^2, [\mathsf{T}_3]^6$ auch jetzt ihr dualistisches Seitenstück in $[\Delta_2\mathsf{T}_2]^2$ und $[\Delta_3]^6$.

§ XV.

Die Discriminanten- und Resultanten-Correspondenzen.

59. Man kann den sechs Zerlegungen (60) eine elegante und durchsichtige geometrische Bedeutung ertheilen, welche die Factoren jeder einzelnen Zerlegung als Repräsentanten der verschiedenen Coincidenzen einer bestimmten (Chasles'schen) Correspondenz erkennen lässt.

Auf der Grundlage des Correspondenzprincips würde sich auch ohne Mühe ein neuer, unmittelbar aus den bez. Figuren abzulesender Beweis für die Formeln (60) führen lassen, der jedoch der Kürze halber unterdrückt werde.

Zu der gemeinten Bedeutung der Identitäten (60) werden wir von selber geführt, sobald wir auf ihre linken Seiten das in § VIII erklärte Verfahren „des Projicirens“ zugleich in algebraischer und geometrischer Formulirung in Anwendung bringen. Dabei wird sich zwischen den Discriminanten und Resultanten ein wesentlicher Unterschied herausstellen.

Das Princip des Projicirens, in seiner Verknüpfung mit der in § IX auseinandergesetzten liniengeometrischen Methode, findet seinen algebraischen Ausdruck darin, dass irgend eine der zu den ursprünglichen Formen $f(\lambda)$ (1) conjugirten (19), etwa α_λ^n durch ein Büschel $\alpha_\lambda^n + \varkappa\alpha_\lambda'^n$ ersetzt wird, wodurch zugleich die Coefficientendeterminanten δ die Form $\delta + \varkappa\delta'$ annehmen. Eine beliebige Invariante J der Curve R_n^2, vom Grade ν in den δ, geht dadurch in eine ganze Function von $\varkappa$ über, welche für ν Werthe dieses Parameters verschwindet.

Dann sind die Formen des Büschels $\alpha_\lambda^n + \varkappa\alpha_\lambda'^n$ eindeutig den Punkten einer Geraden g im Raume der R_n^3 zugeordnet, und die Invariante J ist repräsentirt durch diejenigen ν Punkte auf g, von denen aus die R_n^3 in eine solche R_n^2 projicirt wird, für welche die Bedingung $J = 0$ erfüllt ist.

92. Liegt jetzt im Besondern eine unserer drei Resultanten vor, etwa $R(\Lambda, \mathsf{M}) = R$, so kann man sich die ganze Function „$R_\lambda(\varkappa)$", welche aus R durch Substitution von $\alpha_\lambda^n + \varkappa\alpha_\lambda'^n$ für α_λ^n, oder, was dasselbe ist, der $\delta_i + \varkappa\delta_i'$ für die δ_i entspringt, auch dadurch entstanden denken, dass man aus den durch den nämlichen Process aus $\Lambda(\lambda)$, $\mathsf{M}(\lambda)$ hervorgegangenen Formen $\Lambda(\lambda; \varkappa)$, $\mathsf{M}(\lambda; \varkappa)$ die Grösse λ eliminirt hat.

Aber die beiden Gleichungen

$$(101) \qquad \Lambda(\lambda; \varkappa) = 0, \qquad \mathsf{M}(\lambda; \varkappa) = 0$$

stellen ersichtlich auf der Geraden g eine Punktcorrespondenz dar, deren Coincidenzstellen durch die Nullwerthe der irreducibeln Factoren der Form $R_\lambda(\varkappa)$ geliefert werden — jede Coincidenz genau in der Vielfachheit, mit der der bezügliche Factor von $R_\lambda(\varkappa)$ auftritt —, während jeder dieser Factoren von $R_\lambda(\varkappa)$ in dem entsprechenden Factor der ursprünglichen Resultante R sein Urbild findet.

Des Näheren construirt sich die mittels (101) auf g fixirte Correspondenz, wie folgt.

Durch irgend einen Punkt P der Geraden g lege man die $2(n-2)(n-3)$ Doppelberührebenen an die Curve R_n^3, sodann durch irgend einen der Berührungspunkte auf R_n^3 die $n-1$ Geraden, welche sowohl die Curve noch einmal, wie die Gerade g treffen. Einer der letzteren Treffpunkte sei Q. Umgekehrt passiren durch einen Punkt Q auf g $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Sehnen der Curve, während die $2(n-3)$ Ebenen, welche die Curve in einem der Sehnentreffpunkte und ausserdem noch einmal berühren, g wiederum in Punkten P schneiden.

Dadurch entsprechen jedem Punkte P $4(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkte Q, und rückwärts jedem Punkte Q $2(n-1)(n-2)(n-3)$ Punkte P.

Die $6(n-1)(n-2)(n-3)$ Coincidenzstellen $P=Q$, die Bilder der Nullwerthe von $R(\varkappa)$, vertheilen sich ersichtlich auf drei verschiedene Classen.

Erstlich kommen die Punkte P in Betracht, in denen g einer Tangente der R_n^3 begegnet. Durch eine solche gehen aber $2(n-3)$ Ebenen, welche die Curve noch einmal berühren, und welche sämmtlich g wieder in dem nämlichen Punkte P schneiden. Also zählt die fragliche Coincidenz $2(n-3)$-fach.

In die zweite Classe gehören die Punkte P, von denen eine derartige Sehne an die Curve geht, dass die letztere in beiden Treffpunkten der Sehne von einer Ebene berührt wird (die also den Punkt P enthält). Eine solche Ebene zählt aber, als Doppelberührebene von P aus, doppelt, während in der Ebene selbst durch jeden der beiden Berührungspunkte eine den Punkt P enthaltende Sehne, eben die vorliegende, hindurchgeht. Demnach sind die hierhergehörigen Coincidenzen vierfach zu rechnen.

Die dritte Classe endlich umfasst die eigentlichen Coincidenzen. Hier geht von P aus eine Doppelberührebene der R_n^3 derart, dass die Gerade, welche P mit einem der beiden Berührungspunkte verbindet, die Curve noch einmal anderwärts trifft. Es fällt P mit nur einem der correspondirenden Punkte Q zusammen.

Damit ist ein greifbares Abbild der sechsten Zerlegungsformel (60) gewonnen, und ähnlich verhält es sich mit den beiden andern Resultanten.

93. Man hätte die Gleichungen (101) ebensogut als eine Punktcorrespondenz auf der Curve R_n^3 auffassen können, deren Coincidenzgleichung aus (101) durch Elimination von $\varkappa$ erwächst.

Da die Coincidenzen beider Correspondenzen ein-eindeutig einander zugeordnet sind, so zerlegen sich jene auch jetzt genau in dieselben Classen wie oben. In der That braucht man die in voriger Nummer aus den unendlich vielen Doppelberührebenen und Sehnen aufgebaute Raumfigur nur so anzusehen, dass man von einer beliebigen Curvenstelle λ ausgeht, anstatt von einem beliebigen Punkt $\varkappa$ auf g, so hat man unmittelbar die Correspondenz auf der Curve; offenbar liegen die beiderlei Coincidenzen perspectivisch zu einander.

94. Für unsere Discriminanten dagegen modificirt sich das eingeschlagene Verfahren nicht unwesentlich. Legt man hier etwa die Form $\Lambda(\lambda;\varkappa)$ zu Grunde, so wird man zunächst die bezüglich λ gebildete Discriminante $D_\lambda(\varkappa)$ in ihre Elementarfactoren zerlegt annehmen und nach einer zugehörigen Correspondenz fragen. Da überzeugt

man sich denn leicht, dass man zu dem Behuf denjenigen Factor, nämlich $[\mathsf{\Lambda\Lambda}]$, zuvor abtrennen muss, der von einem Zusammenrücken zweier „zusammengehöriger" Argumente einer und derselben Singularität $\mathsf{\Lambda}$ herrührt. Die so gewonnene Gleichung

$$(102) \qquad \frac{D_\lambda(\varkappa)}{[\mathsf{\Lambda\Lambda}](\varkappa)} = 0$$

liefert dann diejenigen Punkte $\varkappa$ auf der Geraden g, von denen zwei (oder mehr) Sehnen mit (wenigstens) einem gemeinsamen Curvenpunkt an die R_n^3 gehen. Damit sind die Punkte (102) auf g, oder vielmehr, was auf das Nämliche hinauskommt, die ihnen eindeutig zugewiesenen Punkte λ auf der Curve R_n^3 als Coincidenzstellen einer Correspondenz gekennzeichnet.

Geht man nämlich von einem beliebigen Curvenpunkte λ aus, so kann man durch ihn $n - 1$ Gerade schicken, welche die Curve noch einmal und zugleich g treffen. Von einem solchen Treffpunkte auf g laufen noch $(n - 1)(n - 2) - 1$ weitere Sehnen (λ', λ_1') an die Curve. Die gemeinte Correspondenz ist dann die hiermit zwischen den Stellen λ und λ' hergestellte.

Es giebt nur zweierlei Arten von Coincidenzen. Erstens die durch dreifache Sehnen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ bedingten, wo jeder der drei Treffpunkte mit zwei entsprechenden zusammenfällt, zweitens Sehnen (λ, λ_1) derart, dass eine Ebene die R_n^3 in λ und λ_1 berührt: jeder der beiden Punkte führt eine einfache Coincidenz herbei. Die zugehörigen Treffpunkte $\varkappa$ auf g zählen dann selbstredend sechs- resp. zweifach.

Damit ist die durch die zweite Formel (60) bekannte Zerlegung des Quotienten $\frac{D(\mathsf{\Lambda})}{[\mathsf{\Lambda\Lambda}]}$ durch eine Correspondenz realisirt.

Bei der analog gebildeten Discriminante der Form $\mathsf{M}(\lambda; \varkappa)$ ist geradeso der Factor $[\mathsf{MM}]$ auszuscheiden, während bei derjenigen der Form $\Omega(\lambda; \varkappa)$ keine „zusammengehörigen" Argumente existiren.

94. Dagegen müssen, einem allgemein bekannten Satze zufolge, die bezüglich $\varkappa$ gebildeten Discriminanten von $\mathsf{\Lambda}$ und M zu Zerlegungen führen, die nur zum Theil den Charakter der in (6) niedergelegten tragen, zum andern Theil indessen ganz anderer Natur sind.

Die zugehörigen Correspondenzen bestimmen sich, diesmal ohne Abzug, wiederum so, dass ihre Coincidenzstellen $\varkappa$ die den Nullwerthen von $D_\varkappa(\lambda)$ zugeordneten Werthe λ sind.

Im Falle der Form $\mathsf{\Lambda}(\lambda; \varkappa)$ hat man demnach die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Sehnen der R_n^3 zu ziehen, welche von irgend einem Punkte P auf g möglich sind, sodann durch jeden der Treffpunkte die $n - 2$ weiteren Geraden, welche der Curve noch einmal, sowie g (in Punkten Q) begegnen.

Die Correspondenz zwischen den Stellen P und Q ist die gesuchte. Die Wurzeln von $D_x(\lambda) = 0$ bestehen somit einmal aus den doppelt zählenden Treffpunkten dreifacher (sc. g begegnender) Sehnen, andererseits aus den Gruppen von $n - 2$ Punkten, welche eine durch g gelegte, die Curve R_n^3 berührende Ebene aus der letzteren noch ausschneidet.

Die Discriminante $D_x(\lambda)$ der Form $\mathsf{M}(\lambda; x)$ verschwindet an folgenden Stellen der R_n^3:

1) in den Berührungspunkten der dreimal berührenden Ebenen doppelt;

2) in den Berührungspunkten der g treffenden Tangenten

$$2(n-3)\{2(n-3) - 1\}\text{-fach};$$

3) in den Berührungspunkten der die Curve noch einmal treffenden Tangenten einfach;

4) in den Punkten, wo eine Ebene die Curve berührt und ausserdem noch anderswo osculirt, dreifach.

Setzt man die bezüglichen Anzahlen ein, so ergeben sich für dieselben vermöge des Correspondenzprincips Controllformeln.

Clausthal, December 1890.

Endlich-gleiche Flächen.

(Mit 5 lithograph. Tafeln.)

Von

MORITZ RÉTHY in Budapest.*)

Vorliegende Untersuchungen beziehen sich auf *ebene* Flächen, deren Grenzlinien sich selbst nirgends schneiden und in zwei verschiedenen Lagen eine endliche Anzahl von Schnittpunkten darbieten. Sowohl die Flächen selbst, als auch ihre Theile sollen *immer* im *positiven Sinne* genommen werden. Zwei Flächen, die in eine *endliche* Anzahl gegenseitig congruenter (*positiver*) Theile zerlegt werden können, sollen nach Wolfgang Bólyai *endlichgleich* genannt werden. Ich stelle mir die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der endlichen Gleichheit zweier ebenen Flächen aufzustellen und die Zerlegung in gegenseitig congruente Stücke auszuführen.

Im „Tentamen juventutem stud. etc." (Maros-Vásárhely, 1832—33) von W. Bólyai sind folgende Sätze aufgestellt:

1. *Zwei geradlinige Polygone von gleichem Flächeninhalte sind immer endlichgleich.*

2. *Die nicht gemeinsamen Theile zweier sich theilweise deckender congruenter Flächen sind endlichgleich.*

3. *Schneidet man aus zwei congruenten Flächen beliebige gegenseitig congruente Stücke heraus, so sind die Reste endlichgleich.*

Den Beweis des Satzes 1, wie auch die Ableitung des dritten Satzes aus dem zweiten giebt Bólyai in aller Strenge. Der Beweis des zweiten Satzes hingegen entspricht den Forderungen der Strenge nicht. In der That führt seine Construction in fast ebensovielen Fällen zu einer endlichen als unendlichen Anzahl gegenseitig congruenter Stücke der Restflächen. Bólyai hat diesen Mangel bemerkt und den Beweis mit dem Nachweis zu ergänzen versucht, dass die Restflächen im letzteren Falle congruente Stücke enthalten müssen, nach deren Entfernung seine Construction zu einer endlichen Anzahl congruenter

---

*) Vorgelegt der math. naturw. Classe der ung. Akademie der Wissenschaften am 16. Juni 1890.

Stücke führt. Dieser Nachweis ist jedoch unannehmbar; man sucht da in der That vergeblich eine Methode, wie jene zu entfernenden Stücke construirt werden sollen, noch giebt er überhaupt die Bedingungen der directen Ausführbarkeit seiner Constructionen an.

Ein über diesen Beweis mit Herrn Dr. Julius König gepflogener Gedankenaustausch gab Veranlassung zu vorliegenden Untersuchungen, und ich spreche ihm auch bei dieser Gelegenheit meinen Dank für das Interesse aus, welches er denselben entgegenbrachte.

Meine Resultate sind folgende:

a) Damit zwei ebene Flächen von gleichem Inhalt endlichgleich seien, ist *erforderlich* und *hinreichend*, dass die krummlinigen Begrenzungen theils aus gegenseitig congruenten Stücken bestehen, deren Krümmungssinn (relativ zu den eingeschlossenen Flächen) von Punkt zu Punkt übereinstimmt, theils aus Stücken, die auf ein- und derselben Fläche ebensooft mit positivem als negativem Krümmungssinn vorkommen (Siehe Fig. 7a, 7b). Dass dies *genügende* Bedingungen zur endlichen Gleichheit zweier Flächen sind, folgt leicht aus dem ersten der Bólyai'schen Sätze; der zweite Bólyai'sche Satz ist als Specialfall in a) enthalten, wie auch die folgende Verallgemeinerung:

b) Schneidet man aus endlichgleichen Flächen endlichgleiche Stücke heraus, so sind die Reste endlich gleich.

Aus diesem Satze folgt, dass die Bólyai'sche Definition der endlichen Gleichheit zweier Flächen die gewöhnliche, die auch negative Theile zulässt, vollständig deckt.

c) Ich modificire die Bólyai'sche Construction durch Einführung des gegenseitigen Drehungscentrums resp. der Drehungsaxe der beiden gegebenen congruenten Flächen, und beweise, dass sie nur dann zu einer unendlichen Anzahl congruenter Stücke führt, wenn die gegebenen Flächen in gleichem Sinne congruent sind und das Drehungscentrum in ihrem Innern liegt; die Ergänzung des Bólyai'schen Beweises, wie auch ihre Verallgemeinerung auf mehrfach zusammenhängende Flächen, ergiebt sich dann als eine Folge zweckmässig angebrachter Querschnitte.

d) Diese Sätze können sämmtlich auf Flächen von constanter Krümmung übertragen werden, theilweise auch auf räumliche Systeme. Mit diesen Verallgemeinerungen werde ich mich jedoch bei dieser Gelegenheit nicht befassen.

§ 1.

Zwei Linien, Flächen, Räume sind endlichgleich, wenn sie aus einer endlichen Anzahl gegenseitig congruenter (positiver) Stücke zusammengesetzt sind. Das Symbol der endlichen Gleichheit sei:*)

$$A \mathrel{\text{I}} B.$$

1. Aus der Definition folgt, dass *zwei endlichgleiche Linien, Flächen, Räume A und B beliebig zerlegt, — die Systeme gebildet aus den Stücken von A resp. B endlichgleich sind.*

Es sei $A_i \cong B_i$ und A_i resp. B_i in $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$, resp. $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$ zerlegt. Wir wollen annehmen A_i und B_i seien Flächen und bringen die aus den Stücken $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$ bestehende Fläche B_i zur Deckung mit der aus den Stücken $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ bestehenden Fläche A_i, und übertragen die auf der Fläche A_i resp. B_i gezeichneten Grenzlinien ihrer Stücke A_{ij} resp. B_{ij} auf die Fläche B_i resp. A_i. Alle diese Linien schneiden sich in einer endlichen Anzahl von Punkten, und theilen demzufolge die Systeme

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}, \quad B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$$

in Stücke, die sich paarweise decken. Wir haben also die Gleichung

$$(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}) \mathrel{\text{I}} (B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}).$$

Nun bedeutet der Ausspruch $A \mathrel{\text{I}} B$ der Definition der endlichen Gleichheit zufolge dass A und B in eine endliche Anzahl congruenter Stücke A_i resp. B_i zerlegt werden können. Demzufolge bleiben endlichgleiche Flächen auch nach willkürlicher Zerstückelung endlichgleich.

Der Beweis bleibt derselbe, wenn A und B Linien oder Räume sind; an Stelle der Linien treten in den Constructionen Theilungspunkte resp. Theilungsflächen.

2. Aus dem Begriffe der endlichen Gleichheit fliesst in Folge dieses Satzes unmittelbar der folgende Satz:

*Ist in der Reihe der Linien resp. Flächen, Räume $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein jedes Glied endlichgleich dem folgenden, so sind sämmtliche Glieder der Reihe endlich gleich.***)

3. *Parallelogramme von gleichem Flächeninhalte und gegenseitig gleichen Winkeln sind endlichgleich* (Fig. 1).

Construction:

Sind AB und $A'B'$ die kürzern Seiten der flächengleichen Parallelogramme $ABCD$ und $A'B'C'D'$ und Winkel $B = B'$, so trage

*) Bólyai Tentamen, Tom. I, pag. 21.

**) Bólyai a. a. O.

man die Strecke $A'B'$ (resp. AB) vom Punkte A (resp. A') aus so vielmal auf die Seite AD (resp. $A'D'$), bis von dieser ein Stück A_1D (resp. $A_1'D'$) übrig bleibt, welches kleiner ist als die aufgetragene Strecke $A'B'$ (resp. AB).

Der letzte Theilungspunkt auf der Seite AD sei A_1, der vorletzte A_0, auf der Seite $A'D'$ hingegen A_1' und A_0'.

(In unserer Zeichnung ist

$$A \equiv A_0, \quad A' \equiv A_0', \quad B_0 \equiv B_0, \quad B' \equiv B_0').$$

Man ziehe durch sämmtliche Theilungspunkte Parallele zur Seite AB resp. $A'B'$, durch welche die gegebenen Flächen in congruente Parallelogramme und die flächengleichen Parallelogramme A_1DCC_1 resp. $A_1'D'C'C_1'$ zerlegt werden. Man trage $\overline{DD_1} = \overline{A_0A_1}$ und $D'D_1' = A_0'A_1'$ auf, ziehe die Diagonalen A_0C_1 resp. $A_0'C_1'$; führe durch die Punkte D_1 resp. D_1' Parallele zu den Seiten DC resp. $D'C'$, die auf den Diagonalen die Punkte E resp. E' ausschneiden; man lege endlich durch die Punkte E und E' die Geraden $E\Gamma$ resp. $E'\Gamma'$ parallel zu den Seiten B_0C resp. $B_0'C'$.

Die beiden flächengleichen Parallelogramme sind dann in gegenseitig congruente Stücke getheilt.

Beweis. Der Construction zufolge sind die Dreiecke $A_0B_0C_1$ und $A_0'B_0'C_1'$ congruent d. i. $1 \cong 1'$, daher $A_0C_1 = A_0'C_1'$.

Nehmen wir an, dass $D_1A_1 = \Gamma'C'$; dann folgt aus $D_1A_1 = EF$ und $\Gamma'C' = F'C_1'$, dass $EF = F'C_1'$; daher sind die Dreiecke EFC_1 und $E'F'C_1'$, deren Winkel entsprechend gleich sind, congruent d. i. $2 \cong 2'$. Da nun die Winkel und Seiten der Parallelogramme 3 und 3' entsprechend gleich sind (nämlich $F = F'$, $FC_1 = F'E'$, $F\Gamma = F'A_1'$), so besteht $3 \cong 3'$. Die Congruenz der Dreiecke 6 und 6' folgt aus $D_1 = D_1'$, $A_0 = E'$ und $A_0D_1 = D_1'E'$; wir haben nämlich

$$A_0A_1 = D'C'$$

und

$$A_0D_1 = A_0A_1 - D_1A_1,$$
$$D_1'E' = D'C' - \Gamma'C';$$

daher sind in Folge der Annahme $D_1A_1 = \Gamma'C'$ die Seiten A_0D_1 und $D_1'E'$ einander gleich. Daraus folgt die Gleichung $D_1E = D_1'A_0'$.

Aus den Congruenzen $1 \cong 1'$, $2 \cong 2'$, $3 \equiv 3'$, $6 \cong 6'$ folgt ferner, dass die Summe der Flächen 4 und 5 gleich ist der Summe der Flächen 4' und 5'; und aus der Gleichheit der Grundlinien dieser Parallelogramme folgt daher die ihrer Höhen $A_1'D' = D_1E$. Mithin bestehen die Congruenzen $4 \cong 4'$, $5 \cong 5'$. Aus $A_1'D' = D_1E$ und $D_1E = D_1'A_0'$ folgt aber $A_1'D' = A_0'D_1'$ d. i. $A_0'A_1' = D_1'D'$, eine Relation die der Construction zu Grunde lag.

Wir haben also erwiesen, dass falls $D_1 A_1 = \Gamma' C'$ ist, die gegebenen Parallelogramme in gegenseitig congruente Stücke getheilt sind. Die Richtigkeit der Annahme $D_1 A_1 = \Gamma' C'$ folgt aber daraus, dass sie zur Consequenz die Relation $A_0' A_1' = D_1' D'$ hat, da bei der Eindeutigkeit und Umkehrbarkeit der Constructionen $A_0' A_1' = D_1' D'$ und $D_1 A_1 = \Gamma' C'$ äquivalente Bedingungen sind.

4. *Flächengleiche geradlinige Polygone sind endlich gleich.*

Dass flächengleiche Dreiecke endlichgleich sind, wird wie folgt bewiesen (Fig. 2a, 2b). Falls die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ stumpfe Winkel besitzen, sollen diese mit C, C' bezeichnet werden. Wir ziehen $CD \perp AB$, $C'D' \perp A'B'$; dann liegen D und D' auf den Strecken AB resp. $A'B'$. Ferner führen wir durch die Halbirungspunkte E und E' der Seiten AC resp. $A'C'$ Parallele zu den Grundlinien AB resp. $A'B'$ und durch die Endpunkte dieser ihre Normalen AG, $A'G'$, BF, $B'F'$. Man sieht unmittelbar, dass die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ endlich-gleich sind den Rechtecken $ABFG$ resp. $A'B'F'G'$. Aus der endlichen Gleichheit dieser Rechtecke (3) folgt daher die der Dreiecke vermittelst des Satzes 2.

Wir beweisen nun den Satz 4) durch Schluss von n auf $n+1$ mit Hülfe der bekannten Construction, die ein $n+1$-Eck in ein n-Eck überführt. Ist der Winkel an der $n+1^{\text{ten}}$ Ecke $C < 180^0$, so bringt diese Construction (Fig. 3) an Stelle des Dreieckes ABC ein ihm flächengleiches Dreieck ABC'; ist $C > 180^0$, so bringt sie an Stelle des Dreieckes $BC'D$ das Dreieck ACD (Fig. 4); die übrigen Theile der Vielecke bleiben in beiden Fällen unverändert. Da aber flächengleiche Dreiecke endlichgleich sind, so folgt aus der endlichen Gleichheit beliebiger flächengleicher n-Ecke vermittelst des Satzes 2) die endliche Gleichheit flächengleicher $n+1$-Ecke.

In Figur 5 und 6 ist die Zerlegung flächengleicher Dreiecke mit gleichen Höhen in congruente Stücke direct ausgeführt. $ED' \parallel AB$ halbirt die gemeinsame Höhenlinie der Dreiecke. In Fig. 5 sind die Linien CD, $C'E'$ parallel gezogen zu $C'D'$ resp. CE; in Fig. 6 hingegen $AD \parallel BD'$, $BE' \parallel AE$, ferner $\overline{HF} = \overline{FH'} = \overline{H'F'}$ und $HG \parallel H'G'$, $F'G' \parallel FG$. Die mit gleichen Zahlen bezeichneten Flächen sind congruent.

Liegen die Punkte C und C' in Fig. 5 näher, so dass die Punkte D und E' zwischen F und F' zu liegen kommen, dann ist durch den Durchschnittspunkt von CD mit FC' eine Parallele zu AB zu ziehen und das beschriebene Verfahren zu wiederholen. Aehnliches gilt von Fig. 6.

Analog wird die Zerlegung von Parallelogrammen mit gleichen Höhen und Grundlinien ausgeführt.*)

*) Bólyai, „Tentamen" tom. I, pag. XXXVII.

5. *Zur endlichen Gleichheit zweier flächengleicher ebener Systeme ist hinreichend, dass die krummlinigen Bögen ihrer Begrenzungen gegenseitig endlich gleich und die Krümmungen congruenter Stücke* (relativ zum Innern der Flächen) *von gleichem Sinne seien*, — von Stücken der Begrenzungen abgesehen, die auf demselben System eben so oft vorkommen mit positivem als mit negativem Krümmungssinn.

Das System A sei durch Fig. 7a dargestellt, das ihm flächengleiche System B durch 7b. Es sei $M_1 M_2$ ein Stück der Begrenzung von A, welches congruent ist dem Stück $M_1' M_2'$ der Grenze desselben Systems, jedoch die Krümmungen in homologen Punkten von entgegengesetztem Sinn z. B. der Sinn in allen Punkten von $M_1 M_2$ positiv, daher in allen Punkten von $M_1' M_2'$ negativ. Man schneide in diesem Fall das zwischen dem Bogen und der Sehne $M_1 M_2$ liegende Flächenstück ab und bringe es in Deckung mit der zwischen dem Bogen und der Sehne $M_1' M_2'$ liegenden Fläche, die keinen Theil des Systems bildet. In allen Fällen construirt man durch Wiederholung dieses Verfahrens nach einer endlichen Anzahl von Schritten ein dem A endlich-gleiches Flächensystem A', dessen Begrenzung keine congruenten Stücke von entgegengesetztem Krümmungssinn enthält. Ebenso kann man vom System B auf ein System B' von solcher Beschaffenheit übergehen. Es sei ferner der Bogen $P_1 P_2 (P_1' P_2')$ der Grenze von A congruent dem Bogen $Q_1 Q_2 (Q_1' Q_2')$ der Grenze von B und von gleichem Krümmungssinne; dann nehmen die Bögen auch an der Begrenzung von A' und B' Theil. Zwei Fälle sind möglich: entweder ist der Krümmungssinn der beiden genannten Bögen zugleich positiv oder zugleich negativ. Im ersten Falle zerlege man die Systeme A' und B' in je zwei Theile vermittelst congruenter Sehnensysteme, die den Bögen $P_1 P_2$ resp. $Q_1 Q_2$ *eingeschrieben* sind und weder sich selbst noch die Grenzen durchkreuzen. Im zweiten Falle geschehe die Zerlegung vermittelst, den Bögen $P_1' P_2'$ resp. $Q_1' Q_2'$, *umschriebenen* Tangentensystemen von derselben Eigenschaft. Man wiederhole das Verfahren bei allen congruenten Bogenpaaren der beiden Begrenzungen. Da diese keine sich selbst schneidenden Bestandtheile enthalten, so wird man bei genügender Anschliessung der Sehnen resp. Tangenten an die Curven immer erreichen können, dass diese Linienstücke sich nirgends durchkreuzen. Die Flächensysteme A' und B' erscheinen demnach in eine endliche Anzahl von zwischen congruenten Bögen und ihren Sehnen resp. Tangenten gelegenen Stücken einerseits und zwei flächengleichen Polygonensystemen andererseits zerlegt, deren geradlinige Begrenzungen sich nirgends schneiden. Da nun solche Polygone (Satz 4) endlich-gleich sind, so sind die Systeme A' und B', daher auch die ihnen endlich-gleichen A und B endlich-gleich.

6. *Schneidet man aus zwei congruenten Flächen congruente Stücke heraus, so sind die Reste endlichgleich.* (Fig. 8a, 8b und 8c).

Man schneide aus den Flächen A und B, wobei $A \cong B$, congruente Theile A_i resp. B_i heraus, d. i. $A_i \cong B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; man bezeichne mit S resp. T die erhaltenen Reste dann ist $S \mathrel{\text{I}} T$.

Wenn nämlich die Grenzen der Stücke A_i und B_i mit denen von A und B keine Bestandtheile gemein haben, so sind die Grenzen von S und T zusammengesetzt aus denen von A und A_i resp. B und B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Aus $A \cong B$ und $A_i \cong B_i$ folgt daher, dass die Grenzlinien von S und T endlichgleich sind. Da endlich die Stücke A_i und B_i im Innern der Flächen A resp. B liegen, so ist auch der Krümmungssinn in homologen Punkten derselbe. Die Endlichgleichheit der Restflächen ist daher in diesem Falle ein Corollar des Satzes 5.

Besondere Behandlung verdient der Specialfall, wenn A und irgend ein A_i gegenseitig congruente Begrenzungsstücke enthalten, die in Bezug auf S entgegengesetzten Krümmungssinnes sind. Es seien a^j und a_i^j solche Begrenzungsstücke von A und A_i — b^j und b_i^j die ihnen congruenten Begrenzungsstücke von B und B_i, wo $j = 1, 2, \ldots, m$. Die Gleichung $S \mathrel{\text{I}} T$ behält ihre Gültigkeit. Man gehe nun auf den Grenzfall über, wenn a^j das ihm congruente a_i^j deckt $(j = 1, 2, \ldots, m)$, daher diese Bögen an der Begrenzung von S nicht mehr theilnehmen. (Fig. 8c.) Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Bogen $b^j \cong a^j$ deckt ebenfalls den ihm congruenten Bogen b_i^j. Dies alterirt die Endlichgleichheit der Grenzlinien von S und T, demnach auch den Bestand der Gleichung $S \mathrel{\text{I}} T$ nicht im Mindesten.

b) Der Bogen $b^j \cong a^j$ befindet sich nicht in Deckung mit dem Bogen b_i^j. Dann befinden sich zwar auf den Rändern von S keine diesem b^j und b_i^j congruente Stücke, aber diese sind *gegenseitig* congruent und von *entgegengesetztem Krümmungssinn* in Bezug auf die Fläche T. Dieser Umstand alterirt daher (Satz 5) den Bestand der Gleichung $S \mathrel{\text{I}} T$ ebenfalls nicht.

Dasselbe gilt, wenn irgend ein b^h zusammenfällt mit dem ihm congruenten b_i^h $(h = 1, 2, \ldots, m)$, oder wenn eine beliebige Anzahl von Paaren (a^j, a_i^j), (b^h, b_i^h) zusammenfallen. Der Satz hat daher allgemeine Gültigkeit.

Corollar. *Decken sich zwei congruente Flächensysteme theilweise, so sind die beiden Systeme gebildet aus ihren nicht gemeinsamen Theilen endlich-gleich.* (Fig. 9).

7. *Schneidet man aus zwei endlich-gleichen Flächensystemen endlichgleiche Systeme von Stücken heraus, so sind die beiden Restsysteme endlich-gleich.*

Es seien $A \mathrel{\text{I}} B$ die gegebenen Flächensysteme; $A_1, A_2, \ldots, A_l$ und $B_1, B_2, \ldots, B_m$ Stücke von A und B, u. zw.

$$(A_1, A_2, \ldots, A_l) \mathrel{\text{I}} (B_1, B_2, \ldots, B_m),$$

S resp. T die nach Ausscheidung dieser Systeme von Stücken zurückbleibenden Reste; dann hat man $S \mathrel{\text{I}} T$. Man zerlege die Systeme A und B in gegenseitig congruente Stücke (Def. 1); die zerlegten *Systeme* mögen mit A' resp. B' bezeichnet werden; die Voraussetzung $A' \cong B'$ kann durch gegenseitige Verschiebung der Stücke stets erfüllt werden, wir wollen sie daher annehmen. Diese Zerlegung wird es im Allgemeinen mit sich bringen, dass dabei auch einzelne Stücke der auszuschneidenden Systeme A_i und B_i zerlegt werden; die Endlichgleichheit der Systeme A_i und B_i bleibt jedoch bestehen (Satz 1). Man zerlege nun auch die so umgestalteten Systeme der A_i und B_i in gegenseitig congruente Stücke A_j' und B_j', von der Anzahl n, wo also

$$A_j' \cong B_j', \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir wollen voraussetzen, dass die Reste S_{i-1}' und T_{i-1}', welche aus den Systemen A' und B' übrig bleiben, wenn man aus ersterem das System $A_1', A_2', \ldots, A_{i-1}'$, aus letzterem das System $B_1', B_2', \ldots, B_{i-1}'$ herausschneidet, von der in 5) beschriebenen Eigenschaft sind. Dann folgt aus den in 6) angeführten Gründen, dass diese Eigenschaft unverändert bleibt, wenn man aus S_{i-1}' das Stück A_i' und aus T_{i-2}' das Stück B_i' herausschneidet; wir haben also (5) auch $S_i \mathrel{\text{I}} T_i$. Vermittelst Schlusses von i auf $i+1$ können wir daher folgern, dass die nach Entfernung sämmtlicher A_j' und B_j' $(j = 1, 2, \ldots, n)$ aus den Systemen A' und B' zurückbleibenden Restsysteme S_n' und T_n' endlichgleich sind.

Nun ist $S_n' \mathrel{\text{I}} S$ und ebenso $T_n' \mathrel{\text{I}} T$; aus der erwiesenen Gleichung $S_n' \mathrel{\text{I}} T_n'$, folgt daher $S \mathrel{\text{I}} T$.

1. Corollar. *Enthalten zwei endlichgleiche Flächensysteme sowohl gemeinsame als nichtgemeinsame Stücke, so sind die aus der Gesammtheit der Letzteren gebildeten beiden Systeme endlichgleich.*

2. Corollar. *Die gebräuchliche Definition endlichgleicher Flächen deckt die Bólyai'sche vollständig.*

8. *Die in 5) beschriebenen hinreichenden Bedingungen der Endlichgleichheit zweier Systeme sind zugleich nothwendige Bedingungen.*

Man entferne alle gegenseitig congruenten Bögen von gleichem Krümmungssinn nach dem in 5) beschriebenen Verfahren; die von den gegebenen endlichgleichen Systemen A und B so abgeschnittenen Systeme A' und B' sind einander endlichgleich. Man *transponire* ferner, nach dem ebendort beschriebenen Verfahren, jene Bögen mit positivem Krümmungssinne, die auf demselben System auch mit negativem Krümmungssinne vorkommen; die beiden Reste erscheinen dann in Systeme A'' und B'' transformirt, (Fig. 10a, 10b) die an ihren Rändern weder gegenseitig congruente Bögen mit gleichem Krümmungssinn, noch solche enthalten, welche an den Grenzen *desselben* Systems sowohl mit positivem

als negativem Krümmungssinne vorkommen. Da $A \mathrel{\mathtt{I}} B$ und $A' \mathrel{\mathtt{I}} B'$ ist, so folgt aus $A \mathrel{\mathtt{I}} A' + A''$ und $B \mathrel{\mathtt{I}} B' + B''$ mit Hülfe des Satzes 7) die Gleichung $A'' \mathrel{\mathtt{I}} B''$. Wir wollen nun beweisen, dass die Ränder von A'' und B'' *nur* gerade Linien enthalten können. Denn gesetzt die Grenzen des Systems A'' enthalten Kreisbögen von bestimmter Krümmung $+g$ und von der Gesammtlänge L, und wir denken uns die Flächen A'' beliebig zerschnitten und zerlegt; dann können an den neuen Grenzlinien Kreisbögen von derselben Krümmung $+g$ in der Gesammtlänge l auftreten, — es müssen aber gleichzeitig auch Kreisbögen von der Krümmung $-g$ auftreten in derselben Gesammtlänge l.

Das System B'' kann seiner Definition zufolge keine Kreisbögen von der Krümmung $+g$ enthalten. Gesetzt Kreisbögen von der Krümmung $-g$ kommen an den Grenzen in der Gesammtlänge L' vor und es werden auch die Flächen des Systems B'' irgendwie zerschnitten und zerlegt; dann treten an den neuen Rändern Kreisbögen von der Krümmung $+g$ und $-g$ gleichzeitig in der Gesammtlänge l' auf. Soll aber eine Zerlegung der Systeme A'' und B'' in gegenseitig congruente Stücke von endlicher Anzahl möglich sein, so müssten die Gesammtlängen der an beiden Rändern vorkommenden Kreisbögen von der Krümmung $+g$ (wie auch $-g$) endlich und einander gleich sein; mithin bestünden die simultanen Gleichungen:

$$L + l = l',$$
$$L' + l' = l.$$

Da aber die aus diesen fliessende Gleichung $L + L' = 0$ zufolge der Positivität von L und L' einen innern Widerspruch enthält, so ist die Hinfälligkeit der Annahme, dass A'' oder B'' Kreisbögen enthalten, erwiesen.

Wir wollen nun voraussetzen, dass an den Grenzen von A'' ein Bogenstück $P_1 P_2$ mit demselben Krümmungssinn J-mal vorkommt; da $P_1 P_2$ kein Kreisbogen ist, so ist die Voraussetzung gestattet, dass es keine congruenten Stücke enthalte. Wird das System A'' beliebig durch Querschnitte zerlegt, so müssen an den neuen Rändern dem Bogen $P_1 P_2$ endlichgleiche Theile i-mal vorkommen mit demselben und ebenso oft mit entgegengesetztem Krümmungssinn, (wo $i = 0$ nicht ausgeschlossen ist). Das zerlegte System A'' enthält daher die gesammten Theile von $P_1 P_2$ mit dem ursprünglichen Krümmungssinn $J + i$-mal, mit dem entgegengesetzten i-mal.

Das System B'' kann an seinen Rändern nur solche dem $P_1 P_2$ endlichgleiche Theile enthalten, die von entgegengesetztem Krümmungssinn sind; deren Anzahl sei J'. Dann enthält das durch Querschnitte zerlegte System B'' an seinen Grenzlinien dem $P_1 P_2$ endlichgleiche

Theile von demselben Krümmungssinn i'-mal und von entgegengesetztem $J' + i'$-mal.

Die Möglichkeit der Zerlegung der Systeme A'' und B'' in congruente Stücke von endlicher Anzahl würde vor Allem die Forderung stellen, dass sämmtliche genannten Bogenstücke der irgendwie zerlegten A'' und B'', — sowohl vom ursprünglichen Krümmungssinn der $P_1 P_2$, als vom entgegengesetzten — sich gegenseitig decken und dass J, J', i, i', endlich seien. Es müssten daher die simultanen Gleichungen Bestand haben:

$$J + i = i',$$
$$J' + i' = i.$$

Diese würden aber die Gleichung $J + J' = 0$ nach sich ziehen, welche in Folge der Bedeutung von J und J' einen innern Widerspruch enthält. Der Satz ist also bewiesen.

Demnach kann z. B. eine Fläche, an deren Rändern krumme Linien vorkommen von *nur* positiver oder solche von *nur* negativer Krümmung, auf keine Weise in eine endliche Anzahl von Stücken zerlegt werden, die im Innern eines geradlinigen Polygons von gleichem Flächeninhalte aneinander gereiht werden können. Ein Kreis- oder Parabelsegment in specie ist nie endlich-gleich einem Quadrat.

§ 2.

Der Bólyai'sche Beweis der in der Einleitung ausgesprochenen Sätze 2 und 3 beruht auf wiederholter Transposition der gegebenen Flächen, die dabei als starr gedacht werden. Gelingt ein strenger Beweis auf dieser Grundlage, so haben die Sätze in beliebigen ebenen Räumen Giltigkeit.

Zwei auf derselben Ebene gelegene Systeme sind congruent in gleichem oder entgegengesetztem Sinne; im ersten Falle liegt auf ihrer Ebene ein Punkt O, — der gegenseitige Drehungsmittelpunkt der beiden Systeme — von der Eigenschaft, dass eine Drehung von der Grösse φ um ihn die Systeme zur Deckung bringt, (der Punkt kann im Specialfall im Unendlichen liegen, in welchen Falle statt Drehung Parallelverschiebung zu setzen ist); im zweiten Falle liegt auf ihrer Ebene eine Gerade — die gegenseitige Drehungsaxe der beiden Systeme — von der Eigenschaft, dass das eine System nach einer Umlegung um ihr und einer Parallelverschiebung in ihrer Richtung von bestimmter Grösse das Zweite deckt.

Wir werden sehen, dass die Zerlegung der *nicht* gemeinsamen Theile zweier congruenten Flächen *nur* dann nicht gelingt vermittelst wiederholter Transpositionen derselben, wenn die gegebenen Flächen

in gleichem Sinne congruent sind und der gegenseitige Drehungsmittelpunkt in ihrem Innern liegt. Dieser Fall wird dann durch Umformung der Flächen vermittelst geeigneter Querschnitte erledigt werden.

Bólyai hat den Drehungsmittelpunkt und die Drehungsaxe ausser Acht gelassen; dies ist der hauptsächlichste Grund, weshalb seine Beweise den Forderungen der Strenge nicht genügen konnten.

1. *Gegeben sind zwei gegenseitig sich theilweise deckende, in gleichem Sinne congruente, einfach zusammenhängende Flächen, deren gegenseitiger Drehungsmittelpunkt nicht in ihrem Innern liegt, und deren gemeinsamer Theil ebenfalls einfach zusammenhängt. Man zerlege ihre nicht gemeinsamen Theile in eine endliche Anzahl von gegenseitig congruenten Stücken.* (Fig. 11).

Construction. Die gegebenen congruenten Flächen seien A und B, ihr gemeinsamer Theil K, ihre nicht gemeinsamen Theile S resp. T. Die äusseren Grenzen von S und T seien mit a resp. b bezeichnet, die inneren mit a' resp. b'; demnach sind a' und b' Theile der Grenze der gemeinsamen Fläche K. Eine Drehung von der Grösse φ um das Centrum O bringe die Fläche A zur Deckung mit B.

Man drehe die Fläche K um den Punkt O nacheinander um die Winkelgrössen φ, 2φ, ..., $n\varphi$, wo n eine ganze positive Zahl ist, und zeichne nach jeder Drehung die ins Innere von B fallenden Umrisse von K auf diese Fläche; die so gezeichneten Linien seien

$$a'', a''', \ldots, a^n, a^{n+1};$$

die Zahl n ist dadurch gegeben, dass die starre Linie a^{n+1} um die Winkelgrösse φ und um den Punkt O gedreht gänzlich ausserhalb der Fläche B zu liegen kommt.

Man drehe die Fläche K ferner um den Punkt O im entgegengesetzten Sinne u. zw. um die Winkelgrössen $-\varphi$, -2φ, ..., $-n\varphi$ und zeichne schrittweise jene Stücke

$$b'', b''', \ldots, b^n, b^{n+1}$$

der Ränder der sich drehenden Fläche ab, welche ins Innere von A zu liegen kommen.

Die Flächen S und T erscheinen durch die gezogenen Linien in gegenseitig congruente Stücke von endlicher Anzahl getheilt.*)

Beweis. Der Gesichtswinkel der Fläche A vom Punkte O aus sei Φ; es ist $n \leq \Phi : \varphi$. Mithin ist die Anzahl der Linien a^i und b^i, also auch die *Anzahl der zur Ausführung der Construction vorgeschriebenen Schritte endlich.* Da wir nun ein für allemal vorausgesetzt

*) Die Construction kann auch nach dem im § 2, 6. II beschriebenen Verfahren geschehen, welches übrigens im Wesentlichen die Verallgemeinerung des eben auseinandergesetzten bildet.

haben, dass die Grenzlinien unserer Flächen verschoben eine endliche Anzahl von Schnittpunkten darbieten, so entspringt demzufolge aus der Construction eine *endliche* Anzahl von Flächenstücken.

Dass aber die gegebenen Flächen durch die gezogenen Linien in der That in Stücke getheilt werden, folgt daraus, dass die Linien a^i und b^i nicht in ihrem Innern, sondern an ihren Grenzen enden. Wird nämlich die Fläche K aus ihrer ursprünglichen Lage um die Winkelgrösse φ gedreht, so kommt ihr Randstück b' auf den Rand der Fläche B zu liegen, während ihre Fläche vollständig im Innern des B bleibt; die im Innern von B gezeichnete Linie a'' endet daher jedenfalls an der Grenze von B. Wenn aber K aus der ursprünglichen Lage um die Winkelgrösse $i\varphi$ gedreht wird, wo $1 < i < n+1$, so liegt nur *ein Theil* von ihm ausserhalb B, demzufolge die im Innern von B gezeichnete Linie a^{i+1} jedenfalls am Rand des B endet. Dasselbe gilt von den Linien

$$b', b'', \ldots, b^n, b^{n+1}.$$

Ein beliebiges, durch die vorgenommene Zerstückelung entstandenes Stück der Fläche S sei S_l; man nehme im Innern von S_l einen Punkt M an; ziehe durch ihn einen Kreis mit dem Mittelpunkt O;

$$M', M'', \ldots, M^k, N$$

seien Punkte des Kreises, die der Bedingung genügen

$$+\varphi = MOM' = M'OM'' = \cdots = M^{k-1}OM^k = M^kON,$$

wobei k durch die Bedingung gegeben ist, dass M^k der letzte, der auf das Gebiet A fallenden Punkte sei. Es ist klar, dass dann $M', M'', \ldots, M^k$ Punkte von K sind, während der Punkt N bereits in das Innere von T fällt. Es ist ferner einleuchtend, dass keiner dieser Punkte in eine der Linien a^i resp. b^i fallen kann, weil jede dieser Linien durch wiederholte Drehung um die Winkelgrösse φ und um das Centrum O in irgend einen Rand a resp. b gebracht werden kann, wohin also auch der in a^i liegende Punkt M^j fallen müsste, was unmöglich ist, da M im Innern und nicht am Rande von S_l angenommen wurde.

Wiederholen wir aber diese Construction in dem Falle, wo M auf einer der Grenzlinien von S_l liegt, so werden auch die andern Punkte $M', M'', \ldots, M^k, N$ auf Grenzlinien a oder b fallen, je nachdem M auf einer der Linien a oder b angenommen wurde. Daraus folgt aber sogleich, dass die Territorien $S_l, K', K'', \ldots, K^k, T_l$ in deren Inneres die Punkte $M, M', M'', \ldots, M^{k-1}, M^k, N$ fallen, einander congruent sind, denn die innern (resp. Grenz-) Punkte jedes der Gebiete

$$S_l, K', K'', \ldots, K^{k-1}, K^k, T_l$$

werden zu innern (resp. Grenz-) Punkten jedes folgenden, sobald diese

Stücke einer Drehung von der Grösse $+\varphi$ um O unterworfen werden. Es ist daher $S_i \cong T_i$. Zu bemerken ist noch, dass zufolge der Construction der Punkte $M, M', \ldots, M^k, N$ zu jedem S_i nur ein ihm congruentes T_i gehört und umgekehrt. Damit ist die Zerstückelung der beiden Figuren S und T in gegenseitig congruente Stücke thatsächlich durchgeführt und die Richtigkeit der Construction bewiesen.

2. *Gegeben sind die aus den einfach zusammenhängenden Theilen A_1, A_2 resp. B_1, B_2 bestehenden Flächensysteme A und B, wobei $A_i \cong B_i$ $(i = 1, 2)$. Die Flächen A_1 und B_2 besitzen keinen gemeinschaftlichen Theil, während der gemeinschaftliche Theil der Flächen A_2 und B_1 auch mehrfach zusammenhängend sein kann. Das System der A und B nicht gemeinsamen Flächen ist in gegenseitig congruente Stücke zu theilen.* (Fig. 12).

Construction. Nachdem wir die Grenzlinien des den Flächen A_2, B_1 gemeinsamen Stückes K auf dieselben in ihrer gegebenen Lage abgezeichnet, bringen wir A_2 zur Deckung mit B_2, B_1 zur Deckung mit A_1 und zeichnen in dieser neuen Lage die Grenzlinien von K auf B_2 sowohl wie auf A_1 ab, womit die Zerstückelung der nicht gemeinsamen Theile der Systeme A und B in gegenseitig congruente Stücke thatsächlich durchgeführt ist.

Beweis. Die Theile von A_2 seien S_2 und K, die von B_1 T_3 und K, dann werden T_2 und $T_1 \cong K$ die Theile von B_2, S_3 und $S_1 \cong K$ hingegen die Theile von A_1 sein, wobei

$$K \cong S_1 \cong T_1, \quad S_2 \cong T_2, \quad S_3 \cong T_3.$$

S_1, S_2, S_3 und T_1, T_2, T_3 bilden aber gerade diejenigen Theile der Systeme A und B, die nicht gemeinsam sind.

3. *Gegeben sind zwei in gleichem Sinne congruente Flächen oder Flächensysteme A und B, deren gemeinsame Theile auch mehrfach zusammenhängend sein können, aus deren gegenseitigem Drehungsmittelpunkte man aber ohne Durchquerung irgend einer der gegebenen Flächen in das Unendliche gelangen kann (auf dem durch l_1 und l_2 vorgezeichneten Wege). Die nicht gemeinschaftlichen Theile sind in gegenseitig congruente Stücke zu theilen.* (Fig. 13).

Construction. Es sei φ der Winkel, um welchen man das System A drehen muss, damit es mit dem System B zur Deckung komme und es bestehe der gemeinschaftliche Theil der beiden Systeme aus den einfach zusammenhängenden einzelnen Stücken

$$K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots, K_m.$$

Wir drehen K_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ um O als Drehungscentrum um $\varphi, 2\varphi, \ldots, n_i\varphi$, und zeichnen nach jeder einzelnen Drehung die Contour von K_i ganz oder nur theilweise auf die Flächensysteme A und B ab, je nachdem K_i ganz oder nur zum Theil in diese Systeme

geräth, mit der Einschränkung aber, dass die Contouren derjenigen Theile, die die Gerade l_2 einmal bereits überschritten hatten, nicht mehr eingezeichnet werden, auch in dem Falle nicht, wenn sie auf der anderen Seite wieder in das Gebiet von A, B gelangen sollten; n_i ist dadurch charakterisirt, dass das um den Winkel $(n_i + 1)\varphi$ gedrehte K_i das erste sei, dessen Theile nach der gegebenen Vorschrift weiter nicht einzuzeichnen sind.

Ganz so sei das Verfahren bei der Drehung von K_i um

$$-\varphi, -2\varphi, \ldots, -n_i'\varphi$$

aus seiner anfänglichen Lage; wobei n_i' wieder durch die Forderung definirt sei, dass das um $-(n_i' + 1)\varphi$ gedrehte K_i keine einzuzeichnenden Theile habe. Durch die eingezeichneten Linien ist aber die Aufgabe thatsächlich gelöst.

Beweis. Genau dieselben Gründe wie bei der 1. Aufgabe dieses § berechtigen uns auch hier zu der Folgerung, dass sowohl die Endlichkeit der Anzahl der Schritte, als auch die der Anzahl der resultirenden Stücke gesichert ist.

Dass aber durch die gezogenen Linien die Systeme A und B thatsächlich aufgetheilt werden, ist auch hier einleuchtend. K_i wird nämlich in seinen verschiedenen Lagen entweder ganz oder nur zum Theil in die Systeme A, B zu liegen kommen; im erstern Falle giebt die vorgeschriebene Abbildung Stücke die congruent K_i sind, im zweiten Falle entstehen ein oder mehrere Stücke, die congruent sind mit demjenigen Theile resp. Theilen von K_i, die in die Gebiete A und B fallen. Da wir demnach bei der Drehung jedes *einzelnen* K_i stets Stücke erhalten (mit geschlossenen Contouren), so werden die verschiedenen Systeme der so eingezeichneten Linien, selbst wenn sie sich auch durchkreuzen, die Flächen A und B immer in Stücke zertheilen, deren Anzahl eine endliche ist, da die Durchkreuzungspunkte nach der ein für allemal gemachten Voraussetzung, dass die Begrenzungen der beiden Systeme bei jeder Lage eine endliche Anzahl von Schnittpunkten darbieten, nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können. Wir nennen diejenigen Theile von A, die auch Theile von B sind, *gebundene* Theile von A; von den Theilen von A, die nicht zugleich Theile von B sind, soll hingegen als von den *freien* Theilen von A die Rede sein. Wir bezeichnen ferner ein durch die durchgeführte Construction erzieltes Stück des freien Theiles, in welchem keine theilenden Linien vorkommen, mit

$$S_j \, (j = 1, 2, \ldots, s);$$

Stücke des freien Theiles von B, die die analoge Eigenschaft haben, mit

$$T_j \, (j = 1, 2, \ldots, t).$$

Es ist zu beweisen, dass $s = t$, und nach gewissen Bestimmungen

und Anordnungen $S_j = T_j$ ist, wobei $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Wir nehmen im Innern von S_j einen Punkt M an, legen durch denselben einen Kreis mit dem Mittelpunkt O, und bezeichnen mit $M', M'', \ldots, M^n$ die Punkte auf dem Kreise, deren Winkelentfernung von M gleich $\varphi, 2\varphi, \ldots, n\varphi$ ist (ebenso wie im Beweise zur ersten Aufgabe). Der Punkt M' wird dann unbedingt schon in die Fläche B fallen, da die Fläche A bei einer Drehung gleich φ die Fläche B deckt und daher ein innerer Punkt A (M) einen innern Punkt von B (M') decken muss. Dieser Punkt M' kann auf keiner der durch die Construction gewonnenen Theilungslinien liegen, da sonst bei einer Drehung gleich $-\varphi$ diese Theilungslinie durch M gehen müsste, was mit der Voraussetzung im Widerspruche steht, nach welcher im Innern von S_j keine Theilungslinie vorkomme. Bezüglich der Lage von M' sind zwei Fälle möglich: M' liegt entweder auf einem freien Stücke von B (T_j), oder auf einem gebundenen Stücke von B (K_j'); wir behaupten, dass im ersten Falle $S_j \underset{=}{\backsim} T_j$, im zweiten Falle $S_j \underset{=}{\backsim} K_j'$ ist. Bei einer Drehung gleich φ wird nämlich jeder innere Punkt M von S_j in das Innere von T_j resp. K_j' gelangen, und umgekehrt wird bei einer Drehung um $-\varphi$ jeder innere Punkt der letzteren einen inneren Punkt von S_j decken. Setzen wir bezüglich der Lage von M' den zweiten Fall voraus, so sei in der Reihe der Punkte

$$M', M'', \ldots, M^n$$

der Punkt M^h der letzte, welcher noch auf dem gebundenen Stücke K_j^h liegt, so dass M^{h+1} der erste Punkt ist, der auf das freie Stück T_j gelangt. Dann ist aber offenbar

$$S_j \underset{=}{\backsim} K_j' \underset{=}{\backsim} K_j'' \underset{=}{\backsim} \cdots \underset{=}{\backsim} K_j^h \underset{=}{\backsim} T_j.$$

Betrachten wir nämlich

$$S_j, K_j', K_j'', \ldots, K_j^h$$

als Bestandtheile von A und drehen wir das System um den Winkel φ, so werden der Annahme resp. der Construction zufolge A und B mitsammt allen auf ihnen gezeichneten Linien sich gegenseitig decken. Die Punkte

$$M, M', M'', \ldots, M^h$$

der Fläche A werden aber dann auf die Punkte

$$M', M'', M''', \ldots, M^{h+1}$$

von B zu liegen kommen; es werden also die Stücke

$$S_j, K_j', K_j'', \ldots, K_j^{h-1}, K_j^h$$

der Fläche A, die Stücke von B

$$K_j', K_j'', K_j''', \ldots, K_j^h, T_j$$

decken, wobei im Sinne der Construction T_j bereits ein freies Stück von B ist. Damit ist aber die Richtigkeit der Construction bewiesen,

denn sowie jedem S_j nach dem eben Bewiesenen ein ihm congruentes Stück T_j zugeordnet ist, und nur *ein* solches, so gehört umgekehrt zu jedem Stücke T_{j_1} ein und nur ein Stück S_{j_1}, das ihm congruent ist; man hat nur an Stelle der positiven Drehungen solche um Vielfache von $-\varphi$ vorzunehmen. Die Anzahl der Stücke S_j ist also gleich der Stücke T_j.

4. *Gegeben sind die im gleichen Sinne congruenten Flächen A und B, aus deren gegenseitigem Drehungsmittelpunkte O man nicht ins Unendliche gelangen kann, ohne A oder B zu durchqueren. Ihre nicht gemeinsamen Flächentheile S und T sind in gegenseitig congruente Stücke zu theilen.* (Fig. 14).

Construction und Beweis. Wir ziehen vom Punkt O aus ins Unendliche die stetigen, weder sich selbst noch einander schneidenden Linien l_1 und l_2, deren erste A, deren zweite B nicht schneide; die in den zwei Winkelräumen zwischen l_1 und l_2 gelegenen gemeinsamen Flächensysteme bezeichnen wir mit K_1 resp. K_2. Indem wir uns die Flächen A und B in verschiedenen Blättern denken, stellen wir uns vor, diese Blätter seien im Theile K_1 zusammenhängend, während wir von jedem Zusammenhang der übrigen Theile, namentlich K_2, absehen; (zur grössern Anschaulichkeit denke man sich z. B. die Theile von A_2 über K_2 aus der Ebene herausgebogen). Nach Ausscheidung von K_1 kann man die Reste $A - K_1$, $B - K_1$ mittels der in 1) resp. 3) gegebenen Construction in Stücke

$$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_m,$$
$$T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots, T_m$$

theilen, so dass $S_i \backsimeq T_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Nach Wiederherstellung des Zusammenhanges der einzelnen Blätter in den K_2, werde mit K_{2i} ein solcher Theil von K_2 bezeichnet, welcher *sämmtliche* gemeinsame Theile von S_i und T_i umfasst, wobei $S_i \backsimeq T_i$. Da S_i und T_i *nur* im zweiten Winkelraume zusammenhängen, so können nach Ausscheidung von K_{2i} die Reste $S_i - K_{2i}$ resp. $T_i - K_{2i}$ nach den in 1) und 3) gegebenen Constructionen wieder in gegenseitig congruente Stücke getheilt werden.

Sei weiter K_{ij} die Gesammtheit derjenigen Theile von K_2 in welchen S_i mit dem ihm nicht congruenten T_j zusammenhängt. Dann sind S_i, S_j und T_i, T_j (wobei $S_i \backsimeq T_i$, $S_j \backsimeq T_j$) solche Flächenpaare, welche durch die in 2) gegebene Construction in gegenseitig congruente Stücke getheilt werden können. Wenn endlich S_i sowohl mit dem ihm congruenten T_i, als auch mit dem ihm nicht congruenten T_j einen Theil gemeinschaftlich hat, so werden wir erstens, nachdem wir von dem S_i und T_j gemeinschaftlichen Theile abgesehen haben, nach

Ausscheidung des S_i und T_i gemeinsamen Theiles, die Reste nach 1) und 3) in gegenseitig congruente Stücke

$$s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_\lambda$$

und

$$t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_\lambda$$

zerlegen, wobei $s_i \cong t_i$; sodann werden wir als zweiten Schritt nach Ausscheidung des $s_1, s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_\lambda$ und T_j gemeinsamen Theils, die Zerstückelung der Reste in gegenseitig congruente Theile bewerkstelligen, was unter Berücksichtigung der Theile s_i, S_j und t_i, T_j

$$(s_i \cong t_i, \quad S_j \cong T_j)$$

mit Hilfe der in 2) gegebenen Construction geschehen kann. Wenn wir so sämmtliche Combinationen, die uns

$$i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$j = 1, 2, \ldots, m$$

darbieten, berücksichtigen, so lösen wir jedenfalls die vorgelegte Aufgabe in einer endlichen Anzahl von Schritten.

5. *Gegeben sind die in gleichem Sinne congruenten Ringflächen A und B, aus deren gemeinschaftlichem Drehungsmittelpunkte man nicht ins Unendliche gelangen kann ohne Durchquerung „beider" Flächen. Ihre nicht gemeinschaftlichen Theile sind in gegenseitig congruente Stücke zu theilen.*

Construction. Wir ziehen durch den gegenseitigen Drehungsmittelpunkt eine stetige sich selbst nirgends durchschneidende Linie l_1 auf der Fläche A, welche die Ringfläche A schneidend in dem ins Unendliche sich ausdehnenden Raume endigt. Sodann drehen wir A und mit A l_1 um den Winkel φ, bis A zur Deckung mit B kommt. In dieser Lage zeichnen wir l_1 auf B ein und erhalten so eine Linie l_2. Adjungiren wir die Linien l_1 und l_2 den Grenzen der Flächen A resp. B in der Weise, dass wir die Linienstücke longitudinal entzweigeschnitten denken, so haben wir A und B zu Flächen A' und B' umgestaltet, welche den Bedingungen des vorhergehenden Problems Genüge leisten. Wir gelangen nämlich entlang der neuen Ränder l_1 resp. l_2 aus dem Drehungsmittelpunkte ins Unendliche ohne Durchquerung von A' resp. B'. Unser Problem ist demnach auf das in 4) behandelte zurückgeführt.

Bemerkung. Dies ist natürlich auch die allgemeine Lösung des Falles, in welchem *der gegenseitige Drehungsmittelpunkt sich im Innern der Flächen A und B befindet;* die Construction bleibt genau dieselbe.

Wenn aber A und B einfach zusammenhängend sind (bei speciellen Lagen auch in andern Fällen) so bietet sich uns folgende einfachere Construction dar. (Fig. 15).

Es seien z. B. A und B einfach zusammenhängende congruente

Flächen, deren gegenseitiger Drehungsmittelpunkt in dem A und B gemeinschaftlichen Theile K liegt. Unter den Kreuzungspunkten der Ränder sei M_1 so gewählt, dass im Innern des mit dem Radius OM_1 gezogenen Kreises weiter kein Kreuzungspunkt der Ränder liege. Durch einen Schnitt im Laufe der Umfangslinie dieses Kreises, zerlegen wir die Flächen A und B in zwei Theile: die Theile von A und B ausserhalb des Kreises seien A_1 resp. B_1, innerhalb des Kreises A_2 resp. B_2. Bezüglich der Flächen A_1 und B_1 ist der gegenseitige Drehungsmittelpunkt ein äusserer Punkt, sonach können ihre nicht gemeinsamen Theile mittels der unter 1) gegebenen Construction in eine endliche Anzahl gegenseitig congruenter Theile zerstückelt werden; — diese Theile sind in unserer Figur

$$S_0,\ S_1,\ S_2,\ S_3 \text{ resp. } T_0,\ T_1,\ T_2,\ T_3.$$

Andererseits sind die A_2 und B_2 nicht gemeinschaftlichen Theile des Kreises S_4 und T_4 selbst schon einander congruent.

Wenn nämlich φ der Winkel ist, um welche A gedreht werden muss um mit B zur Deckung gebracht zu werden, so ist der Sehwinkel von S_4 und T_4 von O aus

$$M_1OQ = POM_1 = \varphi_1;$$

und weiter, da M_1P und QM_1 homologe Bögen der Ränder von A und B sind, so sind sie congruent selbst dann noch, wenn sie aus mehreren Stücken bestehen sollten; demzufolge wird also bei einer Drehung gleich φ die Begrenzung von T_4, bestehend aus Stücken des Kreisbogens und des ursprünglichen Randstückes M_1P, die Begrenzung von S_4 decken. Wenn der Radius des kreisförmigen Schnittes kleiner als OM_1 ist, der Kreis aber dennoch den Rand von A durchschneidet, so bleibt die Construction dieselbe; das Resultat wird aber weniger einfach sein, da die Anzahl der erzielten Stücke sich vergrössert. Wenn der Kreisschnitt mit einem Radius grösser als OM_1 geführt wird, und die Kreislinie den Punkt M_1 von den übrigen Kreuzungspunkten der Ränder von A und B trennt — in unserer Figur von M_2 — so werden die ausserhalb des Kreises liegenden nicht gemeinsamen Theile von A_1 und B_1 nach dem gleichen Vorgange in gegenseitig congruente Stücke getheilt werden können, wie vordem.

Die nicht gemeinschaftlichen Theile der innerhalb des Kreises liegenden A_2 und B_2 werden wie folgt behandelt:

Der den beiden Flächen A_2 und B_2 gemeinsame Theil K_2 wird um die Winkel $-\varphi,\ -2\varphi,\ -3\varphi\ldots$ gedreht und nach jeder einzelnen Drehung seine Contour auf die Fläche T abgezeichnet; ebenso werden die Contouren von K_2 bei einer entgegengesetzten Drehung um $+\varphi,\ +2\varphi,\ +3\varphi,\ldots$ auf S abgezeichnet. Setzen wir dies so lange fort bis kein Stück des Randes von K_2 mehr in das Innere der

Flächen S resp. T fällt, so ist deren Zerstückelung in eine endliche Anzahl gegenseitig congruenter Theile vollzogen.

Dass man bei diesem Vorgange nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Ziele gelangt, kann ebenso bewiesen werden, wie dies in 1) geschehen ist.

6. Bei Anwendung der in 1, 2, 3, 4 und 5 beschriebenen Constructionen kann demnach die Zerstückelung von gleichsinnig congruenten Flächen in gegenseitig congruente Theile erledigt werden. Das einzige bei dieser Zerlegung angewandte Hilfsmittel war, wenn wir von der eventuell vorgenommenen Ausscheidung des Drehungsmittelpunktes durch zweckmässig angebrachte Schnitte absehen, die wiederholte Drehung des den gegebenen Flächen gemeinschaftlichen Theiles um den Winkel φ, der dadurch definirt war, dass bei einer Drehung gleich φ die beiden gegebenen Flächen zur Deckung gebracht werden konnten. An Stelle der wiederholten Drehung trat wiederholte Parallelverschiebung, wenn die gegebenen Flächen nicht durch Drehung, sondern durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden konnten; dabei war die Zerstückelung des nicht gemeinschaftlichen Theiles in eine endliche Anzahl gegenseitig congruenter Stücke bei Anwendung der unter 1, 2, 3 und 4 gegebenen Constructionen stets möglich.

Wir gehen nun zu dem Falle über, in welchem *die gegebenen Flächen im entgegengesetzten Sinne congruent sind. Es seien zwei im entgegengesetzten Sinne congruente ebene Flächen A und B gegeben, welche einen gemeinschaftlichen Theil besitzen.*

I. Sei t die gegenseitige Drehungsaxe der beiden Figuren (Fig. 16); drehen wir A und B um diese Axe, so entstehen die symmetrischen Gegenfiguren zu A und B, A' resp. B'; eine Parallelverschiebung um t_1 in der Richtung von t bringt A' und B zur Deckung, eine Parallelverschiebung um t_1 in der entgegengesetzten Richtung bringt B' zur Deckung mit A. Die nicht gemeinsamen Theile von A und B werden durch die Ränder von A' und B' in Stücke

$$S_1, S_2, S_3, S_4 \text{ resp. } T_1, T_2, T_3, T_4$$

zerfällt, wobei unter S_1 und T_1 die auch beiden Flächen A' und B' gemeinschaftlichen Theile, unter S_2 und T_2, die nur A' resp. B' auch angehörenden Stücke, unter S_4 und T_4 die nur B' resp. A' auch angehörenden und endlich unter S_3 und T_3 die keinen der Flächen A' und B' angehörenden Stücke verstanden werden sollen. Da S_4 und T_4 symmetrische Gegenfiguren sind, so ist $S_4 \underline{\underline{\backsim}} T_4$ und sind demnach nur noch die Flächen $S_1 + S_2 + S_3$ und $T_1 + T_2 + T_3$ in gegenseitig congruente Stücke zu theilen.

Bezeichnen wir die symmetrischen Gegenfiguren S_3 und T_1 mit S_3' resp. T_1', so dass

$$S_3' \cong S_3 \quad \text{und} \quad T_1' \cong T_1,$$

so ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Zerstückelung der Flächen $S_1 + S_2 + S_3'$ und $T_1' + T_2 + T_3$ in gegenseitig congruente Stücke. Die angegebenen Flächen sind aber die nicht gemeinsamen Theile von A' und B; die gewünschte Zerstückelung wird also durch wiederholte Parallelverschiebung des A' und B gemeinschaftlichen Theiles in der Richtung von t und in der entgegengesetzten Richtung, jedesmal um die Grösse t_1, vollzogen werden können, da ja die Flächen A' und B durch die Parallelverschiebung um die Grösse t_1 in der Richtung t zur Deckung gebracht werden können.

Ist diese Zerstückelung aber einmal vollzogen, so sind die erzielten Theile von S_3' und T_1' auf S_3 resp. T_1 zu übertragen, was durch eine Drehung um t bewerkstelligt werden kann.

Es ist also bewiesen, dass das Problem durch die wiederholte Anwendung der durch die gegenseitige Lage von A und B gegebenen Parallelverschiebung t_1 und Drehung um die Axe t gelöst werden kann.

II. Die Construction kann auch ohne Zuhilfenahme der symmetrischen Gegenfiguren A' und B' bewerkstelligt werden, wie dies in folgender Weise gezeigt werden soll. (Fig. 17).

Seien die Begrenzungslinien des A und B gemeinsamen Theiles K a_1 im Innern von A, b_1 im Innern von B. Wir denken uns A und B mit den darauf gezeichneten Linien a_1 resp. b_1 auf verschiedenen Blättern (zum Zwecke der leichtern Veranschaulichung auf durchsichtigen Papierblättern) und bringen sie zur Deckung; in dieser Lage zeichnen wir b_1 auf A, a_1 auf B ab und bezeichnen die so erzielten Linien mit a' resp. b'. Zwei Fälle sind möglich: Kein Stück der Linien a' und b' liegt auf K, oder es giebt Stücke von a' und b', die auf K zu liegen kommen.

Im ersteren Falle ist die Zerlegung der A und B nicht gemeinsamen Theile in gegenseitig congruente Parzellen durch die Linien a' bereits b' bewerkstelligt.

Im zweiten Falle bringen wir A und B wieder in ihre ursprüngliche gegenseitige Lage zurück, so dass das Stück K von A, wieder das Stück K von B decke und zeichnen die Linien b' resp. a' auf A resp. B ab, wodurch wir die Linien a_2 resp. b_2 erhalten. A und B wieder zur Deckung gebracht, übertragen wir b_1 und a_1 auf A resp. B und bezeichnen die so erhaltenen Linien mit a'' resp. b''. Wieder sind zwei Fälle möglich: kein Stück der Linien a'' und b'' befindet sich auf K, oder es giebt Stücke von a'' und b'', die auf K zu liegen kommen. Im ersten Falle theilen die Linien a', a'' und b', b'' die nicht gemeinsamen Theile von A und B in gegenseitig congruente Stücke.

Im zweiten Falle bringen wir A und B wieder in ihre ursprüngliche gegenseitige Lage und setzen die Construction auf die beschriebene

Weise fort. Nach einer endlichen Anzahl n von Schritten wird es geschehen müssen, dass kein Stück der Linien $a^{(n)}$, $b^{(n)}$ auf K zu liegen kommt, und dann sind die nicht gemeinschaftlichen Theile von A und B durch die Linien

$$a', a'', \ldots, a^{(n-1)}, a^{(n)}$$

resp.

$$b', b'', \ldots, b^{(n-1)}, b^{(n)}$$

in gegenseitig congruente Stücke getheilt.

Beweis. Die gesammten Begrenzungslinien des A und B gemeinschaftlichen Theiles K sind auf dem Blatte A a_1 und a, auf dem Blatte B hingegen b_1 und b; in der ursprünglichen gegenseitigen Lage sind sodann

$$a_1 \equiv b \quad \text{und} \quad b_1 \equiv a.$$

Im Sinne der Construction ist das gedrehte b_1 congruent a'; also a, das in der ursprünglichen Lage congruent b_1 ist, entgegengesetzt congruent dem gedrehten b, und entgegengesetzt congruent a'. Ebenso ist b entgegengesetzt congruent b'.

Ferner ist das in der ursprünglichen gegenseitigen Lage gezeichnete b_2 congruent einem gewissen Theile von a'; das *gedrehte* b_2 aber congruent a''; demzufolge ist a'' entgegengesetzt congruent jenem Theile von a'. Es ist aber a' entgegengesetzt congruent a, wie wir nachgewiesen haben. *Wir können daher folgern, dass die Linie a' im gleichen Sinne congruent ist einem gewissen Theile von a.* —

Ebenso ist die Linie b'' gleichsinnig congruent einem gewissen Stücke von b. Da aber a'' (resp. b'') durch zweimalige Umdrehung und Verschiebung jenes Stückes von a (resp. b) erzielt wurde, so ist a'' (resp. b'') *um $2t_1$ verschoben*, verglichen mit der Lage jenes Stückes von a (resp. b).

Wir können aber allgemein sagen, dass in der Reihe der Linienstücke

$$\begin{array}{llll} a^{2n}, & a^{2n-2}, \ldots, a^{IV}, & a'', & a, \\ b^{2n}, & b^{2n-2}, \ldots, b^{IV}, & b'', & b, \\ a^{2n-1}, & a^{2n-3}, \ldots, & a''', & a', \\ b^{2n-1}, & b^{2n-3}, \ldots, & b''', & b' \end{array}$$

jedes um $2t_1$ verschoben ist, verglichen mit der Lage des unmittelbar folgenden Linienstückes.

Daraus folgt aber, dass die Anzahl der Glieder dieser Reihen endlich sein muss, da ja die Linien a, a' oder b, b' bei wiederholter Anwendung der Parallelverschiebung um $2t_1$ nach einer endlichen Anzahl von Schritten A resp. B verlassen müssen. Die Linien a und b decken sich sowohl in der *ursprünglichen* als in der Deckungslage der Figuren A und B. Es seien

$$A_{j_1},\ A_{j_2},\ \ldots,\ A_{j_n},$$
$$B_{j_1},\ B_{j_2},\ \ldots,\ B_{j_n}$$

die *gesammten* auf dem Theile K von A resp. B liegenden Figuren, die die Eigenschaft haben, dass jedes A_{j_i} in der ursprünglichen gegenseitigen Lage mit B_{j_i}, und in der Deckungslage mit $B_{j_{i+1}}$ zusammenfällt. Die Glieder dieser Reihen können nur eine endliche Anzahl haben, da jedes bestimmte Stück der Fläche K in der Reihe nur *einmal* vorkommen kann, die Anzahl der Stücke aber eine endliche ist.

Da nun in der Deckungslage

$$A_{j_1} \equiv B_{j_2},\ A_{j_2} \equiv B_{j_3},\ \ldots,\ A_{j_{n-1}} \equiv B_{j_n},$$

so müssen die frei gewordenen Figuren B_{j_1} und B_{j_n} Stücke S_j resp. T_j der nicht gemeinschaftlichen Flächen von A und B decken. Es bestehen demzufolge die Gleichungen

$$S_j \cong B_{j_1} \cong A_{j_1} \cong B_{j_2} \cong \cdots \cong B_{j_n} \cong T_j.$$

Zu jedem S_j gehört also ein und nur ein ihm congruentes Stück der Fläche T und umgekehrt.

7. *Schneidet man aus zwei congruenten Flächen* A *und* B *zwei gegenseitig congruente Stücke heraus, so sind die Reste gegenseitig endlichgleich.*

Dieser Satz ist ein Specialfall des unter Punkt 6 des § 1 Bewiesenen. Die Auftheilung der Reste in gegenseitig congruente Stücke bewerkstelligt Bólyai durch Transpositionen d. h. er führt dieselbe zurück auf die Auftheilung der nicht gemeinschaftlichen Theile zweier congruenter Flächen u. zw. wie folgt:

Es sei der Rest von A, wenn aus demselben A herausgeschnitten wird P, ebenso sei Q der Rest von B, wenn aus demselben B herausgeschnitten wird. Indem wir uns die Flächen A, A und B, B auf verschiedenen Blättern vorstellen, bringen wir das Blatt A, A so auf das Blatt B, B, dass der Rand von A den Rand von B decke und zeichnen in dieser Lage den Rand von A auf das Blatt B, den Rand von B auf das Blatt A; wir bezeichnen die durch die eben erzielten Linien begrenzten Flächen der Reihe nach mit A' resp. B', so dass

$$A \cong B \cong A' \cong B'.$$

Nun sind zwei Fälle möglich: A und B' haben entweder keine gemeinschaftlichen Theile, oder sie besitzen solche.

Im ersten Falle (Fig. 18) ist die Auftheilung der Flächen P und Q in gegenseitig congruente Stücke bereits vollzogen. Die Fläche nämlich, die nach Ausscheidung von B' aus P zurückbleibt ist congruent der Fläche, die von Q übrig bleibt, wenn man daraus A' herausschneidet.

Im zweiten Falle (Fig. 19) sei der A und B' gemeinsame Theil P_1 und ihre nicht gemeinschaftlichen Flächen S' resp. T; ebenso der A' und B gemeinschaftliche Theil Q_1, die nicht gemeinschaftlichen Theile S resp. T'; endlich seien die Theile von A und B, die nach Ausscheidung der gesammten eben erwähnten Stücke $P_1 S' T$ resp. $Q_1 S T'$ übrig bleiben P_2 resp. Q_2.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass $P_1 \cong Q_1$ und $P_2 \cong Q_2$, denn diese Flächen decken einander in der Deckungslage von A, B in Folge ihrer Construction.

Andererseits besteht P aus zwei Theilen: P_2 und T; und Q aus Q_2 und S. Durch die Congruenz von P_2 und Q_2 ist also die Aufgabe zurückgeführt auf die Zerstückelung von S und T in gegenseitig congruente Theile. Da aber $T' \cong T_1$ so ist die Aufgabe identisch mit der Auftheilung von S und T' in solche Theile; S und T' sind jedoch die nicht gemeinschaftlichen Theile von A' und B, die congruent sind; die Aufgabe kann daher durch Constructionen gelöst werden, die in diesem Paragraphen beschrieben wurden — Constructionen, die durch wiederholte Transpositionen der gegebenen Flächen ausgeführt werden.

Ebenso kann der Satz (§ 1, 7)):

Wenn aus zwei endlich-gleichen Flächen endlich-gleiche Stücke herausgeschnitten werden, so sind die Reste endlich gleich, — durch wiederholte Transpositionen bewiesen werden.

8. *Zwei im entgegengesetzten Sinne congruente geradlinige Dreiecke sind in Stücke theilbar, welche durch Drehung um ein und dasselbe Centrum und Vielfache desselben Winkels in gegenseitige Deckung gebracht werden können.*

Sei der Schnittpunkt von AC' und $A'C$ ein Punkt B, welcher zwischen A und C' und zwischen A' und C liegt; es sei ferner

$$AB = A'B \quad \text{und} \quad BC = BC'$$

Fig. 20).

Verbinden wir die Punkte A und C, sowie A' und C' so sind die Dreiecke ABC und $A'BC'$ einander congruent im entgegengesetzten Sinne. Andererseits kann jedes im entgegengesetzten Sinne congruente Dreieckenpaar in die durch unsere Figur veranschaulichte Lage gebracht werden.

Der Schnittpunkt der von den Ecken C und C' ausgehenden Halbirungslinien der an diesen Ecken befindlichen innern Winkel sei O; dann ist O der Mittelpunkt des Kreises, der alle Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A'BC'$ berührt und dessen Radius gleich

$$OD = OD' = OE = OE'$$

ist.

Betrachten wir die Figur, gebildet aus dem Bogen $DD'E$ und

der gebrochenen Linie ACE. Diese Figur werde um O gedreht, bis die Ecke C nach C' fällt; dann werden in letzterer Lage der Bogen $D'\mathsf{E}\mathsf{E}'$ und die gebrochene Linie $D'C'E'$ die Begrenzungen der gedrehten Figur sein. Die den beiden Winkelflächen nicht gemeinsamen Theile können dann nach dem in § 2, 1 beschriebenen Verfahren in gegenseitig congruente Stücke getheilt werden.

Die gewünschte Auftheilung wird dann durch die mit dem Radius $OA = OA'$ beschriebenen Kreisbögen vollendet, welche durch Drehung um O im Betrage $\varphi = COC'$ resp. $2\varphi, 3\varphi, \ldots$ zur Deckung kommen. —

Die Construction kann unmittelbar auf symmetrisch gleiche Polygone übertragen werden und wird sich im Falle symmetrisch-gleicher Pyramiden analog gestalten.

Zur Krümmungstheorie der Curvenschaaren.

Von

R. v. Lilienthal in Santiago de Chile.

Die folgenden Untersuchungen, welche ich als Fortsetzung meiner Arbeit „Ueber die Krümmung der Curvenschaaren" (diese Annalen Bd. 32, S. 545) zu betrachten bitte, beziehen sich auf die unbeschränkte Veränderlichkeit der drei unabhängigen Variabeln, während in der genannten Arbeit jene Veränderlichkeit an die Bedingung des Fortschreitens in der Normalebene einer Curve der Schaar an der betrachteten Stelle geknüpft war. Hierdurch treten weitere geometrische Invarianten auf, welche in der Theorie der geradlinigen Strahlensysteme nicht vorkommen, die aber die Transformation einer reellen Differentialform von drei Variabeln in Bezug auf die Curvenschaar in der Art ermöglichen, dass die Integrabilitätsbedingungen der Form die Differentialgleichungen zwischen den geometrischen Invarianten der Curvenschaar in einfachster Weise bilden lassen.

Nach der Transformation der Lamé'schen Differentialparameter in Bezug auf die Curvenschaar ist ein besonderer Paragraph den Beziehungen der Curvenschaar zur Einheitskugel gewidmet. Dort stellt sich der reciproke Quotient aus dem Querschnitt eines Tangentenbündels und dem parallelen Kugeloberflächenelement als Invariante des Quadrats des durch die Curvenschaar bestimmten Linearelements heraus. Den Schluss der Untersuchungen bilden Folgerungen für die Flächentheorie.

§ 1.

Einführung geometrischer Invarianten.

Wir betrachten die beiden Punkte (u, v, w) und

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial r}\, dr,\quad v + \frac{\partial v}{\partial r}\, dr,\quad w + \frac{\partial w}{\partial r}\, dr\right),$$

welche bei constantem p und q einem Werthe von r und seinem benachbarten entsprechen. Durch den ersten der beiden Punkte gehen

die Geraden $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ — Tangenten der Krümmungslinien — und durch den zweiten die Geraden $\left(\varkappa_1 + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} dr, \ldots\right)$ und $\left(\varkappa_2 + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r} dr, \ldots\right)$. Bezeichnet man in Bezug auf den Punkt (u, v, w) die Abscisse des Punktes P_1, in welchem die Projection der Geraden $\left(\varkappa_1 + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} dr, \ldots\right)$ auf die durch $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und (ξ, η, ζ) gehende Ebene die Gerade $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ trifft, mit P_1, so wird:

$$\mathsf{P}_1 = -\frac{\sqrt{a_{33}}}{\sum \xi \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}}.$$

Der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $\left(\varkappa_1 + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} dr, \ldots\right)$ treffe die erstere in einem Punkte, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (u, v, w) P_1' sei. Man hat dann:

$$\mathsf{P}_1' = -\frac{\sqrt{a_{33}} \cdot \sum \xi \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}}{\sum \left(\frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}\right)^2}.$$

Bei analogen Bezeichnungen hinsichtlich der Geraden $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ und $\left(\varkappa_2 + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r} dr, \ldots\right)$ folgt:

$$\mathsf{P}_2 = -\frac{\sqrt{a_{33}}}{\sum \xi \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r}}, \quad \mathsf{P}_2' = -\frac{\sqrt{a_{33}} \cdot \sum \xi \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r}}{\sum \left(\frac{\partial \varkappa_2}{\partial r}\right)^2}.$$

Nimmt man eine beliebige durch den Punkt (u, v, w) gehende Normale der betrachteten Curve, welche mit der Geraden $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ den Winkel α bilden möge, so entspricht ihr eine durch den Punkt $\left(u + \frac{\partial u}{\partial r} dr, \ldots\right)$ gehende Normale, welche zum selben Verhältniss $\frac{dq}{dp}$ gehört Die Projection der letzteren auf die durch die erstere und die Gerade (ξ, η, ζ) gehende Ebene schneide die erstere Normale in einem Punkt P, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (u, v, w) P sei. Es ist dann:

$$\frac{1}{\mathsf{P}} = \frac{\cos \alpha}{\mathsf{P}_1} + \frac{\sin \alpha}{\mathsf{P}_2}.$$

Somit liegen die Punkte P auf der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden. Letztere ist die Krümmungsaxe der Curve für den betrachteten Punkt, und der Radius der ersten Krümmung erhält den Werth:

$$\varrho = \frac{\mathsf{P}_1 \mathsf{P}_2}{\sqrt{\mathsf{P}_1^2 + \mathsf{P}_2^2}}.$$

Aus dem Gleichungssysteme:

$$\sum \xi \frac{\partial \xi}{\partial r} = 0, \quad \sum \varkappa_1 \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\sqrt{a_{33}}}{\mathsf{P}_1}, \quad \sum \varkappa_2 \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{\sqrt{a_{33}}}{\mathsf{P}_2}$$

erhält man:

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = \frac{\varkappa_1}{\mathsf{P}_1} + \frac{\varkappa_2}{\mathsf{P}_2}.$$

Den Ausdruck: $\sum \varkappa_2 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}$ wollen wir mit $\sqrt{a_{33}} \cdot \vartheta_0$ bezeichnen.

Dann ergiebt sich aus dem System:

$$\sum \xi \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} = -\frac{\sqrt{a_{33}}}{\mathsf{P}_1}, \quad \sum \varkappa_1 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} = 0, \quad \sum \varkappa_2 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} = \sqrt{a_{33}} \cdot \vartheta_0$$

die Folgerung:

$$\frac{\frac{\partial \varkappa_1}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = -\frac{\xi}{\mathsf{P}_1} + \varkappa_2 \vartheta_0,$$

und analog:

$$\frac{\frac{\partial \varkappa_2}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}} = -\frac{\xi}{\mathsf{P}_2} - \varkappa_2 \vartheta_0.$$

Die Grösse ϑ_0 spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Curvenschaaren. Es ist zunächst:

$$\vartheta_0^2 = \frac{1}{\mathsf{P}_1}\left(\frac{1}{\mathsf{P}_1'} - \frac{1}{\mathsf{P}_1}\right) = \frac{1}{\mathsf{P}_2}\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2'} - \frac{1}{\mathsf{P}_2}\right).$$

Ferner hat der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ und $\left(\varkappa_1 + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial r} dr, \ldots\right)$ den Werth:

$$\frac{\vartheta_0 \sqrt{a_{33}}\, dr}{\sqrt{\frac{1}{\mathsf{P}_1^2} + \vartheta_0^2}},$$

und der kürzeste Abstand der beiden Geraden $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ und $\left(\varkappa_2 + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial r} dr, \ldots\right)$ den Werth:

$$\frac{\vartheta_0 \sqrt{a_{33}}\, dr}{\sqrt{\frac{1}{\mathsf{P}_2^2} + \vartheta_0^2}}.$$

Daher besagt das Verschwinden von ϑ_0, dass die Tangenten der Krümmungslinien längs einer Curve der Schaar zwei abwickelbare Flächen bilden. Verschwindet ϑ_0 in der Weise, dass P_1 und P_2 unendlich grosse Werthe annehmen, so geht die Curvenschaar in ein Strahlensystem über und die genannten abwickelbaren Flächen werden Ebenen.

Als Bedingung dafür, dass die betrachtete Curve ($p =$ const, $q =$ const) eben ist, erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial r} \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathsf{P}_2}{\mathsf{P}_1} = \sqrt{a_{33}}\, \vartheta_0 .$$

§ 2.

Transformationen in Bezug auf eine Curvenschaar.

Es sei eine lineare Differentialform:

$$W = F_1 du + F_2 dv + F_3 dw$$

gegeben, in welcher F_1, F_2, F_3 reguläre Functionen von u, v, w bedeuten. Wir wollen sie in Bezug auf eine Curvenschaar transformiren, die entsteht wenn u, v, w als Functionen von p, q, r und p, q als Parameter betrachtet werden.

Man hat:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = u_p + \frac{\partial u}{\partial r}\, \frac{a_{13}}{a_{33}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial q} = u_q + \frac{\partial u}{\partial r}\, \frac{a_{23}}{a_{33}},$$

sodass

$$du = \delta u + \xi\, \frac{a_{13}\, dp + a_{23}\, dq + a_{33}\, dr}{\sqrt{a_{33}}}$$

wird.

Wenn wir nun:

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{a_{13}\, dp + a_{23}\, dq + a_{33}\, dr}{\sqrt{a_{33}}}$$

setzen, so folgt:

$$du = \varkappa_1 \mathfrak{S}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{S}_2 + \xi \mathfrak{S}_0 .$$

Wird ferner:

$$f_1 = \varkappa_1 F_1 + \lambda_1 F_2 + \mu_1 F_3,$$
$$f_2 = \varkappa_2 F_1 + \lambda_2 F_2 + \mu_2 F_3,$$
$$f_0 = \xi\, F_1 + \eta\, F_2 + \zeta\, F_3,$$

genommen, so entsteht die Gleichung:

$$W = f_1 \mathfrak{S}_1 + f_2 \mathfrak{S}_2 + f_0 \mathfrak{S}_0 .$$

In zweiter Linie haben wir nöthig, die Ableitungen einer Function F von u, v, w in Bezug auf die Curvenschaar zu transformiren, was auf die Transformation der Ableitungen von p, q, r nach u, v, w hinauskommt. Es ist:

$$J\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial q}\,\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial r}\,\frac{\partial w}{\partial q} = \frac{\partial w}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) - \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{\partial w}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\,\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$
$$= \sqrt{a_{33}} \cdot \{\zeta v_q - \eta w_q\},$$

wo J den Werth der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & \frac{\partial w}{\partial r} \end{vmatrix}$$

bedeutet, für die wir den Ausdruck:

$$\delta_0(\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3)\sqrt{a_{33}}$$

gefunden haben. (Diese Annalen Bd. 32, S. 552).

Da nun:

$$v_q = \lambda_1\sigma_2 + \lambda_2\sigma_4, \quad w_q = \mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_4,$$

so kommt:

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\varkappa_1\sigma_4 - \varkappa_2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man folgende Ausdrücke:

$$\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\varkappa_2\sigma_1 - \varkappa_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\xi}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial p}{\partial u} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial q}{\partial u},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\lambda_1\sigma_4 - \lambda_2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = \frac{\lambda_2\sigma_1 - \lambda_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\eta}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial p}{\partial v} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial q}{\partial v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial w} = \frac{\mu_1\sigma_4 - \mu_2\sigma_2}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}, \quad \frac{\partial q}{\partial w} = \frac{\mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_3}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3},$$

$$\frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\zeta}{\sqrt{a_{33}}} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial p}{\partial w} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial q}{\partial w}.$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$F_p = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial F}{\partial r}, \quad F_q = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial F}{\partial r},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \varkappa_1\frac{\sigma_4 F_p - \sigma_3 F_q}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3} + \varkappa_2\frac{\sigma_1 F_q - \sigma_2 F_p}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3} + \xi\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}.$$

Die hier auftretenden Coefficienten von $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ξ wollen wir zur Abkürzung der Reihe nach gleich $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ setzen, sodass entsteht:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = \varkappa_1 g_1(F) + \varkappa_2 g_2(F) + \xi g_0(F), \\ \frac{\partial F}{\partial v} = \lambda_1 g_1(F) + \lambda_2 g_2(F) + \eta g_0(F), \\ \frac{\partial F}{\partial w} = \mu_1 g_1(F) + \mu_2 g_2(F) + \zeta g_0(F), \\ dF = g_1(F)\mathfrak{S}_1 + g_2(F)\mathfrak{S}_2 + g_0(F)\mathfrak{S}_0, \end{cases}$$

wobei, wie noch bemerkt sein möge:

$$g_1(F)\mathfrak{S}_1 + g_2(F)\mathfrak{S}_2 = F_p\,dp + F_q\,dq$$

ist.

Die Functionen $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ besitzen die Eigenschaft, invariabel zu sein bei jeder Substitution, welche den geometrischen Charakter der Curvenschaar ungeändert lässt. Solche Substitution drückt die beiden Parameter p und q durch Functionen zweier neuer Parameter, die Variable r durch eine Function einer neuen Variabeln aus.

Um die nöthigen Formeln zu entwickeln, setzen wir die Curvenschaar als in den Variabeln p_1, q_1, r_1 gegeben voraus und betrachten dann p_1 und q_1 als Functionen der neuen Variabeln p und q, sowie r_1 als Function der neuen Variabeln r.

Die Grössen $a_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, σ_α in den alten Variabeln wollen wir mit $a'_{\alpha\beta}$, $e'_{\alpha\beta}$, σ'_α, die Grössen H, Ψ, τ, ψ in den alten Variabeln mit H_1, Ψ_1, τ_1, ψ_1 bezeichnen. Man erhält dann:

$$a_{13} = \left(a'_{13}\frac{\partial p_1}{\partial p} + a'_{23}\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)\frac{dr_1}{dr},$$

$$a_{23} = \left(a'_{13}\frac{\partial p_1}{\partial q} + a'_{23}\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)\frac{dr_1}{dr},$$

$$a_{33} = a'_{33}\left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit dp, dq, dr, so geht die Bedingung:

$$a'_{13}\,dp_1 + a'_{23}\,dq_1 + a'_{33}\,dr_1 = 0,$$

da $\frac{dr_1}{dr}$ von Null verschieden sein muss, in die folgende über:

$$a_{13}\,dp + a_{23}\,dq + a_{33}\,dr = 0.$$

Nehmen wir nun irgend eine Function $f(p, q, r)$, so ist:

$$f_p = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p} - \frac{a'_{13}\frac{\partial p_1}{\partial p} + a'_{23}\frac{\partial q_1}{\partial p}}{a'_{33}}\frac{\partial f}{\partial r_1}$$

d. h. aber:

$$f_p = f_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial p} + f_{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial p}.$$

Ebenso folgt:

$$f_q = f_{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q} + f_{q_1}\frac{\partial q_1}{\partial q}.$$

Setzt man f der Reihe nach gleich ξ, η, ζ, so erhält man:

$$\sqrt{\mathsf{H}} \cos \tau = \sqrt{\mathsf{H}_1} \cos \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sqrt{\Psi_1} \cos (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial p},$$

$$\sqrt{\Psi} \cos (\tau - \psi) = \sqrt{\mathsf{H}_1} \cos \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sqrt{\Psi_1} \cos (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$\sqrt{\mathsf{H}} \sin \tau = \sqrt{\mathsf{H}_1} \sin \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sqrt{\Psi_1} \sin (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial p},$$

$$\sqrt{\Psi} \sin (\tau - \psi) = \sqrt{\mathsf{H}_1} \sin \tau_1 \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sqrt{\Psi_1} \sin (\tau_1 - \psi_1) \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$\sqrt{\mathsf{H}} \sqrt{\Psi} \sin \psi = \sqrt{\mathsf{H}_1} \sqrt{\Psi_1} \sin \psi_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} - \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} \right).$$

Auf ähnliche Weise folgt:

$$e_{11} = e'_{11} \left(\frac{\partial p_1}{\partial p} \right)^2 + (e'_{12} + e'_{21}) \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{22} \left(\frac{\partial q_1}{\partial p} \right)^2,$$

$$e_{12} = e'_{11} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial p_1}{\partial p} + e'_{12} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{21} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{22} \frac{\partial q_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$e_{21} = e'_{11} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial p_1}{\partial q} + e'_{12} \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial p} + e'_{21} \frac{\partial p_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{22} \frac{\partial q_1}{\partial p} \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$e_{22} = e'_{11} \left(\frac{\partial p_1}{\partial q} \right)^2 + (e'_{12} + e'_{21}) \frac{\partial p_1}{\partial q} \frac{\partial q_1}{\partial q} + e'_{22} \left(\frac{\partial q_1}{\partial q} \right)^2.$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen ergeben sich die folgenden Transformationsformeln für die Ausdrücke σ_α:

$$\sigma_1 = \sigma_1' \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sigma_2' \frac{\partial q_1}{\partial p}, \quad \sigma_2 = \sigma_1' \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sigma_2' \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' \frac{\partial p_1}{\partial p} + \sigma_4' \frac{\partial q_1}{\partial p}, \quad \sigma_4 = \sigma_3' \frac{\partial p_1}{\partial q} + \sigma_4' \frac{\partial q_1}{\partial q},$$

welche die behauptete Invariabilität der Functionen $g_1(F)$, $g_2(F)$, $g_0(F)$ aufs leichteste erkennen lassen.

§ 3.

Anwendung des Vorhergehenden auf $\xi, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$

Man hat (diese Annalen Bd. 32, S. 550, 551, 559):

$$\delta \xi = \varkappa_1 H_2 + \varkappa_2 H_1,$$

$$\delta \varkappa_1 = \varkappa_2 U - \xi H_2 = \varkappa_2 \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} \right) - \xi H_2,$$

$$\delta \varkappa_2 = -\varkappa_1 U - \xi H_1 = -\varkappa_1 \left(\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} \right) - \xi H_1.$$

Hier sind H_1 und H_2 durch $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ auszudrücken. Um dies zu vereinfachen, sei

$$\varepsilon_0 = \frac{e_0}{\mathfrak{r}_3 \mathfrak{r}_4 Q_\xi}$$

gesetzt. Es gilt dann, da:

$$e_0^2 = (\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4 - \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)Q_\xi^2,$$

für die Grösse ε_0^2 zunächst die Beziehung:

$$\varepsilon_0^2 = \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4} - \frac{1}{h_1 h_2}.$$

Ferner folgt aus den beiden ersten Gleichungen Bd. 32, S. 561 dieser Annalen:

$$\varepsilon_0 = \frac{R_1}{h_2}\left(\frac{1}{R''} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{R_2}{h_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'}\right).$$

Nun wird:

$$H_1 = \varepsilon_0\mathfrak{S}_1 - \frac{\mathfrak{S}_2}{h_1},$$

$$H_2 = -\frac{\mathfrak{S}_1}{h_2} - \varepsilon_0\mathfrak{S}_2$$

und damit:

$$\delta\xi = \left(-\frac{\varkappa_1}{h_2} + \varkappa_2\varepsilon_0\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\varkappa_1\varepsilon_0 - \frac{\varkappa_2}{h_1}\right)\mathfrak{S}_2,$$

$$\delta\varkappa_1 = \left(\frac{\varkappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_2}\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\frac{\varkappa_2}{R_2} + \varepsilon_0\xi\right)\mathfrak{S}_2,$$

$$\delta\varkappa_2 = \left(-\frac{\varkappa_1}{R_1} - \xi\varepsilon_0\right)\mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\xi}{h_1}\right)\mathfrak{S}_2.$$

Mit Hülfe der im § 1 entwickelten Formeln erhalten wir dann:

$$d\xi = \left(-\frac{\varkappa_1}{h_2} + \varkappa_2\varepsilon_0\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\varkappa_1\varepsilon_0 - \frac{\varkappa_2}{h_1}\right)\mathfrak{S}_2 + \left(\frac{\varkappa_1}{\mathsf{P}_1} + \frac{\varkappa_2}{\mathsf{P}_2}\right)\mathfrak{S}_0,$$

$$d\varkappa_1 = \left(\frac{\varkappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_2}\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\frac{\varkappa_2}{R_2} + \varepsilon_0\xi\right)\mathfrak{S}_2 + \left(-\frac{\xi}{\mathsf{P}_1} + \varkappa_2\vartheta_0\right)\mathfrak{S}_0,$$

$$d\varkappa_2 = \left(-\frac{\varkappa_1}{R_1} - \xi\varepsilon_0\right)\mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\xi}{h_1}\right)\mathfrak{S}_2 + \left(-\frac{\xi}{\mathsf{P}_2} - \varkappa_1\vartheta_0\right)\mathfrak{S}_0,$$

woraus sich die Ausdrücke für die Ableitungen von ξ, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ etc. nach u, v, w unmittelbar ergeben. Dieselben liefern die Mittel, um die Beziehungen zwischen den Untersuchungen des Herrn A. Voss (diese Annalen Bd. 23, S. 45) und den vorliegenden herzustellen.

Die dort mit p_1, p_2, p_3 bezeichneten Grössen lassen sich, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, beziehentlich durch ξ, η, ζ ersetzen, sodass das betrachtete Punktebenensystem durch die Gleichung:

$$\xi\, du + \eta\, dv + \zeta\, dw = 0,$$

bestimmt wird. Für die von Herrn Voss benutzten Ausdrücke G, Δ und Δ' ergeben sich mit Hülfe unserer Formeln die Gleichungen:

$$G = -2\delta_0\varepsilon_0, \quad \Delta = -\frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4}, \quad \Delta' = -\frac{1}{h_1 h_2}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial w} = -\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung für $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ in der Form:

$$x^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial w}\right) x - \Delta' = 0,$$

die Gleichung für $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ in der Form:

$$x^2 - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial w}\right) x - \frac{\Delta'}{\Delta^2} = 0,$$

und die Gleichung für $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ in der Form:

$$x^2 - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial w}\right) x - \frac{1}{\Delta} = 0.$$

Die gewonnenen Gleichungen setzen uns in den Stand das Analoge für die beiden mit dem betrachteten Punktebenensystem gegebenen Punktebenensysteme zu leisten, welche den Gleichungen:

$$\varkappa_1\, du + \lambda_1\, dv + \mu_1\, dw = 0$$

und

$$\varkappa_2\, du + \lambda_2\, dv + \mu_2\, dw = 0$$

entsprechen. Die in Bezug auf das erstere derselben genommenen Ausdrücke G, Δ, Δ' sollen mit G_1, Δ_1, Δ_1', die entsprechenden Ausdrücke in Bezug auf das zweite mit G_2, Δ_2, Δ_2' bezeichnet werden.

Dann folgt:

$$G_1 = G_2 = \delta_0(\vartheta_0 - \varepsilon_0),$$

worin der Satz liegt, dass die beiden in Frage stehenden Punktebenensysteme nur gleichzeitig aus lauter Flächentangentialebenen bestehen können, und dass die Bedingung hierfür ist:

$$\varepsilon_0 = \vartheta_0.$$

Ferner wird:

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial u} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} + \frac{\partial \mu_1}{\partial w} = -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\mathrm{P}_1},$$

$$\Delta_1 = \varepsilon_0 \vartheta_0 - \frac{1}{R_2 \mathrm{P}_1},$$

$$\Delta_1' = \frac{(\varepsilon_0 + \vartheta_0)^2}{4} - \frac{1}{R_2 \mathrm{P}_1},$$

$$\frac{\partial \varkappa_2}{\partial u} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial v} + \frac{\partial \mu_2}{\partial w} = -\frac{1}{R_1} - \frac{1}{\mathrm{P}_2},$$

$$\Delta_2 = \varepsilon_0 \vartheta_0 - \frac{1}{R_1 \mathrm{P}_2},$$

$$\Delta_2' = \frac{(\varepsilon_0 + \vartheta_0)^2}{4} - \frac{1}{R_1 \mathrm{P}_2},$$

Man ersieht hieraus, dass, wenn $\varepsilon_0 + \vartheta_0 = 0$, die Grössen h_1, h_2 in dem der Gleichung

$$\varkappa_1\, du + \lambda_1\, dv + \mu_1\, dw = 0$$

entsprechenden Punktebenensystem mit P_1 und R_2, in dem der Gleichung:

$$\varkappa_2\, du + \lambda_2\, dv + \mu_2\, dw = 0$$

entsprechenden mit P_2 und R_1 zusammenfallen.

§ 4.

Weitere Transformationen.

Es soll die Transformation der Integrabilitätsbedingungen einer linearen Differentialform:

$$W = F_1\, du + F_2\, dv + F_3\, dw = f_1 \mathfrak{S}_1 + f_2 \mathfrak{S}_2 + f_0 \mathfrak{S}_0$$

in Bezug auf die Curvenschaar durchgeführt werden.

Man hat nach § 2:

$$F_1 = \varkappa_1 f_1 + \varkappa_2 f_2 + \xi f_0,$$
$$F_2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \eta f_0,$$
$$F_3 = \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \zeta f_0.$$

Unter Anwendung der entwickelten Formeln nimmt die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0$$

die Gestalt:

$$\mu_1 A + \mu_2 B + \zeta C,$$

die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_2}{\partial w} - \frac{\partial F_3}{\partial v} = 0$$

die Gestalt:

$$\varkappa_1 A + \varkappa_2 B + \xi C,$$

die linke Seite der Gleichung:

$$\frac{\partial F_3}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial w} = 0$$

die Gestalt:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B_1 + \eta C$$

an. Es müssen daher A, B, C gleichzeitig verschwinden, und dies liefert die gesuchten Bedingungen in der Form:

$$g_2(f_1) - g_1(f_2) = \frac{f_1}{R_1} - \frac{f_2}{R_2} + 2\varepsilon_0 f_0,$$

$$g_0(f_2) - g_2(f_0) = f_1(\varepsilon_0 - \vartheta_0) + \frac{f_2}{h_1} - \frac{f_0}{\mathsf{P}_2},$$

$$g_1(f_0) - g_0(f_1) = -\frac{f_1}{h_2} + f_2(\varepsilon_0 - \vartheta_0) + \frac{f_0}{\mathsf{P}_1}.$$

Die Anwendung dieser Gleichungen auf die neun Differentiale $d\xi$, $d\varkappa_1$, $d\varkappa_2$, etc. lehrt die Differentialgleichungen erster Ordnung kennen,

welche zwischen den eingeführten geometrischen Invarianten der Curvenschaar h_1, h_2, ε_0, ϑ_0 etc. bestehen. Die Rechnung zeigt, dass nur 9 von einander verschiedene Differentialgleichungen auftreten und zwar sind dies die folgenden:

$$g_2\left(\frac{1}{h_2}\right) - g_1(\varepsilon_0) = \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) - \frac{2\varepsilon_0}{\mathsf{P}_1},$$

$$g_1\left(\frac{1}{h_1}\right) + g_2(\varepsilon_0) = \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \frac{2\varepsilon_0}{\mathsf{P}_2},$$

$$g_0(\varepsilon_0) + g_2\left(\frac{1}{\mathsf{P}_1}\right) = \vartheta_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon_0\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \frac{1}{\mathsf{P}_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\mathsf{P}_1}\right),$$

$$g_0\left(\frac{1}{h_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2}\right) = \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \frac{1}{R_2\mathsf{P}_1} + \frac{1}{\mathsf{P}_2^2} - \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4},$$

$$g_1\left(\frac{1}{\mathsf{P}_1}\right) + g_0\left(\frac{1}{h_2}\right) = \frac{1}{R_1\mathsf{P}_2} + \frac{1}{\mathsf{P}_1^2} - \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4} + \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right),$$

$$g_1\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2}\right) - g_0(\varepsilon_0) = \vartheta_0\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \varepsilon_0\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \frac{1}{\mathsf{P}_1}\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} - \frac{1}{R_1}\right),$$

$$g_2\left(\frac{1}{R_1}\right) + g_1\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4} + 2\varepsilon_0\vartheta_0,$$

$$g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) + g_2(\vartheta_0) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \vartheta_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathsf{P}_2}\right) + \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\mathsf{P}_1}\right),$$

$$g_1(\vartheta_0) - g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\mathsf{P}_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \vartheta_0\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathsf{P}_1}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{\mathsf{P}_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

§ 5.

Lamé'sche Differentialparameter.

Machen wir jetzt eine Anwendung der entwickelten Formeln auf die Theorie der Lamé'schen Differentialparameter.

Es sei f eine Function von p, q, r, also auch von u, v, w.

Für den ersten Lamé'schen Differentialparameter ergiebt sich dann die Gleichung:

$$\Delta_1(f)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2 = g_1(f)^2 + g_2(f)^2 + g_0(f)^2.$$

Nach § 2 ist aber:

$$g_1(f)^2 + g_2(f)^2 = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_3^2)f_q^2 - 2(\sigma_3\sigma_4+\sigma_1\sigma_2)f_pf_q + (\sigma_2^2+\sigma_4^2)f_p^2}{(\sigma_1\sigma_4-\sigma_2\sigma_3)^2}$$

$$= \frac{\mathfrak{E}f_q^2 - 2\mathfrak{F}f_pf_q + \mathfrak{G}f_q^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}.$$

(Diese Annalen Bd. 32, S. 547). Daher hat man gleichzeitig:

$$\Delta_1(f)^2 = \frac{\mathfrak{E}f_q^2 - 2\mathfrak{F}f_qf_p + \mathfrak{G}f_p^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} + g_0(f)^2.$$

Um den zweiten Lamé'schen Differentialparameter zu transformiren, führen wir zur Abkürzung die Bezeichnung ein:

$$g_{\alpha\beta}(f) = g_\alpha\big(g_\beta(f)\big).$$

Dann erhält man:

$$\Delta_2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = g_{11}(f) + g_{22}(f) + g_{00}(f)$$
$$- g_1(f)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{P_1}\right) - g_2(f)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{P_2}\right) - g_0(f)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right).$$

Auch hier lässt ein Theil der rechten Seite eine ähnliche Umformung zu, wie sie bei dem ersten Differentialparameter statthat. Setzen wir für den Augenblick:

$$A = \frac{\mathfrak{G} f_p - \mathfrak{F} f_q}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad B = \frac{\mathfrak{E} f_q - \mathfrak{F} f_p}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad N = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = \sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3,$$

so wird:

$$A = \sigma_4 g_1(f) - \sigma_2 g_2(f), \quad B = \sigma_1 g_2(f) - \sigma_3 g_1(f),$$

d. h.:

$$g_1(f) = \frac{\sigma_1}{N} A + \frac{\sigma_2}{N} B, \quad g_2(f) = \frac{\sigma_3}{N} A + \frac{\sigma_4}{N} B.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$g_{11}(f) + g_{22}(f) = g_1(f)\,\frac{\sigma_{3q} - \sigma_{4p}}{N} + g_2(f)\,\frac{\sigma_{2p} - \sigma_{1q}}{N} + \frac{1}{N}(A_p + B_q).$$

Die Coefficienten von $g_1(f)$ und $g_2(f)$ in letzter Gleichung haben eine sehr einfache Bedeutung. Es ist:

$$u_p = \varkappa_1\sigma_1 + \varkappa_2\sigma_3, \quad u_q = \varkappa_1\sigma_2 + \varkappa_2\sigma_4.$$

Daher:

$$\sigma_1 = \sum \varkappa_1 u_p, \quad \sigma_2 = \sum \varkappa_1 u_q, \quad \sigma_3 = \sum \varkappa_2 u_p, \quad \sigma_4 = \sum \varkappa_2 u_q,$$

somit:

$$\sigma_{3q} - \sigma_{4p} = \sum \varkappa_{2q} u_p - \sum \varkappa_{2p} u_q + \sum \varkappa_2 (u_{pq} - u_{qp}).$$

Zunächst hat man $u_{pq} - u_{qp}$ zu berechnen. Da zeigt sich:

$$u_{pq} - u_{qp} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r}}{a_{33}}\left\{\sum u_q \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial p} - \sum u_p \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial q} + \frac{a_{23}}{a_{33}} \sum u_p \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right.$$
$$\left. - \frac{a_{13}}{a_{33}} \sum u_q \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right\}.$$

Benutzt man jetzt die Formeln:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial p} - \xi\,\frac{\partial \log\sqrt{a_{33}}}{\partial p},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial q} - \xi\,\frac{\partial \log\sqrt{a_{33}}}{\partial q},$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \xi\,\frac{\partial \log\sqrt{a_{33}}}{\partial r},$$

so folgt:

$$u_{pq} - u_{qp} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \left\{ \sum u_q \xi_p - \sum u_p \xi_q \right\},$$

d. h. aber

$$u_{pq} - u_{qp} = \xi (e_{12} - e_{21}) = 2 \xi e_0.$$

Analog hat man:

$$v_{pq} - v_{qp} = 2 \eta e_0, \quad w_{pq} - w_{qp} = 2 \zeta e_0,$$

so dass:

$$\sum \varkappa_2 (u_{pq} - u_{qp}) = 0.$$

Da nun:

$$\begin{aligned} \sum \varkappa_{2q} u_p - \sum \varkappa_{2p} u_q &= \sigma_1 \sum \varkappa_1 \varkappa_{2q} - \sigma_2 \sum \varkappa_1 \varkappa_{2p} \\ &= - \sigma_1 U_2 + \sigma_2 U_1 \\ &= \frac{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}{R_2}, \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\frac{\sigma_{3q} - \sigma_{4p}}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} = \frac{1}{R_2},$$

und in ähnlicher Weise:

$$\frac{\sigma_{2p} - \sigma_{1q}}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3} = \frac{1}{R_1}.$$

Daher entsteht:

$$g_{11}(f) + g_{22}(f) = \frac{g_1(f)}{R_2} + \frac{g_2(f)}{R_1} + \frac{1}{N}(A_p + B_q),$$

sowie:

$$\begin{aligned} \Delta_2(f) = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{G} f_p - \mathfrak{F} f_q}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \right)_p + \left(\frac{\mathfrak{E} f_q - \mathfrak{F} f_p}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \right)_q \right\} \\ - \frac{g_1(f)}{\mathsf{P}_1} - \frac{g_2(f)}{\mathsf{P}_2} - g_0(f)\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + g_{00}(f). \end{aligned}$$

Der Uebergang von den Lamé'schen Differentialparametern zu den Beltrami'schen vollzieht sich jetzt in einfachster Weise.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Function f von r unabhängig sei, so entsteht:

$$\Delta_1(f)^2 = g_1(f)^2 + g_2(f)^2 = \frac{\mathfrak{E}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial q} + \mathfrak{G}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2},$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(f) &= g_{11}(f) + g_{22}(f) - g_1(f)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathsf{P}_1}\right) - g_2(f)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\mathsf{P}_2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{G}\frac{\partial f}{\partial p} - \mathfrak{F}\frac{\partial f}{\partial q}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \right)_p + \left(\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial f}{\partial q} - \mathfrak{F}\frac{\partial f}{\partial p}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} \right)_q \right\} \\ &\quad - \frac{g_1(f)}{\mathsf{P}_1} - \frac{g_2(f)}{\mathsf{P}_2}. \end{aligned}$$

Wird nun an Stelle der Curvenschaar ein Strahlensystem genommen, welches durch die Gleichungen:

$$u = x + r\xi, \quad v = y + r\eta, \quad w = z + r\zeta$$

definirt ist, wo $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ nur von p und q abhängen, so verschwinden die Ausdrücke $\frac{1}{\mathsf{P}_1}$ und $\frac{1}{\mathsf{P}_2}$. Giebt man dann dem Quadrate des Linearelements der Fläche (x, y, z) die Gestalt:

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

und betrachtet die Differentialparameter für den Werth $r = 0$, so ergeben sich die Beltrami'schen Ausdrücke für $\Delta_1(f)$ und $\Delta_2(f)$, wenn man das Strahlensystem mit dem Normalensystem der Fläche (x, y, z) zusammenfallen lässt.

§ 6.

Beziehungen zwischen Curvenschaar und Einheitskugel.

Jeder im Punkt (u, v, w) zur Curve $(p = \text{const.}, q = \text{const.})$ normalen Richtung entspricht eine durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehende Tangente der Einheitskugel, deren Gleichung: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ist. Die erstere Richtung ist gekennzeichnet durch die Richtungscosinus:

$$\frac{\delta u}{\sqrt{\Sigma\,\delta u^2}}, \quad \frac{\delta v}{\sqrt{\Sigma\,\delta u^2}}, \quad \frac{\delta w}{\sqrt{\Sigma\,\delta u^2}},$$

und die zweite durch die Richtungscosinus:

$$\frac{\delta \xi}{\sqrt{\Sigma\,\delta \xi^2}}, \quad \frac{\delta \eta}{\sqrt{\Sigma\,\delta \xi^2}}, \quad \frac{\delta \zeta}{\sqrt{\Sigma\,\delta \xi^2}},$$

wobei der Werth des Verhältnisses $\frac{dq}{dp} = t$ in allen sechs Ausdrücken derselbe sein muss.

Fragt man, unter welchen Umständen entsprechende Richtungen parallel sind, so findet sich die Bedingung:

$$(e_{11}\Phi - e_{21}\mathrm{H}) + \big(e_{11}\Psi + (e_{12} - e_{21})\Phi - e_{22}\mathrm{H}\big)\,t + (e_{12}\Psi - e_{22}\Phi)\,t^2 = 0,$$

d. h. die Brennpunkte des Tangentenbündels müssen reell sein, und die fraglichen durch den Punkt (u, v, w) gehenden Richtungen treffen diejenigen Nachbartangenten, welche die Tangente (ξ, η, ζ) schneiden.

Als Bedingung der Orthogonalität entsprechender Richtungen erhält man:

$$\mathfrak{r}_1 H_1^2 + \mathfrak{r}_2 H_2^2 = 0,$$

d. h. die Asymptotenlinien müssen reell sein und die fraglichen Normalen der Curve $(p = \text{const.}, q = \text{const.})$ sind Tangenten der Asymptoten-

linien. Man kann in der Theorie der Curvenschaaren ebenso wie in der Flächentheorie auch von Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ reden, wenn man nur gleichzeitig orthogonale Trajectorien darunter versteht. Fallen z. B. die Curven $q = \text{const.}$, mit den Krümmungslinien $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$, die Curven $p = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammen, so ist $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, wenn aber die Curven $p = \text{const.}$ bez. $q = \text{const.}$ mit den Krümmungslinien $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ bez. $(\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2)$ zusammenfallen, so ist $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$.

Soll Entsprechendes auf der Einheitskugel (ξ, η, ζ) stattfinden, so muss

$$\Phi = 0 \quad \text{und} \quad e_{12} + e_{21} = 0$$

sein.

Fallen die Curven $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$ mit den Asymptotenlinien der Curvenschaar zusammen, so hat man:

$$\sigma_1^2 \sigma_4^2 - \sigma_2^2 \sigma_3^2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_1 \sigma_1^2 + \mathfrak{r}_2 \sigma_3^2 = 0.$$

Wichtiger ist die Frage nach dem Zusammenhang des reciproken Quotienten aus dem Querschnitt des Tangentenbündels und dem parallelen Kugeloberflächenelement mit den Coefficienten des Quadrats des Linearelements

$$a_{11}\, dp^2 + a_{22}\, dq^2 + a_{33}\, dr^2 + 2a_{12}\, dp\, dq + 2a_{13}\, dp\, dr + 2a_{23}\, dq\, dr.$$

Für jenen Quotienten haben wir die drei Ausdrücke:

$$\frac{\sqrt{\mathsf{H}\Psi - \Phi^2}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}}, \quad \frac{Q_\xi}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}, \quad \frac{1}{\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4}$$

gefunden. Es wird sich herausstellen, dass er eine Invariante des angeführten Quadrats des Linearelements ist.

Wenn man: $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = P^2$ setzt, so folgt aus den Gleichungen:

$$\sum \xi\xi_p = 0, \quad \sum u_p \xi_p = e_{11}, \quad \sum u_q \xi_p = e_{12}$$

die Beziehung:

$$\xi_p \,.\, P^2 = u_p(e_{11}\mathfrak{G} - e_{12}\mathfrak{F}) + u_q(e_{12}\mathfrak{E} - e_{11}\mathfrak{F}),$$

und aus den Gleichungen:

$$\sum \xi\xi_q = 0, \quad \sum u_p \xi_q = e_{21}, \quad \sum u_q \xi_q = e_{22}$$

folgt:

$$\xi_q P^2 = u_p(e_{21}\mathfrak{G} - e_{22}\mathfrak{F}) + u_q(e_{22}\mathfrak{E} - e_{21}\mathfrak{F}).$$

Daher ist:

$$\begin{aligned}
\mathsf{H} P^2 &= e_{11}(e_{11}\mathfrak{G} - e_{12}\mathfrak{F}) + e_{12}(e_{12}\mathfrak{E} - e_{11}\mathfrak{F}),\\
\Phi P^2 &= e_{21}(e_{11}\mathfrak{G} - e_{12}\mathfrak{F}) + e_{22}(e_{12}\mathfrak{E} - e_{11}\mathfrak{F})\\
&= e_{11}(e_{21}\mathfrak{G} - e_{22}\mathfrak{F}) + e_{12}(e_{22}\mathfrak{E} - e_{21}\mathfrak{F}).\\
\Psi P^2 &= e_{21}(e_{21}\mathfrak{G} - e_{22}\mathfrak{F}) + e_{22}(e_{22}\mathfrak{E} - e_{21}\mathfrak{F}),
\end{aligned}$$

sodass:

$$P^2(\mathrm{H}\Psi - \Phi^2) = (e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21})^2$$

und:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{H}\Psi - \Phi^2}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}} = \frac{e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}.$$

Man hat aber:

$$e_{11} = \frac{-1}{P}\begin{vmatrix} u_{pp} & v_{pp} & w_{pp} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix}, \qquad e_{21} = \frac{-1}{P}\begin{vmatrix} u_{pq} & v_{pq} & w_{pq} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix},$$

$$e_{12} = \frac{-1}{P}\begin{vmatrix} u_{qp} & v_{qp} & w_{qp} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix}, \qquad e_{22} = \frac{-1}{P}\begin{vmatrix} u_{qq} & v_{qq} & w_{qq} \\ u_p & v_p & w_p \\ u_q & v_q & w_q \end{vmatrix},$$

woraus folgt:

$$e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} = \frac{1}{P^2}\begin{vmatrix} \sum u_{pp}u_{qq} & \mathfrak{F}_q - \frac{1}{2}\mathfrak{G}_p & \frac{1}{2}\mathfrak{G}_q \\ \frac{1}{2}\mathfrak{E}_p & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \mathfrak{F}_p - \frac{1}{2}\mathfrak{E}_q & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{1}{P^2}\begin{vmatrix} \sum u_{pq}u_{qp} & \frac{1}{2}\mathfrak{E}_q & \frac{1}{2}\mathfrak{G}_p \\ \frac{1}{2}\mathfrak{E}_q & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} \\ \frac{1}{2}\mathfrak{G}_p & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} \end{vmatrix}.$$

Es handelt sich nun noch um die Transformation der Differenz:

$$\sum u_{pp}u_{qq} - \sum u_{pq}u_{qp}.$$

Es ist:

$$\mathfrak{G}_{pp} = 2\sum u_{qp}^2 + 2\sum u_q u_{qpp},$$

$$\mathfrak{F}_{pq} = \sum u_q u_{ppq} + \sum u_{pp}u_{qq} + \sum u_{pq}u_{qp} + \sum u_p u_{qpq},$$

$$\mathfrak{F}_{qp} = \sum u_q u_{pqp} + \sum u_{pq}u_{qp} + \sum u_{pp}u_{qq} + \sum u_p u_{qqp},$$

$$\mathfrak{E}_{qq} = 2\sum u_{pq}^2 + 2\sum u_p u_{pqq}.$$

Aus der Relation:

$$u_{pq} - u_{qp} = 2\xi e_0$$

und den analogen zieht man die Folgerungen:

$$\sum u_{qp}^2 = \sum u_{qp}u_{pq} + 2e_0e_{12}, \qquad \sum u_q u_{qpp} = \sum u_q u_{pqp} - 2e_0e_{12},$$

$$\sum u_{pq}^2 = \sum u_{pq}u_{qp} - 2e_0e_{21}, \qquad \sum u_p u_{pqq} = \sum u_p u_{qpq} + 2e_0e_{21}.$$

Es bleiben also noch die beiden Summen $\sum u_q u_{ppq}$ und $\sum u_p u_{qqp}$ umzuformen. Durch directe Rechnung folgt:

$$u_{ppq} - u_{pqp} = 2e_0 \left\{ \xi_p + \xi \left((\log \sqrt{a_{33}})_p - \frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} \right) \right\},$$

$$u_{qqp} - u_{qpq} = -2e_0 \left\{ \xi_q + \xi \left((\log \sqrt{a_{33}})_q - \frac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} \right) \right\},$$

sodass:

$$\sum u_q u_{ppq} = \sum u_q u_{pqp} + 2e_0 e_{12}$$

und

$$\sum u_p u_{qqp} = \sum u_p u_{ppq} - 2e_0 e_{21}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln kommt:

$$\sum u_{pp} u_{qq} - \sum u_{pq} u_{qp} = \frac{1}{2} \{ - \mathfrak{G}_{pp} + \mathfrak{F}_{pq} + \mathfrak{F}_{qp} - \mathfrak{E}_{qq} - e_0^2 \}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$\mathfrak{E} = a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}},$$

$$\mathfrak{F} = a_{12} - \frac{a_{13} a_{23}}{a_{33}},$$

$$\mathfrak{G} = a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}},$$

$$\frac{2e_0}{\sqrt{a_{33}}} = \left(\frac{a_{23}}{a_{33}}\right)_p - \left(\frac{a_{13}}{a_{33}}\right)_q$$

ist, so zeigt sich in der That der Quotient $\frac{Q_\xi}{P}$ allein durch die Coefficienten des Quadrats des Linearelements und deren Ableitungen ausgedrückt.

Nimmt man als Curvenschaar das Normalensystem einer Fläche, so wird $e_0 = 0$ und die durch den unteren Index p oder q angezeigten zusammengesetzten Differentiationen gehen in gewöhnliche nach p oder q genommene über. Für $r = 0$ ergiebt sich dann der bekannte Gauss'sche Ausdruck.

§ 7.

Folgerungen für die Flächentheorie.

Die im Vorigen entwickelte Anwendung der linearen Differentialformen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_0$ kann in analoger Weise auch in der Flächentheorie mit Erfolg durchgeführt werden.

Sind $x, y, z,$ — die Coordinaten der Punkte einer nicht abwickelbaren Fläche — Functionen von p und q, so hat man:

$$dx = -\varrho_1 A_1 H_1 - \varrho_2 A_2 H_2,$$
$$dy = -\varrho_1 B_1 H_1 - \varrho_2 B_2 H_2,$$
$$dz = -\varrho_1 C_1 H_1 - \varrho_2 C_2 H_2,$$

wo ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser, A_1, B_1, C_1, bez. A_2, B_2, C_2 die Richtungscosinus der Tangente der zu ϱ_1, bez. ϱ_2 gehörenden Krümmungslinie bedeuten, und

$$H_1 = \sqrt{L}\cos\sigma\, dp + \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi)\, dq,$$
$$H_2 = \sqrt{L}\sin\sigma\, dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)\, dq$$

gesetzt ist. Dabei sind die Richtungscosinus der Flächennormale mit X, Y, Z bezeichnet und die sonstigen vorkommenden Grössen definirt durch die Gleichungen:

$$L = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2, \qquad N = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2,$$
$$\sqrt{L}\cos\sigma = \sum A_1 \frac{\partial X}{\partial p}, \qquad \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi) = \sum A_1 \frac{\partial X}{\partial q},$$
$$\sqrt{L}\sin\sigma = \sum A_2 \frac{\partial X}{\partial p}, \qquad \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = \sum A_2 \frac{\partial X}{\partial q}.$$

Man kann nun das Differential einer Function f der beiden Variabeln p und q als lineare Form von H_1 und H_2 darstellen wie folgt:

$$df = \frac{\partial df}{\partial H_1} H_1 + \frac{\partial df}{\partial H_2} H_2,$$

und man überzeugt sich leicht, dass die hier auftretenden Coefficienten von H_1 und H_2 invariable Functionen sind. Den Zusammenhang zwischen diesen Coefficienten und den Ableitungen von f nach p und q liefern die Gleichungen:

$$\frac{\partial df}{\partial H_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial q}\sqrt{L}\sin\sigma - \frac{\partial f}{\partial p}\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)}{\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\varphi},$$
$$\frac{\partial df}{\partial H_2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial p}\sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi) - \frac{\partial f}{\partial q}\sqrt{L}\cos\sigma}{\sqrt{L}\sqrt{N}\sin\varphi}.$$

Für die Differentiale der Richtungscosinus X, A_1, A_2 etc. erhält man:

$$dX = A_1 H_1 + A_2 H_2,$$
$$dA_1 = -(A_2 t_1 + X) H_1 + A_2 t_2 H_2,$$
$$dA_2 = A_1 t_1 H_1 - (A_1 t_2 + X) H_2,$$

wo $t_1 = \frac{\varrho_1}{R_2}$, $t_2 = \frac{\varrho_2}{R_1}$ genommen ist und R_1, R_2 die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien bedeuten. (Diese Annalen Bd. 31, S. 88).

Die Anwendung der Ausdrücke $\frac{\partial df}{\partial H_1}$ und $\frac{\partial df}{\partial H_2}$ ist von vielfachem Nutzen. Fällt z. B. die durch die Gleichung $f(p, q) = \text{const.}$ bestimmte Curvenschaar auf der Fläche mit den zu ϱ_1 oder ϱ_2 gehörenden Krümmungslinien zusammen, so hat man:

$$\frac{\partial df}{\partial H_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial df}{\partial H_2} = 0.$$

Jene Gleichung definirt eine Schaar von Asymptotenlinien, wenn:

$$\varrho_1 \left(\frac{\partial df}{\partial H_2}\right)^2 + \varrho_2 \left(\frac{\partial df}{\partial H_1}\right)^2 = 0.$$

Die Gleichungen $f(p, q) = \text{const.}$ und $f_1(p, q) = \text{const.}$ liefern conjugirte Curvenschaaren, wenn:

$$\varrho_1 \frac{\partial df}{\partial H_2} \frac{\partial df_1}{\partial H_2} + \varrho_2 \frac{\partial df}{\partial H_1} \frac{\partial df_1}{\partial H_1} = 0.$$

Die Determinante der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungslinie hat den Werth:

$$\Delta_1 = - \varrho_1^3 H_1^6 \frac{\partial dt_1}{\partial H_1}$$

und die Determinante der zu ϱ_2 gehörenden:

$$\Delta_2 = \varrho_2^3 H_2^6 \frac{\partial dt_2}{\partial H_2}.$$

Bei der ersteren Krümmungslinie erhält der Radius der ersten Krümmung den Werth:

$$r_1 = \frac{\varrho_1}{\sqrt{1 + t_1^2}},$$

der Radius der zweiten Krümmung den Werth:

$$r_1' = - \frac{\varrho_1 (1 + t_1^2)}{\frac{\partial dt_1}{\partial H_1}}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die zweite Krümmungslinie sind:

$$r_2 = \frac{\varrho_2}{\sqrt{1 + t_2^2}}, \quad r_2' = \frac{\varrho_2 (1 + t_2^2)}{\frac{\partial dt_2}{\partial H_2}}.$$

Setzt man:

$$d\varrho_1 = \varrho_{11} H_1 + \varrho_{12} H_2, \quad d\varrho_2 = \varrho_{21} H_1 + \varrho_{22} H_2,$$

so lässt sich die Gleichung derjenigen Normalschnitte, die von ihrem Schmiegungskreis vierpunktig berührt werden, in der Form schreiben:

$$\varrho_{11} H_1^3 + 3 \varrho_{12} H_1^2 H_2 + 3 \varrho_{21} H_1 H_2^2 + \varrho_{22} H_2^3 = 0.$$

Es sei jetzt irgend eine lineare Form von H_1 und H_2 gegeben, etwa: $F = F_1 H_1 + F_2 H_2$. Dann ist die Integrabilitätsbedingung derselben:

$$\frac{\partial d F_1}{\partial H_2} - \frac{\partial d F_2}{\partial H_1} = F_2 t_2 - F_1 t_1.$$

Die Anwendung dieser Beziehung auf dx, dy, dz liefert die beiden Gleichungen:

$$\varrho_{12} = (\varrho_2 - \varrho_1) t_1, \quad \varrho_{21} = (\varrho_1 - \varrho_2) t_2,$$

die Anwendung auf dX, dA_1, dA_2, etc. lässt nur die eine Gleichung:

$$\frac{\partial d t_1}{\partial H_2} + \frac{\partial d t_2}{\partial H_1} = -1 - t_1^2 - t_2^2$$

hinzukommen. Diese Gleichungen, welche in anderer Form vielfach angewandt sind, müssen in den 9 am Schlusse des § 4 aufgestellten Gleichungen enthalten sein. Um das zu erkennen bemerken wir zunächst, dass die vorliegende Curvenschaar — das Normalensystem unserer Fläche — durch die Gleichungen:

$$u = x + rX, \quad v = y + rY, \quad w = z + rZ$$

bestimmt ist, wo die Werthe von r die von der Fläche (x, y, z) aus gerechneten Abscissen auf den Normalen der Fläche bedeuten. Im betrachteten Fall verschwinden die Grössen ε_0, ϑ_0, $\frac{1}{\mathsf{P}_1}$ und $\frac{1}{\mathsf{P}_2}$. Ferner gehen h_1 und $\mathfrak{r}_3$ in den grösseren, h_2 und $\mathfrak{r}_4$ in den kleineren der beiden Hauptkrümmungshalbmesser der zum jeweiligen Werthe von r gehörenden Parallelfläche der Fläche (x, y, z) über, sodass man erhält:

$$h_1 = \mathfrak{r}_3 = \varrho_1 - r, \quad h_2 = \mathfrak{r}_4 = \varrho_2 - r.$$

Die Grössen R_1 und R_2 verwandeln sich in die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien der genannten Parallelfläche und sollen zur Unterscheidung von den in diesem Paragraphen auftretenden Grössen R_1 und R_2 mit R_1' und R_2' bezeichnet werden, sodass bei $r = 0$: $R_1 = R_1'$, $R_2 = R_2'$.

Endlich hat man hier, wenn f eine Function der Variabeln p, q, r ist:

$$g_1(f) = -\frac{1}{\varrho_2 - r}\frac{\partial d f}{\partial H_2}, \quad g_2(f) = -\frac{1}{\varrho_1 - r}\frac{\partial d f}{\partial H_1}, \quad g_0(f) = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Die beiden letzten Gleichungen des § 4 liefern nun nach einfacher Integration:

$$R_1' = \frac{\varrho_2 - r}{t_2}, \quad R_2' = \frac{\varrho_1 - r}{t_1}.$$

(Vergl. diese Annalen Bd. 31, S. 90, 2)).

Die beiden ersten Gleichungen des in Rede stehenden Systems ergeben:

$$\varrho_{21} = t_2(\varrho_1 - \varrho_2), \quad \varrho_{12} = t_1(\varrho_2 - \varrho_1),$$

die siebente nimmt die Form:

$$\frac{\partial dt_1}{\partial H_2} + \frac{\partial dt_2}{\partial H_1} = -1 - t_1^2 - t_2^2$$

an, während die übrigen sich als identisch erfüllt herausstellen.

Auch die Formeln (1) § 2 gestatten eine directe Anwendung auf den vorliegenden Fall. Es gehen ξ, η, ζ bez. in X, Y, Z; $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ bez. in A_2, B_2, C_2 und $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ bez. in A_1, B_1, C_1 über. Ist daher f eine Function von u, v, w, welche sich durch die Substitution:

$$u = x + rX, \quad v = y + rY, \quad w = z + rZ$$

in eine Function von p, q, r verwandelt, so hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{A_1}{\varrho_1 - r}\frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{A_2}{\varrho_2 - r}\frac{\partial df}{\partial H_2} + X\frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{B_1}{\varrho_1 - r}\frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{B_2}{\varrho_2 - r}\frac{\partial df}{\partial H_2} + Y\frac{\partial f}{\partial r},$$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = -\frac{C_1}{\varrho_1 - r}\frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{C_2}{\varrho_2 - r}\frac{\partial df}{\partial H_2} + Z\frac{\partial f}{\partial r}.$$

Geht aber durch jene Substitution f in eine Function von p und q allein über, so entsteht für die Fläche $r = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{A_1}{\varrho_1}\frac{\partial df}{\partial H_1} - \frac{A_2}{\varrho_2}\frac{\partial df}{\partial H_2}, \text{ etc.}$$

Die Anwendung auf X, A_1, A_2 etc. liefert ein System von 27 Gleichungen, welche sich aus den folgenden:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{A_1^2}{\varrho_1} - \frac{A_2^2}{\varrho_2}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{A_1B_1}{\varrho_1} - \frac{A_2B_2}{\varrho_2},$$

$$\frac{\partial X}{\partial w} = -\frac{A_1C_1}{\varrho_1} - \frac{A_2C_2}{\varrho_2},$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} = A_1\left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{\varrho_1}\right) - \frac{A_2^2}{R_1}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial v} = B_1\left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{\varrho_1}\right) - \frac{B_2A_2}{R_1},$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial w} = C_1\left(\frac{A_2}{R_2} + \frac{X}{\varrho_1}\right) - \frac{C_2A_2}{R_1},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} = -\frac{A_1^2}{R_2} + A_2\left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{\varrho_2}\right), \quad \frac{\partial A_2}{\partial v} = -\frac{A_1B_1}{R_2} + B_2\left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{\varrho_2}\right),$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial w} = -\frac{C_1A_1}{R_2} + C_2\left(\frac{A_1}{R_1} + \frac{X}{\varrho_2}\right)$$

durch cyklische Vertauschung von X, Y, Z, u, v, w, A, B, C herleiten lassen.

Es ergiebt sich die bekannte Beziehung:

$$\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial w} = -\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2},$$

welcher die analogen:

und:

$$\frac{\partial A_1}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial C_1}{\partial w} = -\frac{1}{R_1}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial u} + \frac{\partial B_2}{\partial v} + \frac{\partial C_2}{\partial w} = -\frac{1}{R_2}$$

zur Seite treten.

Die Ausdrücke für ϱ_{12} und ϱ_{21} lassen unmittelbar den invariablen Charakter dieser Grössen erkennen, indem sie nur geometrische Invarianten aufweisen. Um für ϱ_{11} und ϱ_{22} Ausdrücke derselben Eigenschaft zu erhalten, hat man die Theorie der Krümmungsmittelpunktsflächen zu Hülfe zu nehmen. Dieselbe gestaltet sich bei Benutzung der entwickelten Methode besonders einfach. Bezüglich der zu ϱ_1 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche wird der Krümmungsradius eines Normalschnitts gegeben durch die Gleichung:

$$\varrho' = \frac{\varrho_{11}^2 H_1^2 + 2\varrho_{11}\varrho_{12} H_1 H_2 + (\varrho_{12}^2 + (\varrho_1 - \varrho_2)^2) H_2^2}{\varrho_{11} H_1^2 - \varrho_{21} H_2^2}.$$

Die Gleichung der Asymptotenlinien wird:

$$\varrho_{11} H_1^2 - \varrho_{21} H_2^2 = 0,$$

die der Krümmungslinien:

$$\varrho_{11} t_1 H_1^2 - (\varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_{12} t_1 + \varrho_{11} t_2) H_1 H_2 - \varrho_{12} t_2 H_2^2 = 0,$$

und die beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1', ϱ_2' sind die Wurzeln der Gleichung:

$$t_2 \varrho^2 - \{t_2 \varrho_{11} - (\varrho_1 - \varrho_2)(1 + t_1^2)\} \varrho - \varrho_{11}(\varrho_1 - \varrho_2) = 0,$$

so dass:

$$\varrho_{11} = \frac{t_2 \varrho_1' \varrho_2'}{\varrho_2 - \varrho_1}.$$

Bezüglich der zu ϱ_2 gehörenden Krümmungsmittelpunktsfläche ergiebt sich das Analoge durch Vertauschung der Indices 1 und 2. Es wird im Besonderen:

$$\varrho_{22} = \frac{t_1 \varrho_1'' \varrho_2''}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

man hat also allgemein:

$$d\varrho_1 = \frac{t_2 \varrho_1' \varrho_2'}{\varrho_2 - \varrho_1} H_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) t_1 H_2,$$

$$d\varrho_2 = (\varrho_1 - \varrho_2) t_2 H_1 + \frac{\varrho_1'' \varrho_2'' t_1}{\varrho_1 - \varrho_2} H_2.$$

Auch die Centraflächen der geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien lassen sich mit unseren Methoden in einfacher Weise untersuchen. Bemerkt sei nur, dass die Gleichung der Asymptotenlinien der zu R_1 gehörenden Centrafläche die Form hat:

$$R_1 \frac{\partial dt_1}{\partial H_1} H_1^2 - t_2 \frac{\partial dR_1}{\partial H_2} H_2^2 = 0.$$

Was endlich die Differentialparameter einer Function f von p und q in Bezug auf die Fläche betrifft, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(f)^2 &= \frac{1}{\varrho_1^2}\left(\frac{\partial d f}{\partial H_1}\right)^2 + \frac{1}{\varrho_2^2}\left(\frac{\partial d f}{\partial H_2}\right)^2, \\
\Delta_2(f) &= \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{\partial d^2 f}{\partial H_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\frac{\partial d^2 f}{\partial H_2^2} + \left(\frac{1}{\varrho_1 R_1} - \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3}\right)\frac{\partial d f}{\partial H_1} \\
&\quad + \left(\frac{1}{\varrho_2 R_2} - \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3}\right)\frac{\partial d f}{\partial H_2},
\end{aligned}$$

oder analog dem Früheren, wenn man:

$$S_\alpha(f) = \frac{1}{\varrho_\alpha}\frac{\partial d f}{\partial H_\alpha}, \quad S_{\alpha\beta}(f) = S_\alpha\{S_\beta(f)\}$$

setzt:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(f)^2 &= S_1(f)^2 + S_2(f)^2, \\
\Delta_2(f) &= S_{11}(f) + S_{22}(f) + \frac{S_1(f)}{R_1} + \frac{S_2(f)}{R_2}.
\end{aligned}$$

Das vollständige System der ersten und zweiten Differentialparameter der 9 Richtungscosinus X, A_1, A_2 etc. ergiebt sich durch cyklische Vertauschung von A, B, C; X, Y, Z aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta_1(X)^2 &= \frac{A_1^2}{\varrho_1^2} + \frac{A_2^2}{\varrho_2^2}, \\
\Delta_1(A_1)^2 &= A_2^2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) + 2\frac{A_2 X}{\varrho_1 R_2} + \frac{X^2}{\varrho_1^2}, \\
\Delta_1(A_2)^2 &= A_1^2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right) + 2\frac{A_1 X}{\varrho_2 R_1} + \frac{X^2}{\varrho_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_2(X) &= A_1\left\{\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) - \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3}\right\} + A_2\left\{\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) - \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3}\right\} \\
&\quad - X\left(\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2}\right), \\
\Delta_2(A_1) &= X\left\{-\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + \frac{\varrho_{11}}{\varrho_1^3}\right\} - A_1\left\{\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right\} \\
&\quad + A_2\left\{\frac{1+t_1^2}{\varrho_1 r_1'} + \frac{1+t_2^2}{\varrho_2 r_2'} + \frac{t_1\varrho_{11}}{\varrho_1^3} - \frac{t_2\varrho_{22}}{\varrho_2^3}\right\}, \\
\Delta_2(A_2) &= X\left\{-\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + \frac{\varrho_{22}}{\varrho_2^3}\right\} - A_1\left\{\frac{1+t_2^2}{\varrho_2 r_2'} + \frac{1+t_1^2}{\varrho_1 r_1'} - \frac{t_2\varrho_{22}}{\varrho_2^3} + \frac{t_1\varrho_{11}}{\varrho_1^3}\right\} \\
&\quad - A_2\left\{\frac{1}{\varrho_2^2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Santiago de Chile, im Juli 1890.

Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe.*)

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Wenn in der Gauss'schen hypergeometrischen Reihe

$$(1)\qquad F(l, m, n, x) = 1 + \frac{l \cdot m}{n}\,\frac{x}{1} + \frac{l(l+1)\,m(m+1)}{n(n+1)}\,\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

die Elemente l, m, n positive reelle Werthe besitzen, so ist klar, dass die Reihe für jedes positive x einen positiven Werth annimmt, und dass es daher keinen zwischen 0 und 1 liegenden Werth von x geben kann, welcher die Gleichung

$$(2)\qquad F(l, m, n, x) = 0$$

befriedigt. Sind dagegen die Elemente l, m, n nicht sämmtlich positiv, so kann die Gleichung (2) möglicher Weise für einen oder mehrere zwischen 0 und 1 liegende Werthe von x erfüllt sein, und es entsteht die Aufgabe, genau die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Wurzeln der Gleichung (2) zu ermitteln.

Diese Aufgabe hat Herr Klein neuerdings ganz allgemein erledigt und zwar durch eine sehr schöne Methode, welche die Bestimmung jener Anzahl auf die Bestimmung der möglichen Gestalten von Kreisbogendreiecken zurückführt**).

Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, dass man die in Rede stehende Aufgabe auch auf Grund derjenigen Principien lösen kann, welche bei dem Sturm'schen Satze von der Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zur Verwendung gelangen. Dieser Sturm'sche Satz beruht bekanntlich auf einem Lemma***), welches ich hier zunächst in der allgemeinen Fassung, wie ich es verwenden werde, angeben will.

---

*) Abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten vom December 1890.

**) Vergl. die Mittheilung: „Ueber die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe" in No. 10 der Göttinger Nachrichten vom Jahre 1890 (Sitzung vom 2. August), welche weiter ausgeführt in Heft 4 des 37. Bandes der Mathematischen Annalen erschienen ist.

***) Vgl. etwa Serret, Cours d'algèbre supérieure, Paris 1877, Bd. I. p. 285.

Die reelle Veränderliche x werde auf das Intervall

$$(J)\ldots a \leqq x \leqq b$$

eingeschränkt. Ferner seien

(3) $$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k$$

reelle Functionen der Veränderlichen x, welche in dem Intervalle J eindeutig und stetig sind und überdies folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Function V_k soll für keinen Werth von x, welcher dem Intervalle J angehört, verschwinden.

2. Wenn die Function V_i, wo i eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$ bedeutet, an einer Stelle des Intervalles J verschwindet, so sollen an dieser Stelle die Functionen V_{i-1} und V_{i+1}, nicht verschwindende Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen besitzen.

3. Wenn x das Intervall J von a bis b durchläuft, so soll beim Ueberschreiten einer Stelle, wo V_0 verschwindet, der Quotient $\frac{V_0}{V_1}$ von negativen zu positiven Werthen übergehen.

Unter diesen Voraussetzungen ist nun die Anzahl der Stellen, an welchen V_0 in dem Intervalle J verschwindet, gleich

$$N_a - N_b,$$

wo N_a resp. N_b die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (3) für $x = a$ resp. $x = b$ bezeichnet.

Diese Zahlen N_a und N_b kann man, was für das Folgende wichtig ist, auch als die Anzahlen der negativen Werthe erklären, welche in der Reihe

(4) $$V_0 V_1, V_1 V_2, V_2 V_3, \ldots, V_{k-1} V_k$$

für $x = a$ resp. $x = b$ auftreten.

Indem ich mich nunmehr der Betrachtung der hypergeometrischen Reihe (1) zuwende, bemerke ich zunächst, dass die Reihe offenbar sinnlos wird, wenn n gleich 0 oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Das Element n unterliegt also der Beschränkung, dass es keinen Werth aus der Reihe

$$0, -1, -2, -3, \ldots$$

besitzen darf. Ich will nun, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, genau dieselbe Beschränkung auch den Elementen l und m auferlegen.

In den hierdurch ausgeschlossenen Fällen reducirt sich die hypergeometrische Reihe auf eine ganze rationale Function von x*) und die

*) Für diese Functionen hat Herr Stieltjes (Comptes Rendus, Bd. 100, p. 620) die zugehörigen Sturm'schen Reihen aufgestellt und bemerkt, dass man aus diesen Reihen die Anzahl der reellen Nullstellen der Functionen leicht ableiten kann. Auf anderem Wege gelangte Herr Hilbert (Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 103, p. 337) zur Bestimmung dieser Anzahlen.

nachfolgenden Betrachtungen unterliegen dann einer leichten Modification.

Dies vorausgeschickt, stelle ich eine Reihe von Functionen (3) her, in welcher die ersten Glieder V_0 und V_1 bez. die hypergeometrische Reihe $F(l, m, n, x)$ und deren erste Ableitung

$$\frac{dF}{dx} = \frac{lm}{n} F(l+1, m+1, n+1, x) \tag{5}$$

sind. Dies gelingt leicht auf Grund der Gauss'schen Relationen, welche zwischen je drei aufeinanderfolgenden der Functionen:

$$\begin{gathered} F_0 = F(l, m, n, x), \quad F_1 = F(l+1, m+1, n+1, x), \ldots, \\ F_i = F(l+i, m+i, n+i, x), \ldots \end{gathered} \tag{6}$$

bestehen. In der That, man setze

$$\begin{gathered} r_0 = -\frac{(l+1)(m+1)}{n(n+1)}, \quad r_1 = -\frac{(l+2)(m+2)}{(n+1)(n+2)}, \ldots, \\ r_i = -\frac{(l+i+1)(m+i+1)}{(n+i)(n+i+1)}, \ldots \end{gathered} \tag{7}$$

und bilde nun die Functionen:

$$\left\{\begin{aligned} V_0 &= F_0, & V_2 &= r_0 F_2, \ldots, & V_{2i} &= r_0 r_2 \cdots r_{2i-2} F_{2i}, \ldots, \\ V_1 &= \frac{lm}{n} F_1, & V_3 &= \frac{lm}{n} r_1 F_3, \ldots, & V_{2i+1} &= \frac{lm}{n} r_1 r_3 \cdots r_{2i-1} F_{2i+1}, \ldots \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Dann wird die Reihe

$$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_k, \tag{9}$$

bei geeigneter Wahl der Zahl k, den oben genannten Bedingungen genügen, und zwar für jedes Intervall $a \ldots b$, welches ganz in dem Intervalle $0 \ldots 1$ enthalten ist.

Die erwähnten Gauss'schen Relationen ergeben nämlich das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} V_0 &= Q_0 \; V_1 - x(1-x) V_2, \\ V_1 &= Q_1 \; V_2 - x(1-x) V_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{k-2} &= Q_{k-2} V_{k-1} - x(1-x) V_k, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

wobei zur Abkürzung

$$\left\{\begin{aligned} Q_0 &= \frac{n}{lm}\left(1 - \frac{l+m+1}{n} x\right), \ldots, \\ Q_{2i} &= \frac{n}{lm} \frac{r_0 r_2 \ldots r_{2i-2}}{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}} \left(1 - \frac{l+m+4i+1}{n+2i} x\right), \ldots \\ Q_1 &= \frac{lm}{n} \cdot \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{l+m+3}{n+1} x\right), \ldots, \\ Q_{2i+1} &= \frac{lm}{n} \cdot \frac{1}{r_0} \cdot \frac{r_1 r_3 \ldots r_{2i-1}}{r_2 r_4 \ldots r_{2i}} \left(1 - \frac{l+m+4i+3}{n+2i+1} x\right), \ldots \end{aligned}\right. \tag{11}$$

gesetzt ist.

Die Function V_k unterscheidet sich nur um einen constanten, nicht verschwindenden Factor von

$$F_k = F(l+k, m+k, n+k, x).$$

Wählen wir daher die k Zahl so, dass $l+k$, $m+k$, $n+k$ positiv werden, so ist V_k in dem Intervall $0 \ldots 1$ beständig von Null verschieden, und die Bedingung 1) ist also erfüllt. Indem wir beachten, dass die Factoren $Q_0, Q_1, \ldots$ sämmtlich endlich sind, schliessen wir sodann aus dem Gleichungssystem (10), dass auch die Bedingung 2) erfüllt ist. Endlich genügt die Reihe (9) auch der Bedingung 3), weil V_1 die Ableitung der Function V_0 ist.

Beachten wir jetzt, dass

$$V_i V_{i+1} = \frac{lm}{n} r_0 r_1 r_2 \cdots r_{i-1} F_i F_{i+1}$$

dasselbe Vorzeichen besitzt, wie

$$(-1)^i \cdot \frac{l_{i+1} m_{i+1}}{n+i} F_i F_{i+1},$$

wo zur Abkürzung

(12) $\quad l_i = l(l+1)\ldots(l+i-1),\ m_i = m(m+1)\ldots(m+i-1)$

gesetzt ist, so erhalten wir den Satz:

Bedeuten a und $b > a$ zwei zwischen 0 und 1 liegende Grössen, und bildet man die Reihe

(13) $\quad \frac{l_1 m_1}{n} F_0 F_1,\ -\frac{l_2 m_2}{n+1} F_1 F_2, \cdots, (-1)^{k-1} \frac{l_k m_k}{n+k-1} F_{k-1} F_k,$

so giebt $N_a - N_b$ die Anzahl der Nullstellen von

$$F_0 = F(l, m, n, x)$$

an, welche zwischen a und b liegen, wenn N_a bez. N_b die Anzahl der negativen Glieder bezeichnet, welche in der Reihe (13) für $x = a$ bez. $x = b$ auftreten.

Die Zahl k ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, dass die Grössen

$$l+k,\ m+k,\ n+k$$

positiv sein müssen*). Die in dem Ausspruch des Satzes benutzten Abkürzungen werden durch die Gleichungen (6) und (12) erklärt.

Um die Gesammtzahl der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$ in dem Intervall $0 < x < 1$ zu bestimmen, brauchen wir unseren Satz nur auf den Fall anzuwenden, wo a in der Nähe des Werthes $x = 0$ und b in der Nähe des Werthes $x = 1$ liegt.

*) Der Satz gilt auch noch, wenn eines oder jedes der Elemente l, m gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Nur hat man dann für k die erste Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots$ zu wählen, für welche eine der beiden Grössen $l+k$, $m+k$ verschwindet.

Wir werden also

$$a = \varepsilon, \quad b = 1 - \eta$$

setzen, wo ε und η genügend klein zu wählende positive Grössen bezeichnen. Lassen wir x in 0 übergehen, so nehmen die Functionen (13) die Werthe an:

$$(13) \qquad \frac{l_1 m_1}{n}, \; -\frac{l_2 m_2}{n+1}, \cdots, (-1)^{k-1}\frac{l_k m_k}{n+k-1}.$$

Um die Werthe jener Functionen in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu beurtheilen, werde ich die bekannte Gleichung

$$(15) \qquad F(l, m, n, x) = (1-x)^{n-l-m} F(n-l, \; n-m, n, x)$$

benutzen. Dabei setze ich voraus, dass

$$(16) \qquad n \leqq l + m$$

sei. Diese Voraussetzung beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit. Denn würde

$$n > l + m$$

sein, so wäre

$$n < (n-l) + (n-m)$$

und wir würden an Stelle von $F(l, m, n, x)$ die Function $F(n-l, n-m, n, x)$ betrachten, welche der Gleichung (15) zufolge zwischen 0 und 1 dieselben Nullstellen besitzt wie $F(l, m, n, x)$.

Lassen wir nun, unter der Voraussetzung, dass $n < l + m$ ist, x wachsend in 1 übergehen, so geht $F(n-l, n-m, n, x)$ stetig in

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(l+m-n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}$$

über. Daher hat $F(l, m, n, x)$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}.$$

Dieses gilt, wie man leicht erkennt, nicht nur für $n < l + m$, sondern auch für $n = l + m$. Da nun aus der Ungleichung (16) folgt, dass auch

$$n + i < (l+i) + (m+i) \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so besitzt $F_i F_{i+1}$ in der Nähe von $x = 1$ dasselbe Vorzeichen, wie

$$\frac{\Gamma(n+i)\,\Gamma(n+i+1)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)\,\Gamma(l+i+1)\,\Gamma(m+i+1)} = \frac{n+i}{(l+i)(m+i)}\left[\frac{\Gamma(n+i)}{\Gamma(l+i)\,\Gamma(m+i)}\right]^2,$$

also dasselbe Vorzeichen wie

$$\frac{n+i}{(l+i)\,(m+i)}.$$

Daher haben die Glieder der Reihe (13) in der Nähe von $x = 1$ dieselben Vorzeichen, wie die entsprechenden Glieder der Reihe

$$(17) \qquad 1, \; -l_1 m_1, \; l_2 m_2, \cdots, (-1)^{k-1} l_{k-1} m_{k-1}.$$

Kommen also in der Reihe (14) N_0 negative Glieder, in der Reihe (17) N_1 negative Glieder vor, so ist

$$N = N_0 - N_1$$

die Anzahl der zwischen 0 und 1 liegenden Nullstellen von $F(l, m, n, x)$.

Die Zahlen N_0 und N_1 können wir sofort näher bestimmen, wenn wir die verschiedenen Fälle unterscheiden, welche den möglichen Vorzeichencombinationen der Elemente l, m, n entsprechen. Dabei wollen wir

$$(18) \qquad l \geqq m$$

voraussetzen, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, da $F(l, m, n, x)$ bei Vertauschung von l und m in sich übergeht. Ferner möge, wenn l negativ ist, λ die erste Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ sein, für welche $l + \lambda$ positiv wird, so dass in der Reihe

$$l,\ l+1,\ l+2, \cdots, l+\lambda-1,\ l+\lambda, \cdots$$

$l + \lambda - 1$ das letzte negative Glied ist. Die entsprechende Bedeutung mögen μ und ν in Rücksicht auf m und n erhalten.

Die Discussion der verschiedenen Fälle, bei welcher man die Ungleichungen (16) und (18) zu beachten hat, ergiebt nun die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten Resultate:

	l	m	n	N
I.	+	+	−	$\frac{1-(-1)^{\nu}}{2}$
II.	+	−	+	μ
III.	+	−	−	$\mu - \nu$, für $\mu \geqq \nu$ $\frac{1-(-1)^{\mu+\nu}}{2}$, für $\mu \leqq \nu$
IV.	−	−	−	$\frac{1-(-1)^{\lambda+\mu+\nu}}{2}$

Wie diese Tabelle aufzufassen ist, erhellt aus folgendem Satze:

Sind die Elemente l, m, n sämmtlich negativ (Fall IV der Tabelle), so verschwindet $F(l, m, n, x)$ zwischen 0 und 1 kein Mal oder ein Mal, je nachdem $\lambda + \mu + \nu$ gerade oder ungerade ist.

Man wird sich leicht überzeugen, dass die Tabelle mit den von Herrn Klein gefundenen Resultaten vollständig im Einklang steht.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass man die Frage nach der Gesammtheit der Nullstellen von $F(l, m, n, x)$, gleichgültig ob l, m, n reelle oder complexe Werthe besitzen, auch auf Grund der allgemeinen Sätze, welche ich an anderer Stelle entwickelt habe*), in Angriff nehmen kann. Man hat dann die Wurzeln der ganzen rationalen Functionen, welche als Nenner in den Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklung von $\frac{F(l, m+1, n+1, x)}{F(l, m, n, x)}$ auftreten, zu untersuchen. Ob diese Untersuchung auch für die imaginären Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zu einfachen Resultaten führt, vermag ich indessen nicht zu übersehen.

Königsberg in Pr., 30. November 1890.

---

*) „Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function". Math. Ann. Bd. 33.

Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.*)

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Peano hat kürzlich in den Mathematischen Annalen**) durch eine arithmetische Betrachtung gezeigt, wie die Punkte einer Linie stetig auf die Punkte eines Flächenstückes abgebildet werden können. Die für eine solche Abbildung erforderlichen Functionen lassen sich in übersichtlicherer Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient. Die abzubildende Linie — etwa eine Gerade von der Länge 1 — theilen wir zunächst in 4 gleiche Theile 1, 2, 3, 4 und das Flächenstück, welches wir in der Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge 1 annehmen, theilen wir durch zwei zu einander senkrechte Gerade in 4 gleiche Quadrate 1, 2, 3, 4 (Fig. 1). Zweitens theilen wir jede der Theilstrecken 1, 2, 3, 4 wiederum in 4 gleiche Theile, so dass wir auf der Geraden die 16 Theilstrecken 1, 2, 3, ..., 16 erhalten; gleichzeitig werde jedes der 4 Quadrate 1, 2, 3, 4 in 4 gleiche Quadrate getheilt und den so entstehenden 16 Quadraten

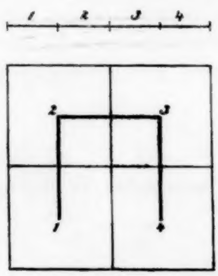


Fig. 1.

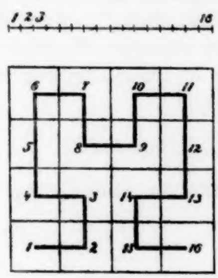


Fig. 2.

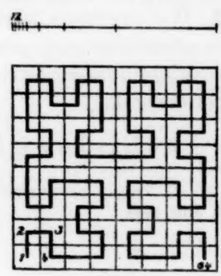


Fig. 3.

werden dann die Zahlen 1, 2 ... 16 eingeschrieben, wobei jedoch die Reihenfolge der Quadrate so zu wählen ist, dass jedes folgende Quadrat sich mit einer Seite an das vorhergehende anlehnt (Fig. 2). Denken wir uns dieses Verfahren fortgesetzt — Fig. 3 veranschaulicht den

*) Vergl. eine Mittheilung über denselben Gegenstand in den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Bremen 1890.

**) Bd. 36, S. 157.

nächsten Schritt —, so ist leicht ersichtlich, wie man einem jeden gegebenen Punkte der Geraden einen einzigen bestimmten Punkt des Quadrates zuordnen kann. Man hat nur nöthig, diejenigen Theilstrecken der Geraden zu bestimmen, auf welche der gegebene Punkt fällt. Die mit den nämlichen Zahlen bezeichneten Quadrate liegen nothwendig in einander und schliessen in der Grenze einen bestimmten Punkt des Flächenstückes ein. Dies sei der dem gegebenen Punkte zugeordnete Punkt. *Die so gefundene Abbildung ist eindeutig und stetig und umgekehrt einem jeden Punkte des Quadrates entsprechen ein, zwei oder vier Punkte der Linie.* Es erscheint überdies bemerkenswerth, dass durch geeignete Abänderung der Theillinien in dem Quadrate sich leicht *eine eindeutige und stetige Abbildung finden lässt, deren Umkehrung eine nirgends mehr als dreideutige ist.*

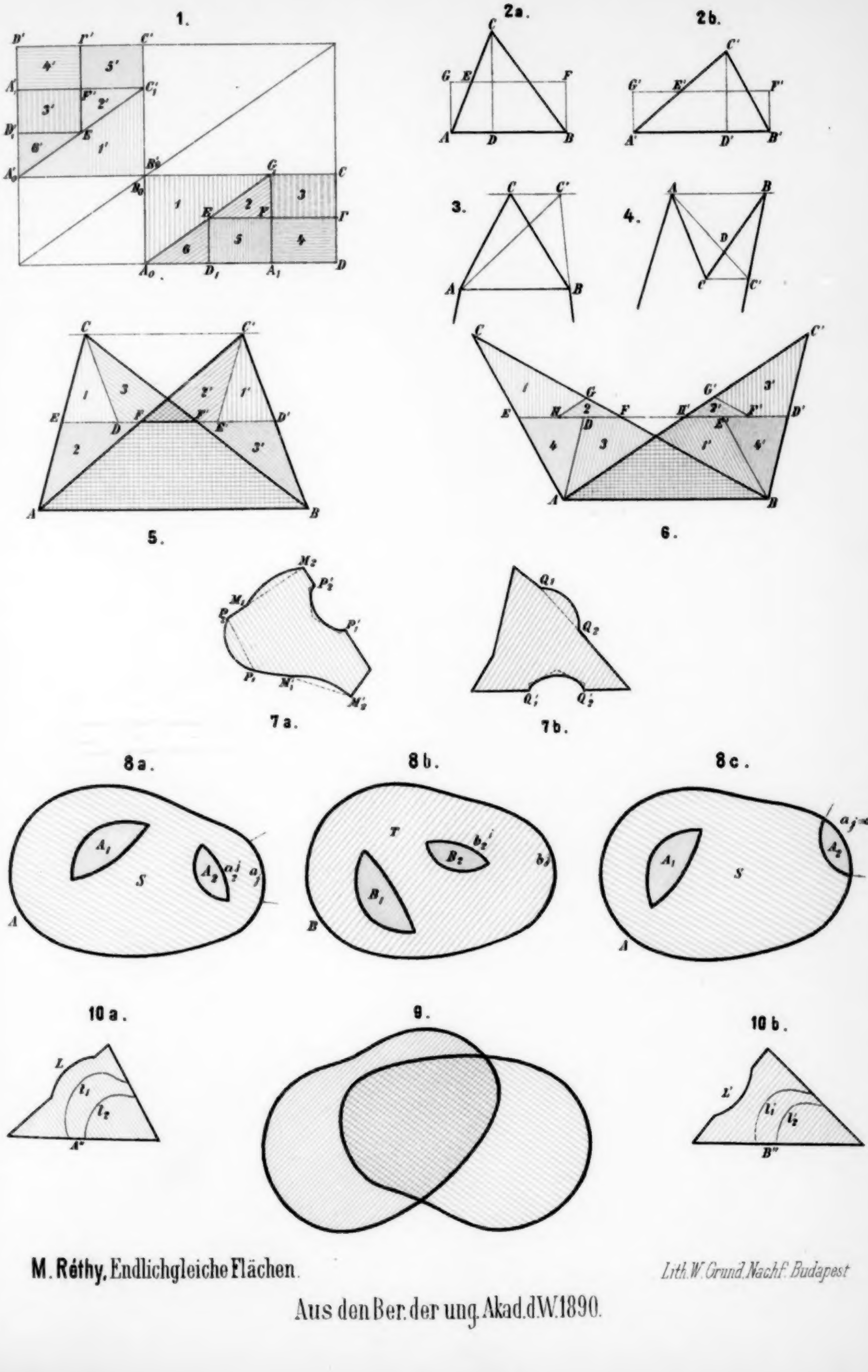
Die oben gefundenen abbildenden Functionen sind zugleich einfache Beispiele für überall stetige und nirgends differentiirbare Functionen.

Die mechanische Bedeutung der erörterten Abbildung ist folgende: *Es kann sich ein Punkt stetig derart bewegen, dass er während einer endlichen Zeit sämmtliche Punkte eines Flächenstückes trifft.* Auch kann man — ebenfalls durch geeignete Abänderung der Theillinien im Quadrate — zugleich bewirken, *dass in unendlich vielen überall dichtvertheilten Punkten des Quadrates eine bestimmte Bewegungsrichtung sowohl nach vorwärts wie nach rückwärts existirt.*

Was die analytische Darstellung der abbildenden Functionen anbetrifft, so folgt aus ihrer Stetigkeit nach einem allgemeinen von K. Weierstrass bewiesenen Satze*) sofort, dass diese Functionen sich in unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihen entwickeln lassen, welche im ganzen Intervall absolut und gleichmässig convergiren.

Königsberg i. Pr., 4. März 1891.

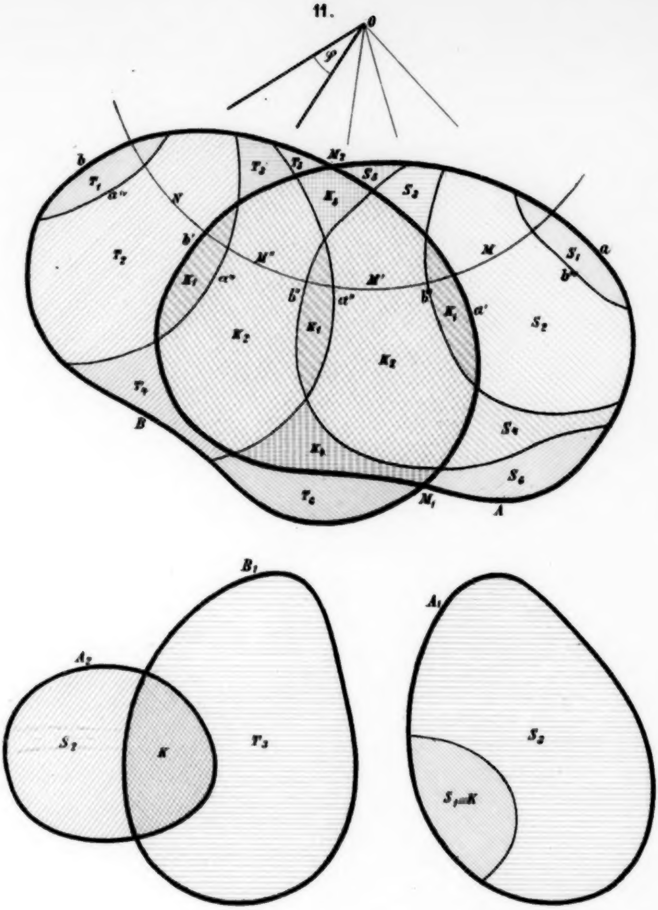
*) Vergl. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 9. Juli 1885.



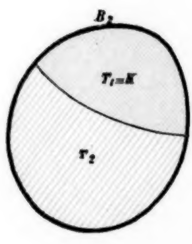
M. Réthy, Endlichgleiche Flächen. Lith. W. Grund. Nachf. Budapest

Aus den Ber. der ung. Akad. d. W. 1890.

11.



12.

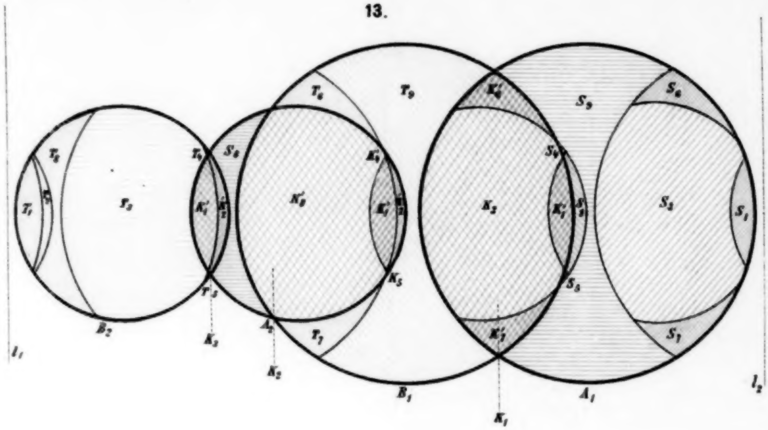


M. Réthy, Endlichgleiche Flächen.

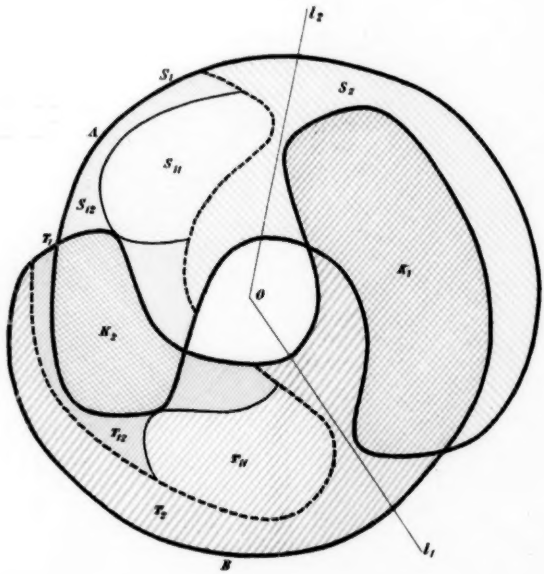
Lith. W. Grund. Nachf. Budapest

Aus den Ber. der ung. Akad. d. W. 1890

13.


T8
T9
T6
T4
S8
S6
S9
K'4
K4
S4
T1
T2
K'1
K'2
K'3
K'5
K2
K'1
S3
S1
T3
K5
S5
B2
K3
A2
T7
K'7
S7
l1
K2
B1
A1
l2
K1

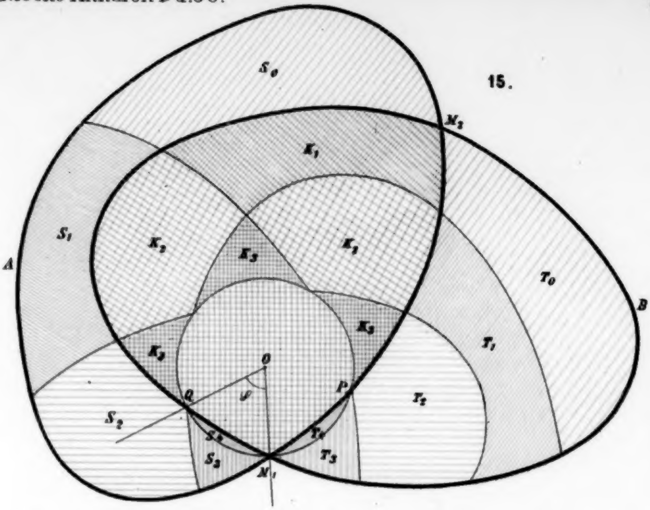
14.


l2
S1
S2
A
S11
S12
T1
K1
O
K2
T12
T11
T2
l1
B

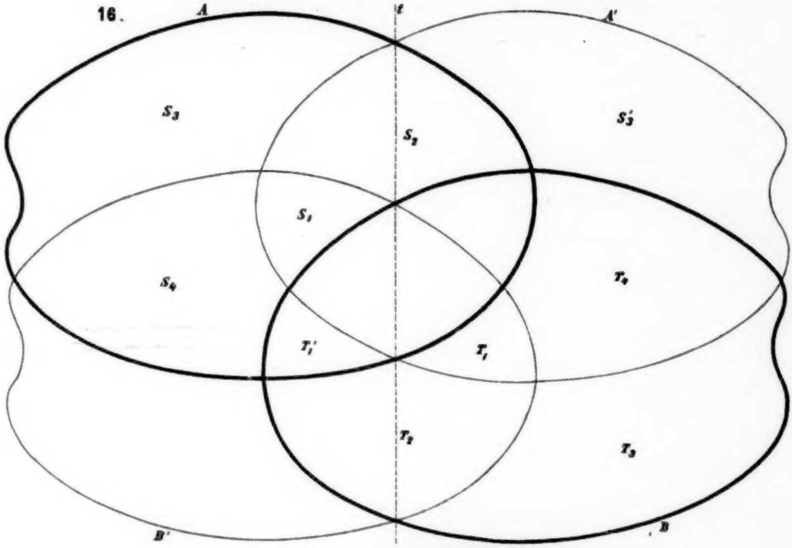
Mat

M.

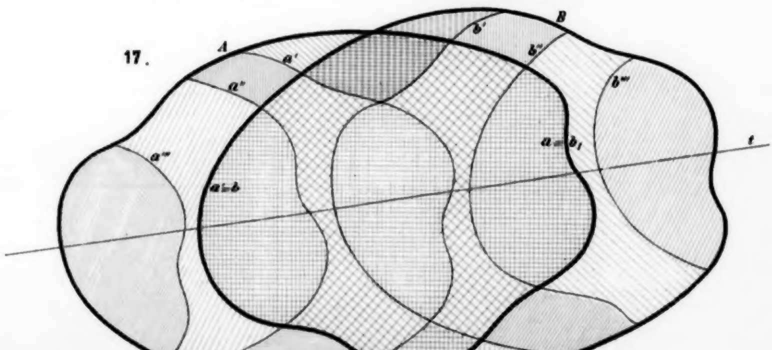
15.



16.



17.



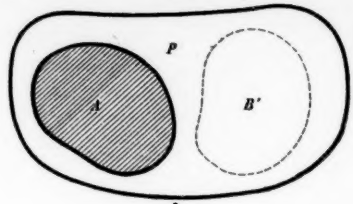
Lith. W. Grund. Nachf. Budapest

Aus den Ber. der ung. Akad. d. W. 1890.

Math

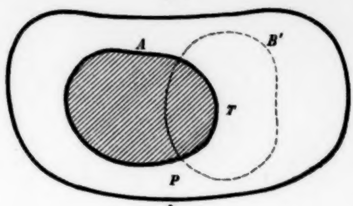
M.R

18.



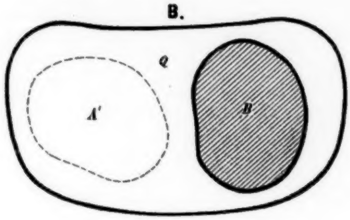
A.

19.

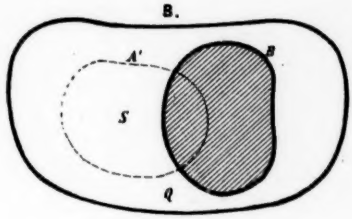


A.

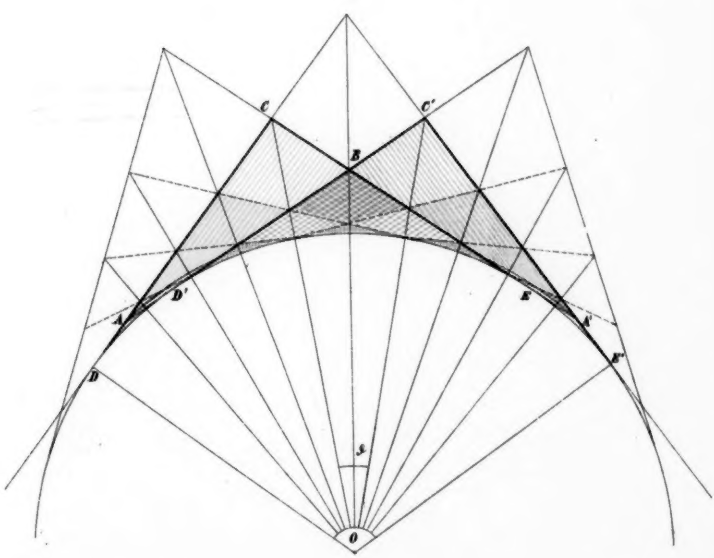
B.



B.



20.



M. Réthy, Endlichgleiche Flächen. Lith. W. Grund, Nachf. Budapest

Aus den Ber. der ung. Akad. d. W. 1890.

Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen.

(Zweite Abhandlung, mit einer Figurentafel).

Von

Robert Fricke in Berlin.

In meiner vorigen, unter dem gleichen Titel veröffentlichten Arbeit*) habe ich eine Reihe von Gruppen linearer Substitutionen untersucht, welche mit Hilfe eines von Herrn Poincaré herrührenden Princips gewonnen waren. Letzteres bestand darin, dass die fraglichen Gruppen zuvörderst als Gruppen ternärer ganzzahliger Substitutionen eines reellen ganzzahligen Kegelschnitts in sich eingeführt wurden; diese ternären Gruppen wurden dann erst hinterher vermöge einer charakteristischen Transformation in Gruppen linear-gebrochener Substitutionen *einer* Veränderlichen umgesetzt, welch' letztere Substitutionen dann freilich in ihren Coefficienten gewisse numerische Irrationalitäten aufwiesen. Die damals gewählte Darstellung möchte den Anschein erwecken, dass für die Erkennung des Charakters der in Rede stehenden Gruppen die ternäre Gestalt derselben das einzig durchsichtige Mittel abgäbe; und man könnte demnach glauben, dass die Ganzzahligkeit der ternären Substitutionen im Gegensatz zu der Irrationalität der anderen einen Vorzug jener begründe und das Operiren mit den letzteren als ungeeignet erscheinen liesse. Das ist ganz und gar nicht der Fall; man darf vielmehr behaupten, dass nur bei den lineargebrochenen Substitutionen der *einen* Variabelen das Bildungsgesetz der Coefficienten, sowie daraufhin die Gruppeneigenschaft der Substitutionen unmittelbar in Evidenz tritt. Bei den ternären Substitutionen haben wir für beide Gesichtspunkte nur in mittelbarer Weise die Thatsache zum Ersatz, dass durch die Substitutionen der einzelnen Gruppe eine gewisse quadratische Form in sich übergeführt wird. Wollte man aber von hieraus das arithmetische Bildungsgesetz der ternären Substitutionen explicite entwickeln, so würde dies in ein-

*) pag. 50 u. f. des vorliegenden Bandes.

fachster Weise eben nur unter Rückgang auf die andere Gestalt unserer Gruppen gelingen. In diesem Sinne kommt der Gebrauch der ternären Substitutionen mehr nur auf die Bedeutung eines heuristischen Princips zurück.

Um die hiermit entwickelten Behauptungen zu belegen, will ich unter den l. c. behandelten Gruppen diejenigen für $q = 4h - 1$ auf unmittelbare Weise arithmetisch definiren und für ihre Untersuchung das Fundament angeben. Die für $q = 4h + 1$ eintretenden Gruppen beanspruchen in Folge ihrer nahen Beziehung zur Modulgruppe (l. c. III, § 3) nicht ein gleich hohes Interesse, wie diejenigen für $q = 4h - 1$. Uebrigens werden durch die nachfolgenden Mittheilungen die l. c. III, § 2 (am Schlusse) aufgeworfenen Problemstellungen zur Erledigung gebracht.

I.

Directe arithmetische Definition der zu betrachtenden Gruppen.

Unter A, B, C, D verstehen wir Zahlen der Gestalt

$$A, B, C, D = \frac{a + b\sqrt{q}}{2}, \tag{1}$$

wo a, b, q rationale ganze Zahlen sind und insbesondere q eine positive Primzahl der Form $q = 4h - 1$ ist; $2A, 2B, \ldots$ stellen also beliebige ganze Zahlen des aus der Basis $(1, \sqrt{q})$ zu bildenden quadratischen Körpers dar. Unter $\overline{A}$, $\overline{B}, \ldots$ verstehe man die zu A bez. $B, \ldots$ conjugirte Zahl. Man lasse A, B alle Lösungen der unbestimmten Gleichung:

$$A\overline{A} + B\overline{B} = 1 \tag{2}$$

durchlaufen und bilde jeder der unendlich vielen Lösungen entsprechend die lineare Substitution der Variabelen ω:

$$S(\omega) = \frac{A\omega + B}{-\overline{B}\omega + \overline{A}}, \qquad A\overline{A} + B\overline{B} = 1. \tag{3}$$

Diese Substitutionen S bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe. Schreibt man nämlich

$$A = \frac{a + b\sqrt{q}}{2}, \qquad B = \frac{c + d\sqrt{q}}{2},$$

so nimmt die Gleichung (2) die Gestalt an:

$$a^2 + c^2 - q(b^2 + d^2) = 4, \tag{4}$$

welche modulo 4 reducirt zur folgenden Congruenz Anlass giebt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0, \text{ (mod. 4)}. \tag{5}$$

Wir schliessen: *Die vier Zahlen a, b, c, d der einzelnen Substitution S*

sind entweder alle gerade oder alle ungerade. Combiniren wir jetzt die beiden unter (3) begriffenen Operationen S und S', welcher letzteren die Zahlen

$$A' = \frac{a' + b'\sqrt{q}}{2}, \qquad B' = \frac{c' + d'\sqrt{q}}{2}$$

zukommen, so entspringt als neue Substitution:

$$(6) \qquad SS'(\omega) = \frac{(AA' - B\overline{B}')\,\omega + (AB' + B\overline{A}')}{(-\overline{B}A' - \overline{A}\overline{B}')\,\omega + (-\overline{B}B' + \overline{A}\overline{A}')}.$$

Hier bildet wieder der erste mit dem vierten Coefficienten ein Paar conjugirter Zahlen, wie auch der zweite und negativ genommene dritte. Setzen wir aber für die Coefficienten von (6) abkürzend:

$$(7) \qquad \begin{cases} AA' - B\overline{B}' = A'' = \dfrac{a'' + b''\sqrt{q}}{2}, \\ AB' + B\overline{A}' = B'' = \dfrac{c'' + d''\sqrt{q}}{2}, \end{cases}$$

so haben die hiermit eingeführten Grössen a'', b'', c'', d'' die Bedeutung:

$$(8) \qquad \begin{cases} 2a'' = aa' - cc' + q(bb' + dd'), \\ 2c'' = ac' + ca' + q(bd' - db'), \\ 2b'' = ab' + ba' + cd' - dc', \\ 2d'' = ad' + da' + bc' - cb'. \end{cases}$$

Auf Grund des an (5) geknüpften Satzes sind die rechten Seiten der vier Gleichungen (8) durchgängig gerade Zahlen und daher a'', b'', c'', d'' ganz. A'', B'' sind demnach Zahlen der Gestalt (1), und da überdies die Determinante von (6) gleich 1 ist, so subsumirt sich (SS') wirklich unter die durch (3) charakterisirten Substitutionen. Thatsächlich bilden daher die letzteren in ihrer Gesammtheit eine Gruppe, welche letztere wir fortan Γ_4 nennen wollen.

Den Substitutionen S reihen wir jetzt als zweite Kategorie die Substitutionen:

$$(9) \qquad T(\omega) = \frac{C\omega + D}{\overline{D}\,\omega - \overline{C}}, \qquad C\overline{C} + D\overline{D} = -1$$

an, wo C, D die Gesammtheit der Zahlen (1) durchlaufen sollen, welche die unter (9) rechts angehängte Gleichung befriedigen. Schreibt man ausführlich:

$$C = \frac{e + f\sqrt{q}}{2}, \qquad D = \frac{g + h\sqrt{q}}{2},$$

so folgt wieder wie vorhin:

$$(10) \qquad e \equiv f \equiv g \equiv h, \quad (\text{mod. } 2)$$

für die einzelne Substitution T, und daraufhin gewinnt man leicht die Sätze: Zwei Operationen T geben, mit einander combinirt, eine

Operation S; eine Operation S, mit einem T combinirt, liefert wieder eine Operation T:

(11) $$TT' = S,\quad ST = T',\quad TS = T',$$

wobei natürlich in der einzelnen dieser Gleichungen den gebrauchten Symbolen S, T eine nur für diese Gleichung gültige Bedeutung zukommt. Unmittelbare Folgerungen sind: *Die Operationen S und T zusammengenommen bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe Γ_2; innerhalb dieser Γ_2 ist Γ_4 eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei.*

Der blosse Anblick der Substitutionen

$$S(\omega) = \frac{\frac{a+b\sqrt{q}}{2}\,\omega + \frac{c+d\sqrt{q}}{2}}{\frac{-c+d\sqrt{q}}{2}\,\omega + \frac{a-b\sqrt{q}}{2}}$$

ergiebt uns die Möglichkeit, die Gruppe Γ_4 auf sich selbst zu beziehen; dies geschieht z. B. dadurch, dass wir in S die Zahlen b und d mit einander vertauschen und die so entspringende Operation S' der Γ_4 dem S entsprechen lassen. Zufolge (8) erhalten wir freilich solcherweise noch keinen Isomorphismus der Γ_4 mit sich selbst; jedoch gewinnen wir einen solchen, wie ein Blick auf (8) besagt, sobald wir statt einfacher Permutation von b und d vielmehr d an Stelle von b, aber $-b$ an Stelle von d setzen. Die bei solcher Gelegenheit stets eintretende Frage ist, ob man den solcherweise begründeten holoedrischen Isomorphismus durch Transformation der Γ_4 in sich vermöge einer Substitution U herstellen lassen. Ist dies der Fall, so würde die Transformation durch U^2 für die einzelne Substitution (3) offenbar nur einen Zeichenwechsel von b und d bedeuten:

(12) $$S''(\omega) = U^{-2} S U^2(\omega) = \frac{\bar{A}\omega + \bar{B}}{-\bar{B}\omega + \bar{A}},$$

und also müsste U^4, als mit allen Substitutionen S vertauschbar, die Identität sein. Die Wirkung der Transformation von S durch U^2 besteht nach Formel (12) darin, dass der erste und vierte, und desgleichen der zweite und dritte Coefficient permutirt werden, während die beiden letzteren bei der Permutation zugleich einen Zeichenwechsel erfahren. Diese Veränderung des S ist in der Theorie der Modulfunctionen sehr bekannt; sie wird nämlich dort durch die Transformation vermöge $U^2(\omega) = \frac{-1}{\omega}$ bewerkstelligt. Giebt es also überhaupt eine Substitution U, so kann dieselbe keine andere sein als

(13) $$U(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

oder die dazu inverse. Thatsächlich aber folgt:

$$S'(\omega) = U^{-1} S U(\omega) = \frac{A'\omega + B'}{-\overline{B}'\omega + \overline{A}'},$$

$$A' = \frac{A + \overline{A} + B - \overline{B}}{2} = \frac{a + d\sqrt{q}}{2},$$

$$B' = \frac{-A + \overline{A} + B + \overline{B}}{2} = \frac{c - b\sqrt{q}}{2},$$

so dass wirklich der gefundene Isomorphismus der Γ_4 *mit sich selbst durch die Transformation vermöge* U *bewerkstelligt wird.* Da zufolge dieser Ueberlegung stets $US = S'U$ ist, zugleich aber U^2 der Gruppe Γ_4 angehört, *so entspringt aus dieser* Γ_4 *durch Zusatz von* U *eine Gruppe* Γ_2', *innerhalb welcher* Γ_4 *eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei ist.* Diese Γ_2' enthält neben den Operationen S nun noch alle Operationen SU, die wir jetzt allgemein durch das Symbol U bezeichnen wollen. Ihre Gestalt ist:

$$(14) \qquad U(\omega) = \frac{\frac{A+B}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{-A+B}{\sqrt{2}}}{\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{\overline{A}+\overline{B}}{\sqrt{2}}}, \quad A\overline{A} + B\overline{B} = 1;$$

setzen wir also $A + B = E$, $-A + B = F$ und verstehen überhaupt hinfort unter E, F, G, H ganze Zahlen des Körpers $(1, \sqrt{q})$, so folgt:

$$(15) \qquad U(\omega) = \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{F}{\sqrt{2}}}{-\frac{\overline{F}}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{\overline{E}}{\sqrt{2}}}, \qquad E\overline{E} + F\overline{F} = 2.$$

Dass hier für die Γ_2' *alle* ganzzahligen Lösungen der rechts angehängten unbestimmten Gleichung zu nehmen sind, ist leicht bewiesen.

Auch die unter (9) gegebenen Operationen T werden vermöge der speciellen Substitution (13) in einander transformirt; setzen wir nämlich $T' = U^{-1} T U$, so entsteht T' aus T einfach dadurch, dass man g an Stelle von e und $-e$ an Stelle von g setzt. Indem wir aber alle Substitutionen T mit (13) combiniren, gelangen wir zu einer vierten Kategorie von Substitutionen, nämlich zu:

$$(16) \qquad V(\omega) = \frac{\frac{G}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{H}{\sqrt{2}}}{\frac{\overline{H}}{\sqrt{2}}\,\omega - \frac{\overline{G}}{\sqrt{2}}}, \qquad G\overline{G} + H\overline{H} = -2,$$

wobei G und H wieder alle ganzzahligen Lösungen der zugesetzten Gleichung durchlaufen müssen. *Nun aber bildet die Gesammtheit der Substitutionen* S, T, U, V *eine Gruppe* Γ, *welche die umfassendste*

Gruppe ist, zu der wir hier überhaupt gelangen; innerhalb derselben sind die drei voraufgehend genannten Gruppen Γ_μ ausgezeichnete Untergruppen des Index μ. Des näheren regelt sich die Combination der vier Arten von Substitutionen nach dem Schema:

$$TT' = S,\quad UU' = S',\quad VV' = S'',$$
$$TU = V',\quad UV = T',\quad VT = U',$$

woraus wir noch nebenher den Satz ablesen, dass sich die Γ bezüglich ihrer ausgezeichneten Untergruppe Γ_4 auf eine Vierergruppe reducirt.*)

Die Operationen U und V bringen als wesentlich neues Element die Irrationalität $\sqrt{2}$ in die Entwicklung; indessen charakterisirt sich die Aufnahme derselben durch die soeben durchlaufene Entwicklung als vollberechtigt. In der That erscheint das Aufsteigen von Γ_4 zu Γ deswegen als geboten, weil Γ_4 in Γ ausgezeichnet ist; und diese Bemerkung verdient um des willen noch besondere Beachtung, weil wir sogleich Γ zu einer erweiterten Gruppe $\bar{\Gamma}$ ausgestalten wollen, *welche letztere alsdann keineswegs mehr in einer umfassenderen Gruppe ausgezeichnet ist.* Wir werden diesen Satz freilich nur in den Anfangsfällen $q = 3, 7, 11, ..$ zum Nachweise bringen, weil wir nur für diese Fälle die Fundamentalbereiche für die Gruppen Γ ausführlich verfolgen wollen. Die in Rede stehende Eigenschaft von $\bar{\Gamma}$ (die sich natürlich auch rechnerisch belegen liesse) wird nämlich aus der Gestalt des Fundamentalbereichs von $\bar{\Gamma}$ aufs unmittelbarste evident; sie spricht sich da in dem Umstande aus, dass dieser Bereich durch keine andere ω-Substitution als die identische in sich überführbar ist.

Um die gemeinte Erweiterung von Γ auszuführen, stellen wir jetzt neben die Substitutionen *erster* Art (welche *directe* Kreisverwandtschaften bedeuten) auch noch diejenigen der zweiten Art (die *indirecte* Kreisverwandtschaften darstellen). Es entspringt der Satz, dass alle unsere Gruppen $\Gamma, \Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_4$ mit der Spiegelung an der imaginären ω-Axe: $\omega' = -\bar{\omega}$ vertauschbar sind: *Wir gewinnen demgemäss durch Zusatz dieser Operation vier erweiterte Gruppen $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_2', \bar{\Gamma}_4$, in deren einzelner die bezügliche ursprüngliche Gruppe ausgezeichnet vom Index enthalten zwei ist.* Die Operationen zweiter Art dieser Gruppen $\bar{S}, \bar{T}, \bar{U}, \bar{V}$ sind die folgenden:

$$(17)\qquad \bar{S}(\omega) = \frac{A\bar{\omega} - B}{-\bar{B}\bar{\omega} - \bar{A}},\qquad \bar{T}(\omega) = \frac{C\bar{\omega} - D}{\bar{D}\bar{\omega} + \bar{C}},\quad \text{etc.}$$

Eine andere Erweiterung unserer Gruppen durch eine Spiegelung als

*) Eine völlig symmetrische Betrachtungsweise würde daraufhin neben die beiden Gruppen Γ_2, Γ_2' eine mit ihnen coordinirte Γ_2'' zu setzen haben, die aus den Operationen S und V besteht. Dem Typus der Vierergruppe entsprechend sind aber $\Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_2''$ innerhalb Γ *nicht* gleichberechtigt.

die nun gewonnene giebt es im allgemeinen nicht, sofern wir nur solche Operationen zweiter Art zulassen wollen, welche Punkte ω der einzelnen Halbebene stets wieder in Punkte der *gleichen* Halbebene transformiren.*) Natürlich ist auch die vorhin unter dem Texte namhaft gemachte Gruppe Γ_2'' der Erweiterung durch $\omega' = -\omega$ fähig; wir haben so insgesammt für jedes q zehn arithmetisch wohlcharakterisirte Gruppen Γ_4, $\bar{\Gamma}_4$, $\Gamma_2^{(i)}$, $\bar{\Gamma}_2^{(i)}$, Γ, $\bar{\Gamma}$ gewonnen, die alle in der letzten unter ihnen, nämlich $\bar{\Gamma}$, ausgezeichnet enthalten sind.

Wir haben hier überall q als *positive* Primzahl der Form $(4h-1)$ vorausgesetzt; es ist der Mühe werth, dass wir zum Schluss noch darauf hindeuten, auf welches Resultat wir bei den negativen q geführt werden. Hier fallen erstlich die Substitutionen T und V aus, da es Lösungen der Gleichungen (9) und (16) nicht giebt. Ist weiter in $q = 4h - 1$ die Zahl $h \leqq -1$, so hat (4) nur die beiden Lösungen $a = 2$, $c = 0$ und $a = 0$, $c = 2$, während (15) gleichfalls nur zwei Lösungen hat, nämlich $E = 1$, $F = \pm 1$. Die Γ_2' der Operationen S und U ist demnach die aus (13) entspringende cyklische G_4, während Γ_4 ihre Untergruppe G_2 wird. Interessant aber gestaltet sich der nun allein noch übrig bleibende Fall $q = -1$: Da gewinnen wir erstlich als Γ_4 aus

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$$

die *Tetraedergruppe* G_{12} der 12 Operationen S:

$$\omega' = \pm\,\omega, \qquad \omega' = \frac{\pm 1}{\omega},$$

$$\omega' = \frac{\frac{1 \pm i}{2}\,\omega \pm \frac{1 \pm i}{2}}{\mp \frac{1 \mp i}{2}\,\omega + \frac{1 \mp i}{2}},$$

wobei man die Correspondenz der Vorzeichen leicht feststellen wird; weiter aber gewinnen wir entsprechend der Bedingung:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$$

zwölf Operationen U:

$$\omega' = \frac{\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}\,\omega}{\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}}, \qquad \omega' = \frac{\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}}{-\frac{1 \mp i}{\sqrt{2}}\,\omega}, \qquad \omega' = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega \mp \frac{1}{\sqrt{2}}}{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega + \frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ etc.},$$

welche die G_{12} zur *Oktaedergruppe* G_{24} ergänzen; diese letztere also ist es, welche für $q = -1$ unserer Γ_2' entspricht.

*) Man vergl. das Nähere in den „*Vorlesungen über die elliptischen Modulfunctionen*" p. 223 u. f.

II.

Aufstellung der in den Gruppen Γ und $\bar{\Gamma}$ enthaltenen elliptischen Substitutionen und Spiegelungen.

Für eine eingehende Untersuchung unserer Gruppen ist es ein erster Schritt, dass wir die in Γ und $\bar{\Gamma}$ enthaltenen Arten von Substitutionen angeben. Die hierzu nöthigen Begriffsbestimmungen und Methoden sind in den „*Vorlesungen über die Modulfunctionen*" Abschn. II, Cap. 1 allgemein entwickelt. Sollen wir vorab allein von den Substitutionen erster Art handeln (d. i. von denen der Gruppe Γ), so hängt die Unterart der einzelnen Substitution einzig von der Summe s des ersten und vierten Coefficienten ab:

$$(1) \qquad s = A + \bar{A}, \quad = C - \bar{C}, \quad = \frac{E + \bar{E}}{\sqrt{2}}, \quad = \frac{G - \bar{G}}{\sqrt{2}}$$

Diese Zahlen s haben die Gestalt:

$$s = m, \quad = m\sqrt{q}, \quad = m\sqrt{2}, \quad = m\sqrt{2q},$$

unter m ganze rationale Zahlen verstanden, und da $m = A + \bar{A} = 2$ in Folge der nicht statthaften Gleichung $c^2 - q(b^2 + d^2) = 0$ auszuschliessen ist, so entspringt als erster Satz: *Die Gruppe* Γ *enthält nur hyperbolische und elliptische Substitutionen.*

Die letzteren Substitutionen sind für uns zunächst die wichtigeren; wollen wir also vor allem sie aufstellen! Es kommen aber für elliptische Substitutionen die Werthe*)

$$(2) \qquad s = 0,\ 1,\ \sqrt{2}$$

in Betracht, die uns Substitutionen der Perioden zwei bez. drei und vier liefern. Der Fall $m\sqrt{2q}$ bleibt ganz ausser Betracht; $m\sqrt{q}$ kommt freilich für $q = 3$ mit $s = \sqrt{3}$ zur Geltung und liefert dort Substitutionen T_6 der Periode sechs**), indessen darf der particuläre Fall $q = 3$ durch die l. c. gegebene Entwicklung als erledigt angesehen werden. Indem wir ihn ausschliessen, hat q eine der vier Gestalten:

$$(3) \qquad q = 24h + 7,\ 11,\ 19,\ 23;$$

ihnen entsprechend werden wir sogleich eine vierfache Fallunterscheidung eintreten lassen müssen.

Für eine Substitution S ist s mit der oben durch a bezeichneten Zahl identisch; wir haben also die zwei Möglichkeiten $s = a = 0, 1$.

---

*) Offenbar brauchen wir negative s nicht besonders zu betrachten.

**) Der untere Index am Symbol einer Substitution mag immer deren Periode bedeuten.

$s = 0$ zieht $c^2 - q(b^2 + d^2) = 4$ nach sich, eine Gleichung, die durch die Substitution

(4) $$c = 2x, \quad dq = 2y, \quad bq = 2z$$

in die Gestalt:

(5) $$qx^2 - y^2 - z^2 = q$$

übergeht. *Ihr entsprechend finden wir eine Substitution der Periode zwei:*

(6) $$S_2\colon \quad A = \frac{z}{\sqrt{q}}, \quad B = x + \frac{y}{\sqrt{q}}\cdot$$

Hierbei kommen aber alle ganzzahligen Lösungen von (5) *zur Verwendung* (was auch bei den weiterhin folgenden analogen Gleichungen immer wieder der Fall ist, ohne dass es jedesmal besonders betont wird); denn für dieselben ist stets y und z durch q theilbar. Simultaner Zeichenwechsel von x, y, z führt die bezügliche Substitution hier und in der Folge stets in ihre inverse über. Der zweite Fall $s = a = 1$ zieht $c^2 - q(b^2 + d^2) = 3$ nach sich, was nur für $\left(\frac{3}{q}\right) = +1$ d. h. für $q = 24h + 11, 23$ möglich ist. Die Substitution

(7) $$c = x, \quad dq = y, \quad bq = z$$

liefert die Gleichung:

(8) $$qx^2 - y^2 - z^2 = 3q,$$

und wir finden solcherweise für $q = 24h + 11$, 23 *Substitutionen der Periode drei:*

(9) $$S_3\colon \quad 2A = 1 + \frac{z}{\sqrt{q}}, \quad 2B = x + \frac{y}{\sqrt{q}}\cdot$$

Bei den Substitutionen T kommt einzig $s = f\sqrt{q} = 0$ zur Geltung; wir erhalten $e^2 + g^2 - qh^2 = -4$ und daraus durch die Substitution

(10) $$h = 2x, \quad g = 2y, \quad e = 2z$$

die Gleichung

(11) $$qx^2 - y^2 - z^2 = 1,$$

welche für $q \equiv 7$, (mod. 8) nicht durch ganze Zahlen x, y, z befriedigt werden kann. *Für* $q = 24h + 11$, 19 *finden wir Substitutionen der Periode zwei:*

(12) $$T_2\colon \quad C = z, \quad D = y + x\sqrt{q}.$$

Es folgen die Substitutionen U, bei denen wir $s = 0, \sqrt{2}$ zu verwenden haben; $s = 0$ liefert $c^2 - q(b^2 + d^2) = 2$, was $\left(\frac{2}{q}\right) = +1$ erfordert. Wir bringen diese Gleichung durch die Substitution

(13) $$c = x, \quad dq = y, \quad bq = z$$

auf die Gestalt

(14) $$qx^2 - y^2 - z^2 = 2q$$

und finden solcherweise für $q = 24h + 7$, 23 *elliptische Substitutionen der Periode zwei:*

$$(15)\qquad U_2\colon\quad E = \frac{z}{\sqrt{q}}, \quad F = x + \frac{y}{\sqrt{q}}.$$

Der zweite Fall $s = \sqrt{2}$ liefert $c^2 - q(b^2 + d^2) = 1$ und vermöge der Substitution:

$$(16)\qquad c = x, \quad dq = y, \quad bq = z$$

$$(17)\qquad qx^2 - y^2 - z^2 = q.$$

Es entspringen elliptische Substitutionen der Periode vier:

$$(18)\qquad U_4\colon\quad E = 1 + \frac{z}{\sqrt{q}}, \quad F = x + \frac{y}{\sqrt{q}},$$

durch deren Wiederholung die unter (6) genannten $S_2 = U_4^2$ wiedergewonnen werden.

Letzten Endes kommen noch die V mit $s = 0$ und

$$e^2 + g^2 - qh^2 = -2,$$

was nach der Substitution

$$(19)\qquad h = x, \quad g = y, \quad e = z,$$

$$(20)\qquad qx^2 - y^2 - z^2 = 2$$

liefert; *es folgen elliptische Substitutionen der Periode zwei:*

$$(21)\qquad V_2\colon\quad G = z, \quad H = y + x\sqrt{q}.$$

Unter den Operationen zweiter Art der erweiterten $\bar\Gamma$ interessiren in erster Linie die Spiegelungen; dieselben haben verschwindende Summe des ersten und vierten Coefficienten (cf. I, (17)):

$$(22)\qquad \bar s = A - \bar A, \quad = C + \bar C, \quad = \frac{E - \bar E}{\sqrt{2}}, \quad = \frac{G + \bar G}{\sqrt{2}} = 0.$$

Der erste Fall ergiebt $a^2 + c^2 - qd^2 = 4$ und also vermöge der Substitution

$$(23)\qquad d = 2x, \quad c = 2y, \quad a = 2z,$$

$$(24)\qquad qx^2 - y^2 - z^2 = -1.$$

Es entspringt die Spiegelung

$$(25)\qquad \bar S_2\colon\quad A = z, \quad B = y + x\sqrt{q}$$

mit dem Symmetriekreise ($\omega = X + iY$):

$$(26)\qquad (y - x\sqrt{q})(X^2 + Y^2) + 2zX - (y + x\sqrt{q}) = 0.$$

Der zweite Fall (22) würde, wie man leicht bemerkt, $\left(\frac{-1}{q}\right) = +1$ erfordern und kommt also nicht zur Geltung. Im dritten Falle ist $a^2 + c^2 - qd^2 = 2$, und wir gewinnen weiter

$$(27)\qquad d = x,\quad c = y,\quad a = z,$$

$$(28)\qquad qx^2 - y^2 - z^2 = -2,$$

sowie die Spiegelung

$$(29)\qquad \overline{U}_2:\quad E = z,\quad F = y + x\sqrt{q},$$

deren Symmetriekreis wieder die Gleichung (26) besitzt. Endlich haben wir im letzten Falle (22) die Gleichung $g^2 - q(f^2 + h^2) = -2$, welche offenbar $\left(\frac{-2}{q}\right) = +1$ erfordert. Indem wir weiter:

$$(30)\qquad g = x,\quad fq = z,\quad hq = y$$

substituiren, entspringt die Gleichung

$$(31)\qquad qx^2 - y^2 - z^2 = -2q,$$

und wir finden solcherweise für $q = 24h + 11$, 19 *eine letzte Gattung von Spiegelungen:*

$$(32)\qquad \overline{V}_2:\quad G = \frac{z}{\sqrt{q}},\quad H = x + \frac{y}{\sqrt{q}},$$

deren Symmetriekreise wiederum die Gleichung (26) besitzen. Natürlich sind hier wieder alle ganzzahligen Lösungen der Gleichungen (24), (28), (31) heranzuziehen.

Fassen wir zum Schluss des Ueberblicks halber noch tabellarisch zusammen, welche Substitutionen in dem einzelnen der vier unterschiedenen Fälle eintreten können:

$$(33)\qquad \begin{cases} q = 24h + 7: & S_2,\ U_2,\ U_4,\ V_2,\ \overline{S}_2,\ \overline{U}_2, \\ q = 24h + 11: & S_2,\ S_3,\ T_2,\ U_4,\ V_2,\ \overline{S}_2,\ \overline{U}_2,\ \overline{V}_2, \\ q = 24h + 19: & S_2,\ T_2,\ U_4,\ V_2,\ \overline{S}_2,\ \overline{U}_2,\ \overline{V}_2, \\ q = 24h + 23: & S_2,\ S_3,\ U_2,\ U_4,\ V_2,\ \overline{S}_2,\ \overline{U}_2. - \end{cases}$$

Die Aufstellung der hyperbolischen, die genauere Untersuchung aller Substitutionen, insbesondere ihre Gleichberechtigung muss hier für den allgemeinen Fall q zunächst unerörtert bleiben. Es scheint, dass in letzterem Betracht die Theorie der quadratischen Formen:

$$(34)\qquad \begin{cases} B + (A - \overline{A})\omega + \overline{B}\omega^2, \\ D + (C + \overline{C})\omega - \overline{D}\omega^2 \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

bei zweckmässiger Fassung des Aequivalenzbegriffs für unsere Gruppen Γ, $\overline{\Gamma}$ eine ähnliche Bedeutung gewinnt, wie die Theorie der gewöhnlichen quadratischen Formen für die Modulgruppe.*)

*) Ich gedenke hier noch der innigen Beziehung, in welcher die Entwicklung des Textes zu den Untersuchungen steht, welche Hr. Bianchi im vorliegenden Annalenbande über Substitutionsgruppen mit complexen Coefficienten veröffentlicht, (vergl insbesondere die bei den indefiniten Hermite'schen Formen auftretenden

III.

Methode die Fundamentalbereiche der Gruppen Γ zu construiren.

Bei der Angabe von Fundamentalpolygonen für die gewonnenen Gruppen bleiben durchaus die Gesichtspunkte meiner anfangs citirten Arbeit in Geltung. Alles beruht darauf, dass man damit beginnt, Fundamentalbereiche für die durch Spiegelungen erweiterten Gruppen zu construiren, und hierbei ist es der weitaus wichtigste Theil der Untersuchung, die Eintheilung der ω-Halbebene in Erfahrung zu bringen, wie sie durch die Symmetriekreise:

$$(1) \qquad (y - x\sqrt{q})(X^2 + Y^2) + 2zX - (y + x\sqrt{q}) = 0$$

der in $\bar{\Gamma}$ enthaltenen Spiegelungen geleistet wird. Für die Auffindung der Symmetriekreise kommt (gerade wie l. c.) der Umstand in Betracht, dass der Schnittpunkt zweier solcher Kreise stets den Fixpunkt für eine der Γ angehörende elliptische Substitution liefert, wobei der von den Kreisen gebildete Winkel aus der Periode der betreffenden elliptischen Substitution sofort angebbar ist. Umgekehrt kann man also auch auf einem gerade vorliegenden Kreise nach Fixpunkten elliptischer Substitutionen suchen und von da aus unter Rücksicht auf die Perioden der letzteren auf weiter sich anreihende Kreise schliessen. Wenn es auf diese Weise gelingt, ein solches System von Symmetriekreisen (1) ausfindig zu machen, das im Innern der positiven Halbebene ein Kreisbogenpolygon einschliesst, so ist damit die gesuchte Eintheilung der Halbebene bereits hinreichend charakterisirt; in der That werden wir ja nun die gesammte Ueberdeckung der Halbebene von jenem Polygone aus nach dem Symmetrieprincip herstellen.

Für die Fälle $q = 3, 7, 11$ sind die bezüglichen Eintheilungen der Halbebene bereits l. c. angegeben und in den Figuren 2, 4 und 5 der damals beigegebenen Tafel gezeichnet. *Der Fall* $q = 3$ *ergab Kreisbogendreiecke mit den Winkeln* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$, *der Fall* $q = 7$ *Kreisbogenvierecke der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$, *endlich* $q = 11$ *wieder Kreisbogenvierecke der Winkel* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Ob nun das einzelne dieser Polygone P bereits Fundamentalraum für die bezügliche Gruppe $\bar{\Gamma}$ ist oder nicht, ist durch eine weitere leicht durchführbare Untersuchung festzustellen. Wir schliessen wie folgt: Bei Transformation der $\bar{\Gamma}$ durch eine ihrer eigenen Substitutionen werden ihre Spiegelungen unter einander permutirt. Geometrisch betrachtet besagt dies, dass die

---

automorphen Gruppen). Diese Abhandlung des Hrn. Bianchi schliesst sich an dessen Note „*Sui gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti interi complessi*" (Rendiconti della r. Acc. dei Lincei, April 90) an. [April 91].

Polygontheilung durch jede Operation von $\bar{\Gamma}$ in sich transformirt wird. Jenes einzelne Polygon P wird dabei entweder in ein anderes Polygon der Theilung oder in sich selbst transformirt, und letzteres sei im speciellen durch μ unterschiedene Substitutionen der $\bar{\Gamma}$ möglich. Dann folgt ersichtlich: *P ist Fundamentalraum einer in $\bar{\Gamma}$ enthaltenen ausgezeichneten Untergruppe $\bar{\Gamma}_\mu$ des Index μ.* Nun aber lässt sich evidenter Weise das Dreieck $(q=3)$, sowie das Viereck $(q=11)$ nur durch die *eine* Substitution $\omega'=\omega$ in sich transformiren, während das Viereck $(q=7)$ als ungleichseitiges Parallelogramm insgesammt *zwei* Transformationen in sich zulässt. Da aber im letzten Falle beide bezügliche Substitutionen der $\bar{\Gamma}$ angehören, so ist $\mu=2$ für $q=7$, dagegen $\mu=1$ für $q=3$ und $q=11$. *Für $q=3$, 11 haben wir also direct im Dreieck bez. Viereck einen Fundamentalbereich für $\bar{\Gamma}$, für $q=7$ entspringt derselbe erst durch die bereits l. c. Fig. 4 angedeutete Hälftung des Kreisbogenvierecks**).

Um den Erörterungen des vorigen Paragraphen noch ausgedehnter Rechnung zu tragen, möge auch noch für $q=19$ und 23 die Gestalt der Eintheilung der Halbebene und des Fundamentalpolygons der $\bar{\Gamma}$ entwickelt werden; wir haben dann für alle Fälle (3) II je ein Beispiel gebracht. Man stelle zu dem Ende vorab die Fixpunkte der elliptischen Substitutionen der Γ fest und findet für dieselben:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} U_4,\ S_2: & \omega_0=\dfrac{z+i\sqrt{q}}{x\sqrt{q}-y}, & qx^2-y^2-z^2=q\ , \\ S_3: & \omega_0=\dfrac{z+i\sqrt{3q}}{x\sqrt{q}-y}, & qx^2-y^2-z^2=3q, \\ T_2: & \omega_0=\dfrac{z+i}{x\sqrt{q}-y}, & qx^2-y^2-z^2=1\ , \\ U_2: & \omega_0=\dfrac{z+i\sqrt{2q}}{x\sqrt{q}-y}, & qx^2-y^2-z^2=2q, \\ V_2: & \omega_0=\dfrac{z+i\sqrt{2}}{x\sqrt{q}-y}, & qx^2-y^2-z^2=2\ . \end{array}\right.$$

Es sind hierbei die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen im vollen Umfange beibehalten, nur dass das Vorzeichen der Zahl z gewechselt

*) Zugleich erledigt sich hiermit die obige Behauptung, dass unsere Gruppen nicht in einer noch umfassenderen Gruppe ausgezeichnet enthalten sind: In der That gehört jede Substitution, welche die Polygontheilung in sich transformirt, der Gruppe $\bar{\Gamma}$ an, u. s. w. Die gegen Ende meiner vorigen Arbeit aufgeworfene Frage beantwortet sich aber so: Die damaligen Gruppen $\Gamma^{(q)}$, $\bar{\Gamma}^{(q)}$ sind direct identisch mit den jetzigen Γ, $\bar{\Gamma}$, wodurch denn von den ω-Substitutionen aus für die ternäre Gestalt der $\Gamma^{(q)}$, $\bar{\Gamma}^{(q)}$ übersichtliche Bildungsgesetze entspringen.

ist. Die x, y, z müssen jedesmal alle ganzzahligen Lösungen der beigeschriebenen Gleichung durchlaufen, wobei wir aber das Vorzeichen einer der drei Zahlen x, y, z willkürlich wählen dürfen. Damit ω_0 der positiven Halbebene angehört, wählen wir das Zeichen von x, sowie dasjenige der Quadratwurzeln in (2) positiv. Dann geben für die einzelne Lösung die verschiedenen Zeichencombinationen $\pm y$, $\pm z$ noch vier Punkte ω_0, welche offenbar durch die zu $\omega_0 = i$ gehörende U_4 aus einander hervorgehen. Wenn wir also auch y und z stets positiv nehmen wollen, so werden wir in demjenigen vierten Theile der positiven ω-Halbebene operiren, der rechts von der imaginären Axe und ausserhalb des Einheitskreises liegt.

Führen wir die so vorbereitete Untersuchung für $q = 19$ wirklich durch, so entspringt als Eintheilung der ω-Halbebene die in Fig. 1 der beigegebenen Tafel charakterisirte Sechsecktheilung, welche man sich nach dem Symmetrieprincip weiter fortgesetzt denken möge. Das Ausgangssechseck besitzt folgende Eckpunkte (die den Nummern 1 bis 6 in der Figur entsprechen):

$$(3)\begin{cases} 1)\ U_4,\ \omega_0 = i, & 2)\ V_2,\ \omega_0 = \dfrac{(13+3\sqrt{19})i}{\sqrt{2}}, \\ 3)\ T_2,\ \omega_0 = \dfrac{1+i}{3\sqrt{19}-13}, & 4)\ U_4,\ \omega_0 = \dfrac{\sqrt{19}+i}{18-4\sqrt{19}}, \\ 5)\ V_2,\ \omega_0 = \dfrac{5+i\sqrt{2}}{2\sqrt{19}-7}, & 6)\ T_2,\ \omega_0 = \dfrac{3+i}{\sqrt{19}-3}; \end{cases}$$

es ist hierbei jedesmal die Art der zugehörigen Substitution gleich angegeben. Für die Symmetriekreise, welche die Ecken verbinden, und die zugehörigen Spiegelungen aber erhalten wir:

$$(4)\begin{cases} (1,2), & \overline{S}_2, & X = 0, \\ (2,3), & \overline{V}_2, & (3\sqrt{19}-13)(X^2+Y^2)-(3\sqrt{19}+13) = 0, \\ (3,4), & \overline{U}_2, & (3\sqrt{19}-13)(X^2+Y^2)-4X+(3\sqrt{19}+13) = 0, \\ (4,5), & \overline{S}_2, & (4-\sqrt{19})(X^2+Y^2)+4X-(4+\sqrt{19}) = 0, \\ (5,6), & \overline{V}_2, & (6-\sqrt{19})(X^2+Y^2)-2\sqrt{19}X+(6+\sqrt{19}) = 0, \\ (6,1), & \overline{U}_2, & X^2+Y^2-2X-1 = 0. \end{cases}$$

Sprechen wir hiernach vor allem den Satz aus: *Für $q = 19$ leisten die drei dortselbst eintretenden Gattungen von Symmetriekreisen* (1) *eine Eintheilung der gesammten Halbebene in Kreisbogensechsecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, die alle aus dem durch* (4) *gegebenen Sechseck nach dem Symmetrieprincip entstehen.*

Es tritt nunmehr die Frage ein, ob das Sechseck (4) ausser der Identität noch durch eine weitere ω-Substitution in sich transformirbar ist. Es kann aber ersichtlich nur noch eine elliptische Substitution der Periode zwei in Frage kommen, welche die einzelne Seite unseres Sechsecks in die gegenüberliegende transformiren müsste. Man verbinde also die gegenüberliegenden Eckpunkte des Sechsecks jeweils durch einen solchen Kreis, der auf der reellen ω-Axe senkrecht steht. Das Innere des Sechsecks wird dergestalt von drei Bogen durchsetzt, welche wir als Diagonalen desselben bezeichnen werden. Eine erste Bedingung für die Existenz einer fraglichen Substitution der Periode zwei ist dann die, dass sich jene drei Diagonalen in *einem* Punkte schneiden. Solches trifft nun, wie in der Figur angedeutet ist, thatsächlich zu, und wir finden als Schnittpunkt der Diagonalen:

$$\omega_0 = \frac{1 + i\sqrt{2}}{\sqrt{19} - 4}, \tag{5}$$

welch' letzterer Punkt wirklich Fixpunkt einer in der Gruppe Γ *enthaltenen Substitution* V_2 *ist.* Das Fundamentalpolygon der $\overline{\Gamma}$ entspringt also, wie bei $q = 7$, erst durch Hälftung jenes Sechsecks, und wir vollführen dies zweckmässig etwa durch die Diagonale, welche die Eckpunkte 3 und 6 verbindet. *Indem wir etwa die linke Hälfte, d. i. das Viereck der Ecken* 1, 2, 3, 6 *zum Polygon der* $\overline{\Gamma}$ *nehmen, wird diese Gruppe aus drei Spiegelungen* $\overline{U}_2$, $\overline{S}_2$, $\overline{V}_2$ *und einer elliptischen* V_2 *erzeugbar sein.*

Spiegeln wir dieses Viereck etwa an der imaginären ω-Axe und fügen ihm das Spiegelbild an, so entspringt ein Fundamentalbereich für die Gruppe Γ. Diese Gruppe besitzt demgemäss als System von Erzeugenden eine U_4 und drei V_2; sie ist überdies vom Geschlechte $p = 0$, was für die Theorie der für $q = 19$ eintretenden Formen II (34) die nämliche Bedeutung besitzt, wie die Existenz der Modulfunction $J(\omega)$ für die gewöhnlichen quadratischen Formen. Neu gegenüber den voraufgehenden Fällen $q = 3, 7, 11$ ist die Thatsache, dass die elliptischen Substitutionen V_2 nicht mehr eine, sondern vielmehr *drei* unter einander nicht gleichberechtigte Classen bilden, von denen freilich zwei innerhalb der erweiterten $\overline{\Gamma}$ gleichberechtigt werden.

Für $q = 23$ kommen zufolge der Tabelle II (33) nur die beiden Gattungen $\overline{S}_2$ und $\overline{U}_2$ von Spiegelungen in Betracht, und man findet, *dass die zugehörigen Symmetriekreise eine Eintheilung der ω-Halbebene in Kreisbogensechsecke der Winkel* $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ *leisten* (cf. Fig. 2). Das Ausgangssechseck (in der Fig. durch Nummern 1 bis 6 bezeichnet) besitzt zu Ecken die folgenden Fixpunkte elliptischer Substitutionen:

$$(6)\begin{cases} 1)\; U_4,\; \omega_0 = i, & ,\quad 4)\; U_4,\; \omega_0 = \dfrac{6\sqrt{23}+i}{91-18\sqrt{23}}, \\ 2)\; U_2,\; \omega_0 = \dfrac{i\sqrt{2}}{5-\sqrt{23}} & ,\quad 5)\; U_2,\; \omega_0 = \dfrac{3\sqrt{23}+i\sqrt{2}}{41-8\sqrt{23}}, \\ 3)\; S_3,\; \omega_0 = \dfrac{5\sqrt{23}+i\sqrt{3}}{85-17\sqrt{23}}, & \quad 6)\; S_3,\; \omega_0 = \dfrac{\sqrt{23}+i\sqrt{3}}{7-\sqrt{23}}. \end{cases}$$

Die Grenzkreise des Sechsecks aber sind gegeben durch:

$$(7)\begin{cases} (1,2), & \overline{S}_2, & X = 0, \\ (2,3), & \overline{U}_2, & (5-\sqrt{23})(X^2+Y^2)-(5+\sqrt{23}) = 0, \\ (3,4), & \overline{U}_2, & (55-12\sqrt{23})(X^2+Y^2)+34X-(55+12\sqrt{23}) = 0, \\ (4,5), & \overline{S}_2, & (27-6\sqrt{23})(X^2+Y^2)+20X-(27+6\sqrt{23}) = 0, \\ (5,6), & \overline{U}_2, & (4-\sqrt{23})(X^2+Y^2)+6X-(4+\sqrt{23}) = 0, \\ (6,1), & \overline{U}_2, & X^2+Y^2-2X-1 = 0. \end{cases}$$

Elliptische V_2 sind, wie man sieht, hier noch gar nicht vertreten. Man wird demnach sofort vermuthen, dass unsere Sechsecke Mittelpunkte haben, und dass diese die Fixpunkte der V_2 liefern. Dem ist in der That so, und wir finden den Mittelpunkt des Sechsecks (7) als

$$(8)\qquad \omega_0 = \frac{3+i\sqrt{2}}{2\sqrt{23}-9},$$

der wirklich Fixpunkt für eine in Γ enthaltene V_2 ist. *Gerade wie bei $q = 19$ erhalten wir also einen Fundamentalbereich für $\overline{\Gamma}$ erst durch Halbirung des Sechsecks* (*cf. Fig.* 2). Die weiter sich anreihenden Bemerkungen wird man aus dem Anblick der Figur ohne jede Mühe ergänzen.

Auf die mannigfachen Sätze und Gesichtspunkte, welche für die Zahlentheorie der Formen II (34) aus diesen Resultaten entspringen, hoffe ich bald zurückkommen zu können. Auch ist es nicht unmöglich, dass eine systematische Betrachtung jener Formen für die Verallgemeinerung unserer soeben durchgeführten Ueberlegungen neue Principien ergiebt.

Berlin, den 7. Januar 1891.

Ueber das Problem der Nachbargebiete.

Von

L. Heffter in Giessen.

Einleitung.

Wenn wir eine Gruppe von Gebieten auf einer Oberfläche, deren jedes an alle andern grenzt und zwar je längs einer Linie, nicht nur in Punkten, *„Nachbargebiete“* und — in dualistischer Uebertragung — eine Gruppe von Punkten auf einer Oberfläche, deren jeder mit allen andern durch einander nicht schneidende Linien auf der Oberfläche verbunden ist, *„Nachbarpunkte“* nennen, so ist das Problem, dem die folgenden Untersuchungen gewidmet sind, dieses:

„ *Welches ist der Minimalwerth des Geschlechtes*) einer Oberfläche, die eine gegebene Anzahl von Nachbargebieten* (bezw. *Nachbarpunkten*) *zulässt?*“ und umgekehrt:

„*Welches ist die Maximalzahl der Nachbargebiete* (bezw. *Nachbarpunkte*) *auf einer Fläche von gegebenem Geschlecht?*“

In der Litteratur war diese Frage bis vor Kurzem noch kaum berührt worden. Baltzer**) hatte in dem Möbius'schen Nachlass eine Notiz von Möbius' Freund Weiske gefunden, die den Satz enthielt: „Fünf spatia confinia (Nachbargebiete) sind unmöglich in einer Fläche“, der richtig ist, wenn man unter „Fläche“ nur eine solche vom Geschlecht Null versteht. Baltzer identifizirt diesen Satz geradezu mit dem bekannten Vier-Farben-Problem, für dessen Beweis derselbe in der That nothwendig, aber nicht ohne Weiteres als hinreichend zu erkennen ist, und Herr Dingeldey***) hat sich neuerdings diesem Ausspruch angeschlossen. — Ausserdem hatte nur noch

---

*) Ueber die Bedeutung, in welcher das Wort *„Geschlecht“* hier stets gebraucht wird, vergl. die Bemerkung am Schluss der Einleitung.

**) Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske, Ber. d. math.-phys. Classe d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 12. Januar 1885.

***) F. Dingeldey, Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde. Leipzig, 1890.

Herr Kempe*) in einem Aufsatz über das Vier-Farben-Problem beiläufig bemerkt, auf einer Fläche wie der Oberfläche eines Ringes würden 6 Farben nothwendig sein, da er auf einer solchen 6 Nachbargebiete construiren konnte, während es übrigens, wie wir sehen werden, deren 7 giebt. Von ihm rührt auch (a. a. O. p. 200) der Gedanke her, solchen Problemen eine dualistische Fassung zu geben, wie sie oben schon benutzt wurde.

Endlich hat ganz kürzlich Herr Heawood**) das Farbenproblem für Flächen von beliebigem Geschlecht behandelt. Er hat einmal gezeigt, dass der erwähnte Kempe'sche Beweis eine Lücke hat, und sodann bewiesen, dass für alle Flächen, deren Geschlecht grösser als Null, die Maximalzahl von Nachbargebieten, die auf einer solchen Fläche *nicht überstiegen werden kann*, mit der aus andern Gründen sicher hinreichenden Zahl erforderlicher Farben zusammenfällt. Damit wäre also sowohl das Problem, mit dem wir uns jetzt befassen wollen, als auch das Farbenproblem für Flächen aller Geschlechter, die grösser als Null, endgültig erledigt, wenn nicht — abgesehen von dem Fall dass das Geschlecht gleich Eins — bei Herrn Heawood der Nachweis fehlte, dass auf einer Fläche beliebigen Geschlechtes jene Maximalzahl von Nachbargebieten auch thatsächlich auftritt. Denn ohne diesen Nachweis steht ja nicht fest, dass jene beiden Zahlen wirklich zusammenfallen; es könnte ja sein, dass es thatsächlich weniger Nachbargebiete auf einer Fläche giebt als die Maximalzahl der *höchstens* möglichen beträgt. Diese Lücke ist aber eine wesentliche; denn der fehlende Nachweis liegt keineswegs auf der Hand.

In Anbetracht dieser Umstände und da ausserdem die aufgeworfene Frage wohl auch abgesehen vom Farbenproblem ein selbständiges Interesse hat und vielleicht zu anderweitigen Anwendungen geeignet werden könnte, dürfte es gestattet sein, eine eingehende Untersuchung über dieses Problem zu veröffentlichen, auch wenn damit noch keine erschöpfende Lösung erzielt wird.

Der Inhalt der folgenden Paragraphen ist kurz der folgende. Um die Untersuchung auf geschlossene Flächen beschränken zu können, wird zunächst (§ 1) eine Beziehung zwischen dem Geschlecht, der Randcurvenzahl und dem Zusammenhang einer Fläche hergeleitet, die zwar schon implicite in einer von Herrn Dyck gegebenen Formel enthalten ist, auch auf andere Art leicht herzuleiten wäre, jedoch bei ihrer Ableitung hier zur Einführung gewisser Curven auf einer Fläche Anlass giebt, deren Eigenschaften noch nicht bemerkt zu sein scheinen. —

---

*) American Journal of Mathematics, Bd. II, (1882) p. 193.

**) Map-Colour Theorem. Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. No. 96. June 1890.

Nach Begründung der schon beim Ausspruch des Problems angedeuteten Dualität wird (§ 2) bewiesen, dass das Geschlecht einer Fläche, die n Nachbargebiete enthalten soll, nicht kleiner als $\frac{(n-3)(n-4)}{12}$ sein kann, und es werden Folgerungen aus der Annahme gezogen, dass auf einer Fläche von solchem Geschlecht (bezw. der nächstgrösseren ganzen Zahl) wirklich n Nachbargebiete existiren; insbesondere wird auf reguläre Eintheilungen von Oberflächen hingewiesen, welche die Verallgemeinerung des Tetraeders im Sinne der Analysis Situs bilden. — Im § 3 wird die weitere Behandlung ins Arithmetische übertragen und so der Beweis jener Umkehrung für die Geschlechtswerthe 1, 2, . . ., 6, bezw. für die Werthe von n bis einschliesslich $n = 12$ gegeben. — Nachdem im vorhergehenden Paragraphen das Problem dahin transformirt ist, dass es sich um die Herstellung einer Zahlenanordnung handelt, werden nun (§ 4) diejenigen Fälle, d. h. diejenigen Werthe von n ausgesondert, bei denen allein jene Zahlenanordnung einen gewissen sehr einfachen Charakter annehmen *kann*, und es wird gezeigt, dass für eben diese Zahlen n ein arithmetisches Theorem besteht, dessen Bestehen umgekehrt die Herstellbarkeit jener Anordnung zur Folge hat. — Im letzten Paragraphen endlich wird diese Zahlenanordnung für alle Werthe von n, die der vorher bezeichneten Kategorie angehören und ausserdem noch einer von zwei bestimmten Bedingungen genügen, wirklich hergestellt, sodass also die genannte Ergänzung des in § 2 bewiesenen Satzes, wenn auch nicht allgemein, so doch für zwei ganze Kategorien von Zahlen n dargethan ist.

Um den Geltungsbezirk dieser Untersuchungen genau zu bezeichnen, *wollen wir uns auf Flächen mit nicht umkehrbarer Indicatrix**) *beschränken.* Es ist dies in der That *dann keine* Beschränkung, *wenn* man die Flächen der entgegengesetzten Art derart als „Doppelflächen" auffasst, als bestände allenthalben die Fläche aus zwei getrennten über einander liegenden Blättern und ebenso die eventuell vorhandenen Randcurven allenthalben aus zwei parallel laufenden Rändern, weil man auf diese Art eben an Stelle jeder Fläche mit umkehrbarer Indicatrix eine bestimmte andere Fläche mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix substituirt. Das Problem gestaltet sich dagegen wesentlich anders auf Flächen mit umkehrbarer Indicatrix selbst, wenn man diese als aus nur *einem* Blatt an jeder Stelle bestehend ansieht.**) Ich möchte auf die hierbei in Betracht kommenden Unterschiede bei nächster Gelegen-

*) Vergl. W. Dyck, Beiträge zur Analysis Situs. Math. Ann. Bd. 32, (1888) p. 473 u. d. Anm. p. 462.

**) Das sog. Möbius'sche Blatt z. B. wird bei der *ersteren* Auffassung eine 2-rändrige, 2 fach zusammenhängende Fläche vom Geschlecht 0 und lässt daher nach § 2 nicht mehr als 4 Nachbargebiete zu. Bei der *zweiten* Auffassung dagegen (wo man sich doch vorstellen muss, dass jede eingezeichnete Linie ebenso gut

heit weiter eingehen, für jetzt also lediglich Flächen mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix betrachten.

Endlich mag zum Schluss dieser einleitenden Bemerkungen ausdrücklich hervorgehoben werden, welche Definition des *Geschlechtes* und des *Zusammenhanges* einer Fläche hier zu Grunde gelegt wird. Wir wollen sowohl bei geschlossenen, als auch bei berandeten Flächen vom „*Geschlecht*" (p) sprechen und darunter die grösste Anzahl der die Fläche nicht zerstückenden und einander nicht schneidenden Rückkehrschnitte verstehen. Es sei nämlich gestattet, die so *rein geometrisch* definirte Zahl, in Anlehnung an die für geschlossene Flächen analytisch eingeführte Bezeichnung, „Geschlecht" der Fläche zu nennen. — Der „*Zusammenhang*" (z) wird bei einer berandeten Fläche durch die um 1 vermehrte Maximalzahl der die Fläche nicht zerstückenden Querschnitte gegeben, bei einer geschlossenen Fläche durch die um 1 verminderte Zusammenhangszahl der aus der vorgelegten durch Ausstechen eines Punktes entstehenden berandeten Fläche. Der Zusammenhang einer geschlossenen Fläche ist nach dieser von Herrn Schläfli eingeführten Art der Zählung*) stets eine *gerade* Zahl.

Die beiden Zahlen, z und p, von denen im folgenden die letztere die Hauptrolle spielen wird, sind nach den Untersuchungen des Herrn Dyck**) als Bestimmungsstücke *nothwendig und hinreichend*, um eine Fläche mit *nicht* umkehrbarer Indicatrix im Sinne der Analysis Situs vollständig zu beschreiben.

§ 1.

Ueber ein gewisses Curvensystem auf einer Fläche.

1. Denkt man sich auf einer beliebigen Fläche durch einen beliebigen Punkt alle geschlossenen Curven gelegt, welche, ohne sonst irgendwo mit einander zusammenzutreffen, sich in diesem Punkt

auf der einen Seite der Fläche wie auf der andern existirt) kann man schon fünf Nachbargebiete herstellen, was die folgende Skizze veranschaulicht, bei der Seite ab an Seite $a'b'$ so zu heften ist, dass a mit a' und b mit b' zusammenfällt:

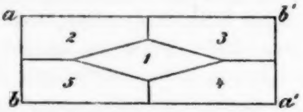


Fig. 1.

*) Vergl. C. Neumann, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. 2te Aufl. Leipzig, 1884. p. 185, 186.

**) a. a. O. p. 488. 2a) und 3) in Verbindung mit Formel (2) p. 478 und (4) p. 484.

sämmtlich durchschneiden, und ist s die Anzahl derselben, so lässt sich zunächst leicht erkennen, dass s eine ungerade Zahl ist. Giebt es nämlich 2μ solcher Curven, so lässt sich stets noch eine $(2\mu+1)^{\text{te}}$ hinzufügen, da man noch aus dem einen Winkelraum des Schnittes der 1^{ten} und 2^{ten} Curve etwa, wenn diese beiden einen ungetheilten Winkel mit einander bilden, in den Scheitelwinkelraum gelangen kann, ohne die Fläche zu verlassen oder eine der vorhandenen Curven zu schneiden. Nennen wir, um dies darzuthun, die Winkelräume, welche man beim Umkreisen des Schnittpunktes der 2μ Curven der Reihe nach passirt,

$$1, 2, 3, \ldots, 4\mu,$$

so gelangt man aus 1, der einen von beiden Curven folgend, welche diesen Winkelraum einschliessen, in $1+2\mu-1$, von dort ebenso in $1+2(2\mu-1)$, von dort in $1+3(2\mu-1)$ u. s. w. Der Scheitelwinkelraum von 1 ist aber $2\mu+1$ und wird daher erreicht, wenn die Congruenz

$$\varkappa(2\mu-1) \equiv 2\mu \text{ mod. } 4\mu$$

durch einen ganzzahligen Werth von $\varkappa$ erfüllt werden kann. Dies ist aber wirklich der Fall und zwar zuerst für $\varkappa = 2\mu$. — Hätte man statt 2μ die ungerade Zahl $2\mu+1$ gehabt, so würde man kein ganzzahliges $\varkappa$ finden, welches der entsprechenden Bedingung genügt. — Auf die gleiche Weise erkennt man, dass man bei 2μ Curven durch dasselbe Verfahren aus einem beliebigen Winkelraum in jeden beliebigen andern gelangt, bei $2\mu+1$ dagegen von 1 z. B. nur nach

$$3, 5, \ldots, 4\mu+1,$$

dass also die Fläche durch eine *gerade* Anzahl solcher geschlossener Curven jedenfalls noch nicht zerfällt.

2. Nachdem hiermit gezeigt ist, dass die Anzahl s unserer Curven eine ungerade ist, wollen wir nun ihre Beziehung zu der Anzahl z des Zusammenhanges und zu der Anzahl r der Randcurven der Fläche ermitteln. Denkt man $s-1$ der Curven als Schnitte ausgeführt, so ist dadurch, weil $s-1$ eine gerade Zahl, die Anzahl der Randcurven nur um 1 vermehrt, also $r+1$. Der Zusammenhang wurde durch die erste der $s-1$ Curven, die einen Rückkehrschnitt bildet, nicht geändert, durch jede der $s-2$ folgenden aber, da diese nun Querschnitte sind, um 1 erniedrigt; also ist für die so zerschnittene Fläche der Zusammenhang

$$z-s+2.$$

Zieht man nun von dem Schnittpunkt der $s-1$ Curven noch einander und sich selbst nicht schneidende Linien nach den r ursprünglichen Randcurven, so hat man jetzt eine Fläche mit *einer* Randcurve und dem Zusammenhang

$$z-s-r+2.$$

Diese Zahl ist aber $= 1$. Denn könnte man einen Querschnitt ziehen, der die Fläche noch nicht zerstückt, so könnte man dessen Endpunkte auf dem Rand beliebig verschieben, also auch derart, dass dieser Schnitt eine s^{te} geschlossene Curve darstellte, welche alle $s - 1$ andern in ihrem Schnittpunkt schneidet, und die Fläche noch nicht zerfallen liesse. Dann könnte man also auch noch eine $(s+1)^{\text{te}}$ Curve derselben Art ziehen, während die Zahl solcher Curven nach Voraussetzung nur s ist. Also ist

$$z - s - r + 2 = 1$$

oder

$$s = z - r + 1,$$

d. h. „*die Anzahl der geschlossenen Curven, die man auf einer Fläche durch einen beliebigen Punkt legen kann, sodass sich in diesem alle unter einander schneiden, ohne sonst einen Punkt mit einander gemein zu haben, ist um Eins grösser als die Differenz zwischen Zusammenhang und Randcurvenzahl*) der Fläche. Erst die letzte der Curven bewirkt ein Zerfallen der Fläche.*“**)

Nur eine Modification dieses Ausspruches ist der folgende:

„*Auf einer Fläche vom Zusammenhang z und der Randcurvenzahl r kann man 2 beliebige Punkte durch $z - r + 1$ Curven so verbinden, dass dadurch die Fläche nicht zerfällt.*“ Denn die $2(z - r)$ Enden von $z - r$ jener geschlossenen Curve münden in ihren Schnittpunkt (A) in der Weise ein, dass man, um diesen in kleinem Kreise herumgehend, von Curve 1 aus etwa zunächst die Enden aller $z - r$ verschiedenen Curven trifft, dann erst die andern Enden in derselben Reihenfolge. Hält man nun die ersteren in ihrem Schnittpunkt A fest, verschiebt aber den vereinigten Endpunkt der $z - r$ andern Enden auf der Fläche aus A heraus nach einem Punkt B und fügt als $(z - r + 1)^{\text{te}}$ Verbindungslinie zwischen A und B diesen Weg hinzu, so hat man die genannten $z - r + 1$ Verbindungslinien zwischen A und B, und die Fläche ist natürlich bei dieser Verschiebung nicht zerfallen.

3. Wir können die Zahl s auch zu dem Geschlecht der Fläche p in Beziehung setzen. Führt man eine der s Curven als Schnitt aus,

---

*) Die ja, wie schon Riemann (Ges. Werke, Leipzig, 1878, p. 12) gezeigt hat, stets eine gerade Zahl ist.

**) Nach diesem Satz beruht die bei Möbius, Ges. Werke, Bd. II, p. 541, angegebene von Gauss bemerkte Eigenschaft einer gewissen Fläche einfach darauf, dass bei derselben $z = 3$, $r = 1$ ist. Man kann daher ausser den zwei Punktepaaren PR, QS auch noch ein drittes, UV, auf dem Rand annehmen, sodass U und V durch 2 der 4 Punkte $PQRS$ getrennt werden, und U und V mit einander verbinden, ohne die schon gezogenen Linien zu schneiden.

so wächst die Zahl der Randcurven um 2, während der Zusammenhang derselbe bleibt. Nennt man also für die so zerschnittene neue Fläche die Zahl unserer Curven s_1, so ist nach der obigen Formel

$$s_1 = s - 2.$$

Führt man von den s_1 Curven wieder eine als Schnitt aus, so ist für die jetzt entstehende neue Fläche ebenso

$$s_2 = s_1 - 2 = s - 4$$

u. s. w. Endlich gelangt man zu einer Fläche, für die die Anzahl unserer Curven nur noch 1 ist, und dies wird offenbar eintreten, nachdem man im Ganzen $\frac{s-1}{2}$ solche Rückkehrschnitte ausgeführt hat. Diese Fläche zerfällt also bei jedem Rückkehrschnitt, und man konnte auf der ursprünglichen Fläche demnach gerade $\frac{s-1}{2}$ Rückkehrschnitte ausführen, ohne dass sie zerfiel, aber nicht mehr; folglich ist

$$\frac{s-1}{2} = p,$$

d. h.

$$s = 2p + 1,$$

„*die Zahl der geschlossenen Curven der genannten Art ist gleich der um Eins vermehrten doppelten Geschlechtszahl.*"

Durch Verbindung dieses Resultates mit dem im vorigen Artikel abgeleiteten ergiebt sich die Beziehung

$$z - r = 2p,$$

„*Zusammenhang weniger Randcurvenzahl einer Fläche ist gleich dem doppelten Geschlecht*", welche bereits in einer Formel des Herrn Dyck*) enthalten ist, auch sonst aus der Definition von z, r, p leicht abzuleiten wäre, und von der wir im Folgenden Gebrauch zu machen haben.

Auf Grund dieser Relationen zwischen den vier Zahlen s, z, r, p kann man nun den in der Einleitung schon erwähnten Ausspruch des Herrn Dyck auch so formuliren: *Zur vollständigen Beschreibung einer Fläche mit nicht umkehrbarer Indicatrix im Sinne der Analysis Situs sind nothwendig und hinreichend zwei Zahlen, von denen die eine der Gruppe z, p, s, die andere der Gruppe z, r* (natürlich unter Ausschluss der Wahl z, z) *entnommen ist.*

4. Der Nachweis, dass $s - 1 = 2p$ ist, und der Umstand, dass man beim Durchlaufen des Randes einer durch die $2p$ geschlossenen Curven zu einer einfach zusammenhängenden aufgeschnittenen geschlossenen Fläche die $4p$ Ufer jener Schnitte in der Reihenfolge passirt, dass man zunächst je ein Ufer aller $2p$ Curven durchläuft und dann in *derselben* Reihenfolge die entsprechenden anderen Ufer — ein

*) a. a. O. p. 478 Formel (2) unter Berücksichtigung von Formel (4) p. 484.

Umstand, von dem man sich durch eine der in 1. angestellten ganz analoge Betrachtung überzeugt, — lassen uns erkennen, dass die $2p$ Curven bereits anderwärts implicite erscheinen. Es sind dies hiernach dieselben Curven, die entstehen, wenn man das Poincaré'sche polygone générateur der groupes fuchsiens mit einer geraden Anzahl von Seiten der 1ten Sorte, von denen immer 2 Gegenseiten einander conjugirt sind*), längs je zweier conjugirten Seiten wirklich zusammenheftet, — und dieselben Curven, die entstehen, wenn man die Polygone, die in den Untersuchungen des Herrn Dyck über regulär verzweigte Riemann'sche Flächen**) gewisse Wurzelirrationalitäten darstellen, längs je zweier Symmetrielinien der regulären Verzweigung zusammenheftet. Es ist also hiermit gezeigt, dass gerade die hier eingeführten Curven es sind, wodurch jene übersichtlichste Zerschneidung einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p zu einem regulären Polygon mit $4p$ oder $4p+2$ Seiten erzielt wird, bei dem sich immer die Gegenseiten entsprechen.

Da jede der $2p+1$ Curven für sich einen die Fläche nicht zerstückenden Rückkehrschnitt bildet und die Gesammtheit von $2p$ derselben die geschlossene Fläche zu einer einfach zusammenhängenden aufschneidet, so liefern dieselben als Integrationswege eines Abel'schen Integrals I. Gattung auf der zugehörigen Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p ein System von $2p$ linear unabhängigen Periodicitätsmoduln. Man kann von diesem Ausgangspunkt z. B. auf sehr einfache Weise die Resultate gewinnen, die Clebsch in der Abhandlung „Zur Theorie der Riemann'schen Fläche" ***) § 6 auf andere Art hergeleitet hat.

§ 2.

Minimalwerth von p bei n Nachbargebieten.

5. Wir haben in der Einleitung das zu behandelnde Problem so gefasst, dass nur nach dem *Geschlecht* der Fläche gefragt wird, auf welcher n Nachbargebiete möglich sind. In der That hängt die Lösung des Problems auch nur von der Geschlechtszahl der Fläche ab. Denn wenn auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht p n Nachbargebiete möglich sind, so ist dasselbe offenbar der Fall auf jeder aus derselben durch Ausschneidung einer beliebigen Anzahl einfach zusammenhängender Flächenstücke entstehenden Fläche möglich und umgekehrt. Man kann aber jede beliebige Fläche mit dem Geschlecht p,

*) Théorie des groupes fuchsiens. Acta Math. Bd. 1, (1882) § 8.

**) Ueber regulär verzweigte Riemann'sche Flächen und die durch sie definirten Irrationalitäten. In.-Diss. München, 1879. S. insbesondere Tafel VIII, Fig. 2. Fläche I. — Vgl. auch Math. Ann. Bd. 17 (1880) p. 473 ff.

***) Math. Ann. Bd. 6 (1873).

der Randcurvenzahl r und dem Zusammenhang z aus einer geschlossenen Fläche von *demselben* Geschlecht durch Ausschneidung von r einfach zusammenhängenden Stücken entstanden denken. In der That, nach vorigem Paragraph ist

$$z = 2p + r.$$

Jede der r Randcurven kann man zur Begrenzung eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes, folglich die Fläche durch Einfügung von r solchen zu einer geschlossenen machen. Dadurch ist der Zusammenhang um r verkleinert worden; also ist der Zusammenhang der neuen geschlossenen Fläche

$$z' = 2p.$$

Da aber bei einer geschlossenen Fläche der Zusammenhang gleich der doppelten Geschlechtszahl ist, so ist das Geschlecht der resultirenden geschlossenen Fläche p geblieben, und man kann umgekehrt die vorgelegte aus dieser Fläche durch Ausschneidung entstanden denken.

Das Problem hängt also wirklich nur von dem *Geschlecht* der Fläche ab, und wir sehen gleichzeitig, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Fläche als eine *geschlossene* vorausgesetzt werden darf. Auch ist ohne Weiteres klar, — was für Späteres hier schon bemerkt werden mag, — dass, wenn auf einer Fläche überhaupt n Nachbargebiete möglich sind, dann auch eine Eintheilung der *ganzen* Fläche in solche n Gebiete möglich ist.

6. Ferner wurde schon beim Ausspruch des Problems eine Dualität zwischen Gebieten und Punkten, Grenzlinien und Verbindungslinien als feststehend angenommen, die noch der Begründung bedarf. Giebt es aber zunächst auf einer Fläche n Nachbargebiete, so giebt es auf derselben auch n Nachbarpunkte, wie leicht zu zeigen ist. Denken wir uns zu dem Ende das Netz der Begrenzungslinien etwa in blauer Farbe gezeichnet. Nimmt man dann in jedem Gebiet einen beliebigen Punkt an und führt von diesem aus (etwa in rother Farbe) Linien, die sich selbst und einander nicht schneiden, nach $n-1$ solchen blauen Begrenzungslinien, längs deren das Gebiet an $n-1$ *verschiedene* andere grenzt (denn es ist ja nicht ausgeschlossen, dass ein Gebiet längs mehrerer Linien an *dasselbe* andere grenzt) und zwar so, dass der Punkt im Gebiet a mit demselben Punkt derselben Grenzlinie (ab) verbunden wird, wie der Punkt im Gebiet b, so verbinden die entstehenden $\frac{n(n-1)}{2}$ rothen Linien, die einander nicht schneiden, jeden der n Punkte mit den $n-1$ andern.

Giebt es umgekehrt auf einer Fläche n Nachbarpunkte, so giebt es auch n Nachbargebiete. Umgiebt man nämlich zunächst jeden der n Punkte mit einer auf der Fläche liegenden geschlossenen Contour, die keinen andern der n Punkte enthält, so kann man jedes dieser

n Flächenstücke sich in $n-1$ Streifen ausdehnen lassen längs der $\frac{n(n-1)}{2}$ rothen Verbindungslinien und diese Ausläufer so weit führen, bis je 2 derselben an einander stossen. Dann hat man n *einfach zusammenhängende* Nachbargebiete auf der Fläche.

Hiermit ist das Bestehen der genannten Dualität erwiesen, und es folgt gleichzeitig aus der vorstehenden Betrachtung, dass, wenn überhaupt n Nachbargebiete existiren, dann auch n einfach zusammenhängende Gebiete mit dieser Eigenschaft hergestellt werden können.

7. Wir sind daher berechtigt, bei der Untersuchung unseres Problems bald die eine, bald die andere Auffassung, je nachdem sich dadurch der Ausdruck einfacher gestaltet, vorzuziehen. Wir fragen zunächst nach dem Minimalwerth des Geschlechtes einer Oberfläche, welche wirklich n Nachbarpunkte zulässt, und nennen diese Zahl p_n; d. h. es wird vorausgesetzt, auf einer Fläche vom Geschlecht p_n gäbe es wirklich n Nachbarpunkte, dagegen nicht auf einer solchen von niedrigerem Geschlecht. Dann ist es sehr leicht, für p_n eine untere Grenze zu ermitteln.

Durch die n Nachbarpunkte und ihre $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien entsteht auf der geschlossenen Fläche ein System von n Punkten oder Ecken, $\frac{n(n-1)}{2}$ Linien oder Kanten und einer Anzahl (F) Flächenstücke oder Seitenflächen. Die letzteren sind sämmtlich einfach zusammenhängend; denn käme dabei ein mehrfach zusammenhängendes Stück vor, so könnte man in demselben einen nicht in einen Punkt zusammenziehbaren Rückkehrschnitt legen, der die ganze Fläche nicht zerstückt. Man hätte also das Geschlecht der Fläche um 1 erniedrigt, und doch gäbe es auf derselben noch n Nachbarpunkte gegen die Voraussetzung. — Für die Anzahl F dieser einfach zusammenhängenden Flächenstücke findet sich nun die obere Grenze

$$F \leqq \frac{n(n-1)}{3};$$

denn um jeden der n Punkte herum liegen $n-1$ Flächenstücke, die sämmtlich mindestens Dreiecke sind, da, wenn Zweiecke vorkämen, 2 der n Punkte doppelt mit einander verbunden wären. Wendet man nun auf das System von Ecken, Kanten, Seiten auf der Fläche vom Geschlecht p_n den erweiterten Euler'schen Polyedersatz an, so folgt

$$2p_n - 2 = \frac{n(n-1)}{2} - n - F,$$

$$2p_n - 2 \geqq \frac{n(n-1)}{2} - n - \frac{n(n-1)}{3},$$

$$p_n \geqq \frac{(n-3)(n-4)}{12},$$

und da p_n jedenfalls eine ganze Zahl sein muss, können wir schreiben

$$\text{(A)} \qquad p_n \geqq \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12},$$

wo $2\alpha_n$ die kleinste positive ganze Zahl ist, die bewirkt, dass der Zähler durch 12 theilbar wird. Man sieht nämlich leicht, dass diese Zahl nur eine *gerade* sein, und ferner, dass α_n nur einen der Werthe 0, 2, 3, 5 haben kann.

8. Für die niedrigsten Werthe von n, z. B. $n=3, 4$ kann nun in der Formel (A) das Ungleichheitszeichen fortgelassen werden. Wir wollen aber im Folgenden nachweisen, dass wenigstens für die Werthe von n bis einschliesslich $n=12$ und sodann für alle Werthe von n, die gewissen später zu präcisirenden Bedingungen genügen, unser Problem in der That durch die *Gleichung*

$$\text{(B)} \qquad p_n = \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$$

erschöpfend gelöst wird. Für die entsprechenden Werthe von p, nämlich $p=p_n$, p_n+1, $p_n+2, \ldots, p_{n+1}-1$, wenn n ein solcher Werth ist, für den Gleichung (B) gilt, wird dann also die umgekehrte Frage nach der Maximalzahl n_p der Nachbarelemente auf einer Fläche vom Geschlecht p durch die Gleichung beantwortet

$$\text{(C)} \qquad n_p = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+48p-8\alpha_p}, \text{*)}$$

wobei α_p die kleinste positive ganze Zahl bedeutet, welche den Radicand zu einem Quadrat macht. Wird hierbei $\alpha_p < 6$, so ist der eingesetzte Werth von p derart, dass die gleiche Anzahl von Nachbargebieten n_p nicht schon auf einer Fläche niedrigeren Geschlechtes auftritt. Ist $\alpha_p \geqq 6$, nämlich $= 6\nu + \alpha'_p$, wo $\alpha'_p < 6$, so kommt schon auf einer Fläche vom Geschlecht $p-\nu$ die gleiche Anzahl von Nachbargebieten vor.

Bevor wir aber in den angekündigten Beweis eintreten, müssen noch die folgenden für das Verständniss desselben erforderlichen Bemerkungen vorausgeschickt werden.

9. Die Zahlen α haben in Bezug auf die Natur des Netzes auf der Fläche eine einfache Bedeutung. Hat man auf irgend einer Fläche vom Geschlecht p n Nachbarpunkte und die entstehenden Flächenstücke sind sämmtlich einfach zusammenhängend, so besteht ja immer die Beziehung

$$p = \frac{(n-3)(n-4)+2\alpha}{12},$$

---

*) In dieser Form, unter Hinzufügung des Zeichens $<$, erscheint das erwähnte Resultat bei Herrn Heawood (a. a. O. p. 334), wenn man daselbst die Grösse $\varkappa$, von der Herr H. nur sagt, dass sie eine „positive von dem Zusammenhang der geschlossenen Fläche abhängige Constante“ sei, $=2p-2$ setzt.

wonach die Zahl der Flächenstücke $\frac{n(n-1)-\alpha}{3}$ ist. Da es nun in dem ganzen Netz genau $n(n-1)$ Polygonecken oder Winkel giebt, so ist α die Zahl der Polygonecken, die übrig bleibt, wenn man von jedem Flächenstück 3 Ecken fortnimmt. Gilt also Gleichung (B), so bilden die Flächenstücke entsprechend den 4 möglichen Werthen von α_n (0, 2, 3, 5) entweder

1) lauter Dreiecke;

oder

2) lauter Dreiecke und 2 Vierecke
oder lauter Dreiecke und 1 Fünfeck;

oder

3) lauter Dreiecke und 3 Vierecke
oder lauter Dreiecke, 1 Viereck, 1 Fünfeck
oder lauter Dreiecke, ein Sechseck;

oder

4) lauter Dreiecke und 5 Vierecke
oder u. s. w.
oder endlich: lauter Dreiecke und 1 Achteck.

Von besonderem Interesse sind nun die Fälle, wo $\alpha_n = 0$, wo also, falls Gleichung (B) besteht, die ganze Fläche in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke eingetheilt ist, von denen je $n-1$ in einer Ecke zusammenstossen, bezw. bei der dualistischen Auffassung in n $(n-1)$-Ecke, deren je 3 eine Polyederecke bilden. Wir wollen diese Fälle die „*regulären*" nennen. Sie treten also ein, wenn $\alpha_n = 0$, mithin n eine der vier Formen hat:

$$n = 12\varkappa,$$
$$n = 12\varkappa + 3,$$
$$n = 12\varkappa + 4,$$
$$n = 12\varkappa + 7,$$

während das Geschlecht p der Flächen, auf denen solche reguläre Eintheilung möglich sein soll, der *nothwendigen* Bedingung genügt

$$1 + 48p = \lambda^2$$

oder

$$p = \frac{\lambda^2 - 1}{48},$$

wo

$$\lambda^2 \equiv 1 \text{ mod. } 48.$$

Setzt man $\varkappa = 0$, so hat man aus der dritten Reihe der Werthe von n $n = 4$ und dem entsprechend $p = 0$; d. h. ein solcher regulärer Fall ist z. B. die Oberfläche des Tetraeders. In der That würden alle regulären Fälle die Verallgemeinerung des Tetraeders auf Oberflächen von höherem Geschlecht im Sinne der Analysis Situs bilden, und zwar

bei der einen oder andern der beiden dualistischen Auffassungen, jenachdem wir das Tetraeder (bei dem die beiden dualistischen Erscheinungen noch zusammenfallen) als ein System von 4 Flächen, deren jede an die 3 andern grenzt, oder als ein Netz aus 4 Punkten, deren jeder mit den 3 andern auf der Fläche verbunden ist, ansehen.

§ 3.

Arithmetische Einkleidung der Untersuchung. — Beweis der Gleichung (B) für $n = 4, 5, \ldots, 12$.

10. Die Schwierigkeiten, welche der Versuch, Gleichung (B) allgemein zu beweisen, bereitet, haben ihren Grund in der arithmetischen Natur des Problems. Man kann diesem in der That eine rein arithmetische Einkleidung geben. Man denke sich n $(n-1)$-Ecke (dualistisch n einfach zusammenhängende Flächenstücke als die Träger von n Punkten, von deren jedem $n-1$ Linien nach dem Rand gehen), bezeichne dieselben durch die darauf geschriebenen Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und jede der Seitenkanten beim Polygon $\varkappa$ durch eine andere der Zahlen $1, 2, \ldots, \varkappa - 1, \varkappa + 1, \ldots, n$, welche angiebt, an welches andere Polygon das Polygon $\varkappa$ längs dieser Kante anzuheften ist. Heftet man nun so zusammen, dass man von der mit Zahlen beschriebenen Seite eines Polygones beim Passiren der Zusammenheftungslinien immer wieder auf die beschriebene Seite der andern gelangt, so erhält man stets eine geschlossene Oberfläche, welche in n Nachbargebiete getheilt ist; aber das Geschlecht derselben wird im Allgemeinen $> \frac{(n-3)(n-4) + 2\alpha_n}{12}$ sein; es sei denn, dass die Anordnung derart getroffen worden, dass die Anzahl der Polyederecken $= \frac{n(n-1) - \alpha_n}{3}$ wird. Nun drückt sich die Eigenschaft, dass die λ Polygone $1, 2, \ldots, \lambda$ z. B. in einer Ecke zusammenstossen (oder die λ Punkte $1, 2, \ldots, \lambda$ Ecken desselben Polygones werden), wenn die Reihenfolge derselben beim Umkreisen dieser Ecke im Sinne des Uhrzeigers etwa die natürliche $1, 2, \ldots, \lambda$ ist, dadurch arithmetisch aus, dass bei den $n-1$ Zahlen, welche die Randstücke von 1 bezeichnen, in demselben Sinn $2, \lambda$, bei 2 $3, 1$ bei 3 $4, 2$ u. s. w. bei λ $1, \lambda - 1$ auf einander folgen. Wir wollen sagen: diese λ Zahlenpaare

$$(2, \lambda),\ (3\,1),\ (4\,2),\ (5, 3), \ldots, (1, \lambda - 1)$$

bilden einen „*Cyklus von λ Elementen oder Paaren*". Eine dreiseitige Ecke oder ein Dreieck insbesondere giebt also einen dreielementigen Cyklus

$$(i\varkappa),\ (\varkappa l),\ (li)$$

und ist daran kenntlich, dass bei den Randstücken des Polygones i im Sinne des Uhrzeigers auf einander folgen $\varkappa, l$; bei $\varkappa$ in demselben Sinne l, i und bei l endlich $i, \varkappa$.

Dann ist unser Problem jetzt dieses:

(D)
1) Die Zahlen $2, 3, \ldots, n$ (welche die Seiten des Polygones 1 bedeuten),
2) „ „ $1, 3, \ldots, n$ („ „ „ „ „ 2 „),
u. s. w.
n) Die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ (welche die Seiten des Polygones n bedeuten),

wobei man sich die Zahlen jeder Zeile zu einem Kreis geschlossen denken muss, so anzuordnen, dass die Anzahl der entstehenden Cyklen genau $= \frac{n(n-1)-\alpha_n}{3}$ wird. — Wir wollen eine solche Anordnung der Kürze halber mit (D) bezeichnen. —

11. Die folgenden Tabellen geben für jede der Zahlen

$$n = 4, 5, 6, \ldots, 11, 12$$

eine Anordnung (D), womit also die Gültigkeit des Satzes (B) (und gleichzeitig (C)) zunächst für die Werthe von n bis einschliesslich $n = 12$ dargethan ist. Ueber jeder Tabelle steht neben dem Werth von n der von p_n, α_n und $F = \frac{n(n-1)-\alpha_n}{3}$. In der Tabelle sind immer die Zahlenpaare, welche zu Cyklen von mehr als 3 Elementen gehören, durch einen darunter gesetzten Bogen gekennzeichnet, und unter jeder Tabelle sind ausser der Zahl der Dreiecke die mehrelementigen Cyklen selbst angegeben.

$n = 4,\quad p_4 = 0,\quad \alpha_4 = 0,\quad F = 4$

regulär (Tetraeder)

1) 2 3 4
2) 3 1 4
3) 4 1 2
4) 2 1 3

4 Dreiecke.

$n = 5,\quad p_5 = 1,\quad \alpha_5 = 5,\quad F = 5.$

1) 3 2 4 5
2) 4 3 5 1
3) 5 4 1 2
4) 1 5 2 3
5) 2 1 3 4

(wobei eigentlich unter jedem Paar ein Bogen stehen müsste, die deshalb alle fortgelassen sind.)

5 Vierecke [1 3 4 2], [1 2 5 4], [1 4 3 5], [1 5 2 3], [3 2 4 5].

Fig. 2 veranschaulicht diese Anordnung für $n = 5$.

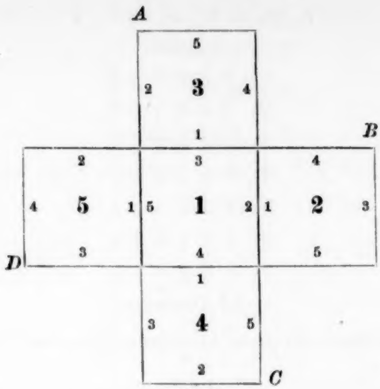


Fig. 2.

Die geschlossene Fläche vom Geschlecht 1 entsteht durch Zusammenheften der Linien AB und DC, BC und AD (vergl. § 1, Art. 4). Sie bildet ein „*Pentaeder*“, bei dem gerade wie beim Tetraeder die beiden dualistischen Erscheinungen zusammenfallen; denn die 5 Ecken dieses Pentaeders sind Nachbarpunkte.*)

$$n = 6, \quad p_6 = 1, \quad \alpha_6 = 3, \quad F = 9$$

$$\begin{array}{ll}
1) & 3\ 5\ \underbrace{2\ 6}\ 4 \\
2) & 4\ 6\ \underbrace{3\ 1}\ 5 \\
3) & 5\ 1\ \underbrace{4\ 2}\ 6 \\
4) & 6\ 2\ \underbrace{5\ 3}\ 1 \\
5) & 1\ 3\ \underbrace{6\ 4}\ 2 \\
6) & 2\ 4\ \underbrace{1\ 5}\ 3
\end{array}$$

8 Dreiecke und das Sechseck [1 2 3 4 5 6].

*) Wir haben also hier noch eine *regulär* (nämlich in 5 Vierecke) eingetheilte Oberfläche von höherem Geschlecht als Null, die *nicht* in den oben angeführten 4 Serien regulärer Fälle enthalten ist, und man kann sich leicht davon überzeugen, dass innerhalb unseres jetzigen Problems, wo immer nach dem *niedrigsten* Geschlecht gefragt wird, andere reguläre Eintheilungen nicht mehr vorkommen können. Lässt man dagegen jene Beschränkung fallen, so bilden das Tetraeder und dieses Pentaeder nur die untersten Fälle in einer unendlichen Reihe regulärer Oberflächen, auf die ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen hoffe: Oberflächen vom Geschlecht $\frac{(n-1)(n-4)}{4}$ ($n = 4, 5, 8, 9, \ldots, 4\varkappa, 4\varkappa+1, \ldots$) die in n benachbarte $(n-1)$-Ecke so eingetheilt sind, dass nur n-Polyederecken entstehen, die gleichzeitig Nachbarpunkte sind. — Vergl. zu der obigen Figur und der folgenden Fig. 3 auch die Figuren des Herrn W. Dyck, Math. Ann. Bd. 20, Taf. III, Fig. 2 und 3.

$n = 7, \quad p_7 = 1, \quad \alpha_7 = 0, \quad F = 14$

regulär

1) 2 4 3 7 5 6
2) 3 5 4 1 6 7
3) 4 6 5 2 7 1
4) 5 7 6 3 1 2
5) 6 1 7 4 2 3
6) 7 2 1 5 3 4
7) 1 3 2 6 4 5

14 Dreiecke.

Fig. 3 veranschaulicht diese Anordnung für $n = 7$ auf einer Fläche vom Geschlecht 1.

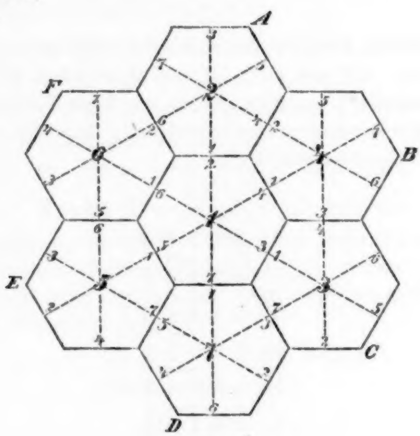


Fig. 3.

Die ausgezogenen Linien theilen die Fläche in 7 benachbarte Sechsecke, die punktirten verbinden deren Mittelpunkte mit einander. Die geschlossene Fläche entsteht durch Aneinanderheften der Linien

AB und ED, BC und FE, CD und AF.

$n = 8, \quad p_8 = 2, \quad \alpha_8 = 2, \quad F = 18.$

1) $2\ 3\ \underbrace{4\ 5}\ \underbrace{6\ 7}\ 8$
2) $3\ 1\ 8\ \underbrace{5\ 4}\ \underbrace{7\ 6}$
3) $4\ 1\ 2\ 6\ 7\ 5\ 8$
4) $\underbrace{2\ 1}\ 3\ 8\ 6\ 5\ 7$

5) 6 1 2 8 3 7 4

6) 2 1 5 4 8 7 3

7) 8 1 2 4 5 3 6

8) 2 1 7 6 4 3 5

16 Dreiecke und die beiden Vierecke [1 4 2 5], [1 6 2 7].

$n = 9, \quad p_9 = 3, \quad \alpha_9 = 3, \quad F = 23.$

1) 2 3 4 5 6 7 8 9

2) 6 1 9 7 3 5 8 4

3) 4 1 2 7 6 8 5 9

4) 5 1 3 9 6 2 8 7

5) 6 1 4 7 9 3 8 2

6) 7 1 5 2 4 9 8 3

7) 8 1 6 3 2 9 5 4

8) 9 1 7 4 2 5 3 6

9) 2 1 8 6 4 3 5 7

22 Dreiecke und das Sechseck [3 1 2 6 5 2].

$n = 10, \quad p_{10} = 4, \quad \alpha_{10} = 3, \quad F = 29.$

1) 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2) 3 1 4 6 9 7 10 5 8

3) 4 1 2 10 7 6 8 5 9

4) 5 1 3 9 6 2 10 8 7

5) 6 1 4 7 9 3 8 2 10

6) 7 1 5 10 2 4 9 8 3

7) 8 1 6 3 10 2 9 5 4

8) 9 1 7 4 10 2 5 3 6

9) 10 1 8 6 4 3 5 7 2

10) 4 1 9 6 5 2 7 3 8

26 Dreiecke und 3 Vierecke [2 1 10 4], [2 6 10 9], [2 8 10 3].

$n = 11, \quad p_{11} = 5, \quad \alpha_{11} = 2, \quad F = 36.$

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2)	3	1	11	7	4	10	6	9	8	5
3)	4	1	2	5	9	11	7	6	10	8
4)	5	1	3	8	6	11	10	2	7	9
5)	6	1	4	9	3	2	8	10	7	11
6)	7	1	5	4	8	11	9	2	10	3
7)	8	1	6	3	5	10	9	4	2	11
8)	9	1	7	11	6	4	3	10	5	2
9)	10	1	8	2	6	11	3	5	4	7
10)	11	1	9	7	5	8	3	6	2	4
11)	2	1	10	4	5	3	9	6	8	7

34 Dreiecke und 2 Vierecke [3 11 5 7], [5 11 4 6].

$n = 12, \quad p_{12} = 6, \quad \alpha_{12} = 0, \quad F = 44.$

regulär

1)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2)	3	1	12	4	9	8	5	11	7	10	6
3)	4	1	2	6	5	8	10	7	12	11	9
4)	5	1	3	9	2	12	8	7	11	6	10
5)	6	1	4	10	12	7	9	11	2	8	3
6)	7	1	5	3	2	10	4	11	8	12	9
7)	8	1	6	9	5	12	3	10	2	11	4
8)	9	1	7	4	12	6	11	10	3	5	2
9)	10	1	8	2	4	3	11	5	7	6	12
10)	11	1	9	12	5	4	6	2	7	3	8
11)	12	1	10	8	6	4	7	2	5	9	3
12)	2	1	11	3	7	5	10	9	6	8	4

44 Dreiecke.

Es mag zu den Tabellen noch bemerkt werden, dass, wenn dieselben mit Ausnahme derjenigen für $n = 5, 6, 7$, von denen später noch die Rede sein wird, eine wesentliche Gesetzmässigkeit nicht erkennen lassen, damit noch nicht gesagt ist, dass eine solche nicht vielleicht doch erreichbar wäre. Denn einmal sind ja die Zahlen der ersten Zeile (ausgenommen bei $n = 5, 6, 7$) *willkürlich* in der natür-

lichen Folge genommen, und zweitens kann man die Zahlen jeder Zeile noch cyklisch verschieben. Wir werden aber bald sehen, dass *die* Gesetzmässigkeit, die man bei $n = 5, 6, 7$ wahrnimmt, auch *nur* in diesen Fällen unter den bis jetzt behandelten zu erreichen war.

§ 4.

Nachweis, dass eine cyklische Anordnung höchstens im Fall $n = 12\varkappa + 7$ möglich ist.

12. Die Methode, nach der die Anordnungen (D) im vorigen Paragraphen gefunden sind, war die folgende: Man nimmt auf einer geschlossenen Fläche des Geschlechtes $\frac{(n-3)(n-4)+2\alpha_n}{12}$ n Punkte beliebig an und zieht auf irgend eine Art so viele der $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungslinien als möglich sind, ohne dass zwei derselben sich schneiden. Dann werden im Allgemeinen nicht alle $\frac{n(n-1)}{2}$ gezogen sein, sondern etwa λ weniger. Dafür kann man aber, — wie eine einfache Ueberlegung auf Grund des Euler'schen Polyedersatzes zeigt, — noch gerade $\lambda + \alpha_n$, also stets mindestens λ, Verbindungslinien ziehen, nach deren Herstellung die ganze Oberfläche erst in Dreiecke eingetheilt wäre. Zieht man nun eine solche, so kann diese nur 2 Punkte verbinden, die schon anderweitig verbunden sind; löscht man daher die frühere Verbindungslinie, so kann man dadurch wieder mindestens eine andere Verbindung herstellen, und es ist möglich, dass diese 2 bisher noch nicht verbundene Punkte verbindet, sodass man also um einen Schritt weiter gekommen wäre. Im entgegengesetzten Falle wird dadurch an anderer Stelle eine Verbindung aufgehoben und in Folge dessen wieder eine oder mehrere neue Verbindungen möglich werden u. s. w.

Da sich aber nicht allgemein zeigen liess, dass diese Methode stets dahin führt, die sämmtlichen λ fehlenden Verbindungen noch herzustellen, womit ja der Beweis für die ganz allgemeine Gültigkeit der Gleichung (B) erbracht wäre, so wollen wir uns darauf beschränken, den letzteren für Werthe von n eines solchen Charakters zu führen, bei denen die Anordnung (D) sich besonders einfach und übersichtlich gestalten lässt.

13. Für $n = 5, 6, 7$ (s. Art. 11) ist die Anordnung (D) derart hergestellt worden, dass jede Zeile aus der vorhergehenden durch einfache cyklische Vertauschung der Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ in der natürlichen Reihenfolge hervorgeht. Wir wollen eine Anordnung (D) mit diesem Charakter eine „*cyklische*" nennen und werden nachweisen, dass ausser bei $n = 5$ und $n = 6$ nur, wenn n die Form $12\varkappa + 7$

hat, eine solche cyklische Anordnung (D) herstellbar sein *kann*, und bei bestimmter Beschaffenheit von $\varkappa$ dann auch wirklich herstellbar *ist*.

Zunächst sieht man leicht, dass wir, wenn $n > 20$, jedenfalls nur in den regulären Fällen die Möglichkeit einer cyklischen Anordnung (D) erwarten dürfen. Denn bei den nicht regulären Fällen treten Cyklen von mehr als 3 Zahlenpaaren auf. Gehört nun etwa in Zeile 1) $\varkappa l$ einem mehr als dreielementigen Cyklus an, so gilt bei einer cyklischen Anordnung dasselbe von $\varkappa + 1$, $l + 1$ in Zeile 2), von $\varkappa + 2$, $l + 2$ in Zeile 3) u. s. w., endlich von $\varkappa - 1$, $l - 1$ in Zeile n). Man hätte also mindestens n Zahlenpaare, die Cyklen von mehr als 3 Elementen angehören. Nach Art. 9 kommen nun höchstens 20 Zahlenpaare dieser Art vor, nämlich, wenn $\alpha_n = 5$ und 5 Vierecke vorhanden sind. Selbst wenn es also möglich wäre, dass diese 20 Zahlenpaare bei einer cyklischen Anordnung in derselben Colonne über einander ständen, so folgt hieraus, dass bei $n > 20$ in nicht regulären Fällen eine cyklische Anordnung ausgeschlossen ist. Wir übergehen, um nicht zu weitläufig zu werden, den nicht schwierigen Nachweis, dass auch bei den nicht regulären Fällen für $n \leq 20$ eine cyklische Anordnung, ausser bei $n = 5$ und $n = 6$, unmöglich ist.

Die Frage lautet also jetzt: Wie muss die Zahl n beschaffen sein, damit die cyklische Anordnung

$$(E)\qquad \begin{cases} 1)\ 2,\ i_3, & i_4, & \ldots,\ i_n, \\ 2)\ 3,\ i_3+1, & i_4+1, & \ldots,\ i_n+1, \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ n)\ 1,\ i_3+n-1, & i_4+n-1, & \ldots,\ i_n+n-1, \end{cases}$$

wobei $i_3, i_4, \ldots, i_n$ eine Permutation der Zahlen $3, 4, \ldots, n$ bedeuten, und alle Zahlen, die $> n$, durch ihre kleinsten Reste mod. n zu ersetzen sind, in $\frac{n(n-1)}{3}$ Dreiecke zerfällt? *)

14. Wir weisen zunächst die Identität dieser Aufgabe mit einer andern rein arithmetischen nach.

Angenommen, für die Zahl n existire eine Anordnung (E), so möge etwa $i_\lambda = n$ sein. In Zeile 1) steht dann die Folge

$$i_{\lambda-1},\ n,\ i_{\lambda+1}.$$

Also enthält Zeile n) wegen des cyklischen Fortganges die Folge

$$i_{\lambda-1} + n - 1,\ \ n - 1,\ \ i_{\lambda+1} + n - 1$$

*) Diese Frage ist eine ähnliche wie die von Steiner, Ges. Werke, Bd. II, pag. 436 unter a) aufgestellte, von der sich die unsrige nur dadurch unterscheidet, dass bei ihr 1) die Verbindung je zweier Elemente zweimal, nämlich sowohl in der Folge $i\varkappa$, wie in der Folge $\varkappa i$ auftreten muss und 2) die im Artikel 16 angegebene Forderung noch zu erfüllen ist.

und, weil die ganze Anordnung in Dreiecke zerfällt, die Folge

$$i_{\lambda+1},\ 1,\ i_{\lambda-1}.$$

Zeile n) zeigt also die Eigenschaft: Die beiden Nachbarn von 1 sind um 1 grösser als die beiden Nachbarn von $n - 1$; die beiden Nachbarn von $n - 1$ sind um $n - 1$ grösser als die beiden Nachbarn von 1, wenn Alles mod. n verstanden wird und immer die beiden einander zugekehrten Nachbarn mit einander verglichen werden, also der rechte von 1 mit dem linken von $n - 1$ und umgekehrt.

Durch dieselben Schlüsse findet man allgemein für Zeile n):

„*Die beiden Nachbarn von* $\varkappa$ *sind bezw. um* $\varkappa$ *grösser als diejenigen von* $(n - \varkappa)$ *für* $\varkappa = 1, 2, \ldots, n - 1$."

Lassen umgekehrt die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ eine derartige Anordnung zu, wählt man diese als Zeile n) und leitet daraus durch cyklische Vertauschung $n - 1$ Zeilen 1), 2), . . ., $n - 1$) ab, so bilden diese eine Anordnung (E), weil die $n(n - 1)$ Zahlenpaare lauter Dreiecke bilden. Ist nämlich a, b ein beliebiges Paar der Zeile n), so enthält diese nach Voraussetzung noch die beiden Paare $n - b,\ a - b$ und $n - a + b,\ n - a$. Folglich enthält auf Grund der cyklischen Vertauschung Zeile a) das Paar bn und Zeile b) das Paar na; d. h. jedes beliebige Paar der Zeile n), also jedes beliebige Paar einer beliebigen Zeile gehört einem Dreieck an.

Die beiden Probleme sind also in der That identisch.

15. Wir erstreben die Lösung bei der ursprünglichen Form der Frage.

Die Gesammtheit der Zahlenpaare $(i\varkappa)$, welche die Dreiecksseiten oder die Nachbarpaare in der Anordnung (E) bilden müssen, ordnen wir in der Weise in $n - 1$ Zeilen, dass wir in die erste Zeile [1] alle Paare $(i\varkappa)$ mit der Differenz $\varkappa - i = 1$, in die zweite [2] alle mit der Differenz $\varkappa - i = 2$ u. s. w. stellen:

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{array}{llllll} [1] & (1\,2) & (2\,3) & \ldots & (n-1,\, n) & (n\,1), \\ [2] & (1\,3) & (2\,4) & \ldots & (n-1,\, 1) & (n\,2), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [n-1] & (1\,n) & (2\,1) & \ldots & (n-1,\, n-2) & (n,\, n-1). \end{array}\right.$$

Dann erhält man ein Dreieck, wenn man Paare aus 3 Zeilen $[i]$, $[\varkappa]$, $[l]$ verbindet, bei denen

$$i + \varkappa + l \equiv 0 \text{ mod. } n,$$

also z. B. (1 2) aus [1] mit (2 4) aus [2] mit (4 1) aus $[n-3]$. Soll nun die Anordnung cyklisch werden, so muss das Vorkommen eines Dreiecks $(a\,b\,c)$ dasjenige der $n - 1$ andern

$$\begin{array}{lll} (a+1, & b+1, & c+1), \\ (a+2, & b+2, & c+2), \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (a+n-1, & b+n-1, & c+n-1) \end{array}$$

nach sich ziehen. Diese entstehen aber alle, indem man jedesmal denselben 3 Zeilen von (F), die zur Bildung von (a, b, c) dienten, in derselben Reihenfolge je ein Paar entnimmt. Es müssen also zunächst die Zeilen von (F) so zu je dreien zusammengefasst werden können, dass die Summe der Repräsentationszahlen der drei immer $\equiv 0 \bmod. n$ ist. Dies erfordert also einmal, dass $n-1$ durch 3 theilbar ist, und dann dass $1+2+\cdots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von n, also $n-1$ auch durch 2 theilbar ist.

Wir kommen also zunächst zu dem Resultat, dass für die Möglichkeit einer Anordnung (E) n *nothwendig* die Form haben muss

$$n = 6\lambda + 1.$$

Da nun von den regulären Fällen $n = 12\varkappa + 7$ der einzige ist, wo n diese Form hat, so sehen wir:

„*Höchstens in den Fällen* $n = 12\varkappa + 7$ *ist eine cyklische Anordnung* (E) *möglich*"

und gleichzeitig, wenn wir den Ausspruch des andern Theorems nur dadurch der Uebersichtlichkeit wegen modificiren, dass wir alle Zahlen, die $> \frac{n-1}{2}$ sind, durch die negativen, ihnen mod. n congruenten ersetzen:

„*Höchstens, wenn* $n = 12\varkappa + 7$, *ist es möglich, die Zahlen* $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}$ *derart in einen Cyklus zu ordnen, dass die beiden Nachbarn von* λ $\left(\lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{n-1}{2}\right)$ *bezw. um* λ *grösser sind als die von* $-\lambda$."

§ 5.

Herstellung einer cyklischen Anordnung für $n = 12\varkappa + 7$, wenn $\varkappa$ gewissen Bedingungen genügt.

16. Die Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ zu je dreien mit einer durch n theilbaren Summe muss aber noch eine andere Bedingung erfüllen, wenn sie wirklich zu einer cyklischen Anordnung (E) führen soll. Da nämlich die Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ nur die einzelnen Zeilen von (F) repräsentiren, so müssen in der gedachten Gruppirung die Zahlen noch innerhalb der einzelnen Zeilen von je

drei Elementen (die wir wieder als geschlossene Zeilen ansehen) so festgelegt werden können, dass, wenn man nun zur Dreiecksbildung gemäss dieser Gruppirung der Zeilen von (F) zu je dreien in bestimmter Folge schreitet, die $n-1$ Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze 1 z. B. einen *einzigen* Cyklus bilden, d. h. wenn man mit einem Dreieck $(1\alpha\beta)$ beginnt, woran sich $(1\beta\gamma)$, dann $(1\gamma\delta)$ schliesst u. s. w., so darf erst das $(n-1)^{\text{te}}$ Dreieck, etwa $(1\nu\alpha)$ wieder die Ecke α enthalten. Ist dies für *eine* Zahl, z. B. für 1, erfüllt, so gilt es für alle zufolge des cyklischen Charakters der Anordnung. Für die gedachte Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$ drückt sich diese Forderung folgendermassen aus: Geht man von einer Zeile $a\ b\ c$ (bei der also die Reihenfolge a, b, c abgesehen von cyklischer Verschiebung festgelegt ist) zu einer andern über, dadurch dass man die Zeile aufsucht, welche die Zahl $a+b$ enthält (Summe von a und der rechts daneben stehenden), dann von hier, wenn rechts von $a+b$ b' steht, zu der Zeile mit $a+b+b'$ u. s. w., so darf man erst beim $(n-1)^{\text{ten}}$ Schritt wieder zu der Ausgangszahl a zurückkehren.

Wir wollen nun unter Zugrundelegung einer *bestimmten*, besonders übersichtlichen Gruppirung der Zahlen $1, 2, \ldots, n-1$, bei der die Reihenfolge innerhalb der Zeilen zunächst noch nicht endgültig festgelegt ist, zeigen, dass, wenn n einer von zwei bestimmten Bedingungen genügt, und nur in diesen beiden Fällen die gewählte Gruppirung durch eine geeignete endgültige Festlegung innerhalb der Zeilen zu einer cyklischen Anordnung führt, welche selbst unmittelbar gegeben wird. Wir führen diese Untersuchung bei der allgemeineren Annahme, dass n die Form $6\lambda+1$ hat, so weit als möglich, um erst dann, wenn sich dies von selbst gebietet, die Voraussetzung $\lambda = 2\varkappa + 1$ hinzuzunehmen und so wieder zu dem speciell vorliegenden Fall zurückzukehren.

17. Wenn $n-1 = 6\lambda$, so lassen sich die Zahlen $1, 2, \ldots, 6\lambda$ der Forderung des Artikels 15 gemäss in folgender Weise gruppiren

$$
(G)\quad \left\{\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 6\lambda-2 \\
3 & 4 & 6\lambda-6 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
2\lambda-3 & 2\lambda-2 & 2\lambda+6 \\
2\lambda-1 & 2\lambda & 2\lambda+2 \\
 & & \\
2\lambda+1 & 4\lambda+1 & 6\lambda \\
2\lambda+3 & 4\lambda+3 & 6\lambda-4 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
4\lambda-3 & 6\lambda-3 & 2\lambda+8 \\
4\lambda-1 & 6\lambda-1 & 2\lambda+4
\end{array}\right.
$$

Diese Gruppirung (G) hat folgende Eigenschaften, von denen wir später Gebrauch zu machen haben, und deren Beweis so einfach ist, dass er wohl unterdrückt werden darf:

1) Die Summe von 3 nebeneinander stehenden Zahlen ist

in den λ ersten Zeilen $= n$,
in den λ letzten Zeilen $= 2n$.

2) die Summe zweier in Bezug auf die Mittellinie (die das ganze System der Höhe nach in 2 Hälften theilt) symmetrisch stehenden Zahlen ist

in der ersten Colonne $= 4\lambda$,
in der zweiten Colonne $= 6\lambda + 1$ $(= n)$,
in der dritten Colonne $= 2\lambda + 1$ (mod. n natürlich).

3) Die Summe je zweier Zahlen derselben Zeile kommt einmal in der Gruppirung vor. Jede Zahl ist die Summe eines und nur eines bestimmten Paares von Zahlen derselben Zeile.

4) Die Summe zweier Zahlen, welche in der ersten und dritten Colonne in gleicher Zeile stehen, ist diejenige Zahl der zweiten Colonne, welche in der zu jener obigen symmetrischen Zeile steht. — Die Summe zweier Zahlen, die in der ersten und zweiten Colonne nebeneinander stehen, ist eine Zahl der ersten Colonne, die Summe zweier Zahlen, die in der zweiten und dritten Colonne nebeneinander stehen, ist eine Zahl der dritten Colonne, und zwar, wenn $a\,b\,c$ eine Zeile und $a'\,b'\,c'$ diejenige andere ist, bei der

$$a' = a + b,$$

so ist gleichzeitig

$$c = b' + c'.$$

5) Geht man von einer Zeile $a\,b\,c$ zu einer andern dadurch über, dass man die Zeile wählt, welche die Summe irgend zweier dieser drei Zahlen enthält, so gelangt man von der zu $a\,b\,c$ symmetrisch stehenden Zeile $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$, $2\lambda + 1 - c$ bei demselben Fortschreitungsmodus auch zu der symmetrischen Zeile der vorher erreichten.

Geht man z. B. von $a\,b\,c$ zu der Zeile, die an erster Stelle $a + b$ hat, so gelangt man von $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$, $2\lambda + 1 - c$ durch Addition der beiden ersten Zahlen zu $4\lambda - (a + b)$ in der ersten Colonne, d. h. zu der symmetrischen Zahl von $a + b$ u. s. w.

18. Durchlaufen wir nun die Gruppirung (G), bei der wir uns die Reihenfolge innerhalb der Zeilen vorläufig so, wie sie geschrieben ist, festgelegt denken, in der vorher angedeuteten Weise, indem wir etwa beginnen mit 1, 2 aus der ersten Zeile, dann also 3, 4, dann 7, 8 u. s. w. folgen lassen, so schliesst sich diese Folge nach Eigen-

schaft 4) spätestens beim $2\lambda^{\text{ten}}$ Schritt dadurch, dass die Summe der beiden letzten Zahlen (es sind dies dann $2\lambda+1$, $4\lambda+1$) $\equiv 1 \bmod. n$ wird. Schliesst sie sich früher, dann beginnen wir auf's Neue mit einem nebeneinander stehenden Zahlenpaar der ersten und zweiten Colonne, das noch nicht benutzt ist, u. s. w., bis alle Paare von Zahlen aus der ersten und zweiten Colonne verbraucht sind, sodass wir aus diesen eine oder mehrere solche geschlossenen Folgen bekommen. Nach Eigenschaft 5) folgt nun, dass eine solche Folge entweder „in sich selbst symmetrisch" ist, d. h. zu jedem Zahlenpaar a, b auch das symmetrische $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$ enthält, und zwar so, dass, wenn auf a, b a_1, b_1 folgt, dann auch auf $4\lambda - a$, $6\lambda + 1 - b$, das Paar $4\lambda - a_1$, $6\lambda + 1 - b_1$ folgt, — oder es existirt eine zu jener Folge in diesem Sinn symmetrische andere. Beidemal ist also die Zahl der Zeilen, die verbraucht wurde für die eine in sich symmetrische oder für das Paar symmetrischer Folgen, eine gerade $= 2\mu$.

Um nun zu erkennen, in welcher Weise sich die andern Paare (d. h. die Paare b, c und c, a, wobei wir die Buchstaben a, b, c bezw. immer für die erste, zweite, dritte Colonne festhalten) dieser 2μ Zeilen zu Folgen zusammenschliessen, — denn man wird gleichzeitig sehen, dass die eventuell übrigen Zeilen dabei gar nicht mitspielen, — bezeichnen wir die 2μ Paare aus der ersten und zweiten Colonne, wie sie sich als aufeinanderfolgend ergeben haben, durch

$$a_1 b_1,\; a_2 b_2,\; a_3 b_3,\; \ldots,\; a_\mu b_\mu$$

und die dazu bezw. symmetrischen durch

$$a_1' b_1',\; a_2' b_2',\; a_3' b_3',\; \ldots,\; a_\mu' b_\mu'.$$

Dann ist also

$$a_1 + b_1 = a_2,\quad a_2 + b_2 = a_3,\; \ldots,\; a_{\mu-1} + b_{\mu-1} = a_\mu,$$
$$a_1' + b_1' = a_2',\quad a_2' + b_2' = a_3',\; \ldots,\; a_{\mu-1}' + b_{\mu-1}' = a_\mu$$

und ferner *entweder* a) $a_\mu + b_\mu = a_1'$, $a_\mu' + b_\mu' = a_1$,

oder b) $a_\mu + b_\mu = a_1$, $a_\mu' + b_\mu' = a_1'$.

Beginnt man nun eine andere Folge etwa mit $b_\mu c_\mu$, so schliesst sich daran nach Eigenschaft 4) $c_{\mu-1}\, a_{\mu-1}$, dann $b_{\mu-1}'\, c_{\mu-1}'$ u. s. w. Also es folgen auf einander

$$\begin{array}{lll} b_\mu & c_\mu & \\ & c_{\mu-1} & a_{\mu-1} \\ b_{\mu-1}' & c_{\mu-1}' & \\ & c_{\mu-2}' & a_{\mu-2}' \\ b_{\mu-2} & c_{\mu-2} & \end{array}$$

u. s. w.

Ist nun I. μ *ungerade*, so kommt schliesslich

$$b_1 c_1$$

und dann im Falle a) $\quad c'_\mu a'_\mu,$

worauf wieder b_μ folgt, also die Reihe sich mit 2μ Paaren schliesst, deren jedes einer andern der 2μ Zeilen von (G) entstammt. Da die Folge nicht in sich selbst symmetrisch ist, bekommen wir sogleich eine zweite, wenn einfach alle gestrichenen Buchstaben durch die ungestrichenen ersetzt werden und umgekehrt.

Im Fall I. b) dagegen folgt auf $b_1 c_1$, $c_\mu a_\mu$, dann $b'_\mu c'_\mu$, $c'_{\mu-1} a'_{\mu-1}$ u. s. w. symmetrisch wie vorher, bis die Reihe sich nach $c'_\mu a'_\mu$ schliesst. In diesem Fall hat man also eine sich selbst symmetrische Folge von 4μ Paaren, 2 aus jeder der 2μ Zeilen; und wenn man irgend 2μ aufeinander folgende Paare der Folge nimmt, so hat man damit Vertreter aller 2μ Zeilen.

Ist II. μ *gerade*, so kommt man, wie vorher mit $b_\mu c_\mu$ anfangend, zuerst zu

$$b'_1 c'_1$$

worauf im Fall a)

$$\begin{array}{l} c_\mu \quad a_\mu \\ b'_\mu \ c'_\mu \\ c'_{\mu-1} a'_{\mu-1} \\ \text{u. s. w.} \end{array}$$

also die symmetrische Wiederholung des Anfangs folgt, bis die Reihe sich schliesst wie im Fall I. b).

Im Fall b) dagegen folgt auf

$$\begin{array}{l} b'_1 \ c'_1 \\ c'_\mu a'_\mu \end{array}$$

und dann schliesst die Reihe schon mit b_μ nach 2μ Schritten, und es giebt wieder eine zweite ihr symmetrische.

Fassen wir aus dieser Betrachtung zusammen, was für das Folgende wichtig ist, so lautet es:

„*Jeder in sich selbst symmetrischen Folge oder jedem Paar symmetrischer Folgen von* 2μ *Zahlenpaaren aus den beiden ersten Colonnen von* (G) *treten an die Seite eine in sich selbst symmetrische Folge oder ein Paar symmetrischer Folgen von Zahlenpaaren aus denselben Zeilen der zweiten und dritten und aus der dritten und ersten Colonne, sodass alle* 6μ *Zahlenpaare dieser* 2μ *Zeilen erschöpft werden.*“

19. Da wir nun die Fälle aufsuchen, in denen wir aus der ganzen Gruppirung (G) nur eine einzige solche geschlossene Folge erhalten, aber nur noch innerhalb der Zeilen von (G) umstellen wollten, so ist nach dem Vorstehenden klar, dass jene 2μ Zeilen die ganze Gruppirung (G)

erschöpfen müssen, d. h. dass $\mu = \lambda$ sein muss. Denn sonst könnte man ja auf keine Weise durch Umstellung innerhalb der Zeilen die aus den 2μ Zeilen herrührenden geschlossenen Folgen mit den noch ausserdem vorhandenen in Verbindung bringen. Dies wird nach dem Folgenden noch klarer hervortreten, wo wir untersuchen, unter welchen Bedingungen und auf welche Art die verschiedenen Folgen, die wir aus den 2μ Zeilen zunächst erhalten, durch blosse Umstellung innerhalb der Zeilen zu einer einzigen zusammenzuschliessen sind.

Fall I, a). — Wir haben drei Folgen, deren jede aus jeder Zeile ein Paar enthält. Nehmen wir aber in einer Zeile von (G) eine wesentliche Umstellung vor, d. h. nicht eine nur cyklische Aenderung, so schliessen sich die 3 Folgen zu einer einzigen zusammen. In der That, ist $a\ b\ c$ etwa die Zeile in der alten Ordnung, so hat man in der einen der drei geschlossenen Reihen die Aufeinanderfolge

$$\cdot\cdot\,|\,a, b\,|\,a + b, \cdot\,|\,\cdot\cdot$$

in der zweiten

$$\cdot\cdot\,|\,b, c\,|\,b + c, \cdot\,|\,\cdot\cdot$$

in der dritten

$$\cdot\cdot\,|\,c, a\,|\,c + a, \cdot\,|\,\cdot\cdot.$$

Wird nun $a\ b\ c$ in $a\ c\ b$ umgestellt, so wird aus $|\,a\ b\,|$ $|\,a\ c\,|$; denn a bleibt ja als durch das vorhergehende Paar bedingt an seiner Stelle stehen; aus $|\,b\ c\,|$ wird $|\,b\ a\,|$, aus $|\,c\ a\,|$ wird $|\,c\ b\,|$. Beginnt man nun die erste Folge mit $|\,a + b, \cdot\,|\cdots$, so kommt man endlich zu $|\,a\ c\,|$; daran schliesst sich jetzt $|\,c + a, \cdot\,|\cdots$ bis $|\,c\ b\,|$, daran $|\,b + c, \cdot\,|\cdots$ bis $|\,b\ a\,|$ und hieran wieder der Anfang $|\,a + b, \cdot\,|\cdots$, womit die Behauptung erwiesen ist.

Es werden also hierbei gleichsam drei gleich grosse Kreise, auf deren Peripherie wir uns die drei Folgen aufgetragen denken können, aufgeschnitten, aber gleichzeitig die 6 Enden anders als vorher mit einander verbunden und zwar in diesem Falle so, dass ein einziger neuer Kreis entsteht. Es sei gestattet, der Kürze wegen im Folgenden diese bildliche Ausdrucksweise zu gebrauchen, die jeden Augenblick wieder durch die rein arithmetische ersetzt werden kann.

Fall I, b). — Zwei einander symmetrische Folgen aus der ersten und zweiten Colonne und eine in sich selbst symmetrische aus den übrigen Zahlenpaaren derselben Zeilen.

Wir können hier keinen Schnitt legen, der alle drei Kreise, von denen 2 einander gleich sind, während die Peripherie des dritten doppelt so lang ist als die der beiden andern zusammen, gleichzeitig trifft. Legt man aber erst einen Schnitt, der den einen der beiden kleinen Kreise einmal, den grossen also zweimal schneidet, so schliessen sich die Stücke zu 2 Kreisen zusammen, deren einer aus der Hälfte des früheren grossen, deren anderer aus der anderen Hälfte und dem

kleinen Kreis besteht. — Die drei jetzt vorhandenen Kreise können also durch einen zweiten Schnitt gleichzeitig getroffen und daher (ebenso wie vorher) zusammengeschlossen werden.

Fall II, a). — Zwei Kreise, deren einer alle 2μ Zeilen einmal, deren zweiter alle zweimal berührt.

Jeder beliebige Schnitt wird beide Kreise treffen, nämlich den kleinen einmal, den grossen zweimal; aber die Stücke schliessen sich wieder zu 2 Kreisen zusammen, und eine Wiederholung kann natürlich nur immer wieder zu demselben Resultat führen.

In diesem Fall ist also die Herstellung einer einzigen geschlossenen Folge aus der Gruppirung (G) unmöglich.

Fall II, b). — Zwei gleich grosse Kreise, welche zusammen alle Zeilen einmal und 2 andere doppelt so grosse Kreise, deren jeder alle Zeilen einmal berührt.

Durch jeden beliebigen Schnitt wird einer der beiden kleinen Kreise mit den beiden grossen zusammengeschlossen, sodass nun wieder dieselbe Situation wie im vorigen Fall herrscht; auch hier ist also die Herstellung einer einzigen Folge unmöglich.

Fall I, in dessen beiden Unterfällen die Ausführung möglich war, ist aber gerade der unsrige, da bei uns $\lambda = 2\varkappa + 1$, also ungerade ist. Das Resultat dieser Betrachtung ist also dieses:

„*Wenn bei einer Zahl* $n = 12\varkappa + 7$ *die Gruppirung* (G) *bewirkt, dass die Zahlenpaare der beiden ersten Colonnen sich zu einer einzigen Folge zusammenschliessen oder zu zwei einander symmetrischen Folgen, — und nur in diesen beiden Fällen, — wird durch eine blosse Umstellung in einer, bezw. in zwei Zeilen die Gruppirung erreicht, welche eine cyklische Anordnung* (E) *liefert.*“

20. Es bleibt daher nur noch die Frage zu beantworten: Wie muss die Zahl $n = 12\varkappa + 7$ beschaffen sein, damit die beiden ersten Colonnen von (G) eine einzige oder zwei einander symmetrische Folgen von Zahlenpaaren ergeben?

Zu dem Ende beobachten wir, wie bei der angegebenen Art des Fortschreitens von Paar zu Paar in der Gruppirung

$$
(\mathrm{H}) \quad \left\{ \begin{array}{ccc}
1 & 2 & 12\varkappa+4 \\
3 & 4 & 12\varkappa \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
4\varkappa+1 & 4\varkappa+2 & 4\varkappa+4 \\
 & & \\
4\varkappa+3 & 8\varkappa+5 & 12\varkappa+6 \\
4\varkappa+5 & 8\varkappa+7 & 12\varkappa+2 \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
8\varkappa+3 & 12\varkappa+5 & 4\varkappa+6
\end{array} \right.
$$

(die nur eine Wiederholung der Gruppirung (G) für $\lambda = 2\varkappa + 1$ ist) die Zahlen der zweiten Colonne auf einander folgen, wenn man z. B. mit dem Paar 1, 2 anfängt. Es folgen dann 3, 4; 7, 8; 15, 16; u. s. w., also in der zweiten Colonne die Zahlen 2, 4, 8, 16, u. s. w. In der That folgen die Zahlen der zweiten Colonne auch weiterhin als die Potenzen von 2 aufeinander, wenn man diese mod. $(4\varkappa + 3)$ nimmt und jedesmal, wenn der kleinste Rest von 2^λ mod. $(4\varkappa + 3)$ ungerade wird, $8\varkappa + 4$ addirt.

Zunächst sieht man, dass die zweite Colonne wirklich gerade die Zahlen $1, 2, \ldots, 4\varkappa + 2$, die ungeraden nur um $8\varkappa + 4$ vermehrt, enthält. Ist nun a, eine Zahl der zweiten Colonne, in der angegebenen Weise einer bestimmten Potenz von 2 z. B. 2^μ zugeordnet, d. h. so, dass, wenn a der oberen Hälfte angehört,

$$a \equiv 2^\mu \text{ mod. } (4\varkappa + 3),$$

im andern Fall aber

$$a - (8\varkappa + 4) \equiv 2^\mu \text{ mod. } (4\varkappa + 3)$$

ist, so zeigt die folgende Ueberlegung, dass man dann von a bei unserer Art fortzuschreiten zu einer Zahl der zweiten Colonne gelangt, welche in derselben Weise $2^{\mu+1}$ zugeordnet ist. Dabei sind 4 Fälle zu unterscheiden:

1) a sei eine Zahl der oberen Hälfte; $a \equiv 2^\mu$; links von a steht $a - 1$.

α) $2a - 1$ steht auch noch in der oberen Hälfte; dann ist der rechte Nachbar von $2a - 1$, d. h. die in der zweiten Colonne auf a folgende Zahl, $= 2a$, also eine Zahl, die $\equiv 2^{\mu+1}$.

β) $2a - 1$ steht schon in der unteren Hälfte; dann ist ihr rechter Nachbar $2a + 4\varkappa + 1$. Subtrahirt man aber davon $8\varkappa + 4$, so ist die resultirende Zahl $2a - (4\varkappa + 3)$ wieder $\equiv 2^{\mu+1}$.

2) a sei eine Zahl der unteren Hälfte; $a - (8\varkappa + 4) \equiv 2^\mu$; links von a steht $a - (4\varkappa + 2)$. Auf das Paar

$$a - (4\varkappa + 2),\ a$$

folgt aber als Zahl der ersten Colonne

$$2a - (4\varkappa + 2) - (12\varkappa + 7) = 2a - (16\varkappa + 9);$$

denn da die Summe zweier Zahlen einer Zeile der beiden ersten Colonnen in der untern Hälfte stets $> 12\varkappa + 7$, musste $12\varkappa + 7$ substrahirt werden.

α) $2a - (16\varkappa + 9)$ steht in der oberen Hälfte; dann ist der rechte Nachbar, also die in der zweiten Colonne auf a folgende Zahl

$$2a - (16\varkappa + 9) + 1 \equiv 2^{\mu+1}.$$

β) $2a - (16\varkappa + 9)$ stehe in der untern Hälfte; dann ist ihr rechter Nachbar

$$2a - (16\varkappa + 9) + 1 + 4\varkappa + 1 = 2a - (12\varkappa + 7).$$

Subtrahirt man davon $8\varkappa + 4$, so ist die resultirende Zahl

$$2a - (20\varkappa + 11) \equiv 2^{\mu+1}.$$

Nun sind die zuerst auftretenden Zahlen der zweiten Colonne $2, 4, 8, \ldots$ wirklich in der angegebenen Weise den Potenzen von 2 zugeordnet; folglich ist mit der vorstehenden Betrachtung der vier möglichen Fälle unsere Behauptung erwiesen.

Dann aber können wir die zu Anfang dieses Artikels aufgeworfene Frage sogleich beantworten. Die Folge, die mit $|1, 2|$ beginnt, schliesst sich, wenn man zu dem Paar

$$4k + 3, \quad 8\varkappa + 5$$

gelangt ist, also zu der Zahl $8\varkappa + 5$ der zweiten Colonne, die um $8\varkappa + 4$ vermindert $= 1$ wird. Die beiden ersten Colonnen von (H) liefern also eine einzige Folge, wenn erst die $(4\varkappa + 2)^{\text{te}}$ Potenz von 2 $\equiv 1 \bmod. (4\varkappa + 3)$ wird, d. h. wenn 2 primitive Wurzel von $4\varkappa + 3$ ist, und sie liefern zwei einander symmetrische Folgen, wenn $2^{2\varkappa+1}$ als niedrigste Potenz von 2 $\equiv 1 \bmod. (4\varkappa + 3)$ wird. Dass diese beiden Folgen nämlich zu einander und nicht in sich selbst symmetrisch sind, geht einfach daraus hervor, dass die Zahl ihrer Glieder $2\varkappa + 1$, ungerade, ist.

Das Resultat des gegenwärtigen Paragraphen ist also dieses:

„*Wenn in* $n = 12\varkappa + 7$ $\varkappa$ *der einen oder der andern von den beiden obigen Bedingungen genügt, und nur in diesen Fällen führt die Gruppirung* (H) *zu einer cyklischen Anordnung* (E)."

Schluss.

21. Fassen wir die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung kurz zusammen, so sind es die folgenden:

Für jeden Werth von n gilt Formel (A).

Gleichung (B) *gilt sicher bis einschliesslich* $n = 12$, *bezw. Gleichung* (C) *bis einschliesslich* $p = 6$.

Die Lösung des Problems der Nachbargebiete (abgesehen von den Fällen $n = 5, 6$) *durch eine cyklische Anordnung* (E) *und die Lösung des damit identischen Problems, ist höchstens möglich, wenn n die Form* $12\varkappa + 7$ *hat.*

Die Lösung ist wirklich herstellbar, wenn dabei $\varkappa$ *so beschaffen ist, dass entweder*

a) 2 *primitive Wurzel von* $(4\varkappa + 3)$ *ist*

oder

b) $2^{2\varkappa+1}$ *als niedrigste Potenz von* 2 $\equiv 1 \bmod. (4\varkappa + 3)$ *wird.*

Für alle diese Werthe von n gelten somit die Gleichungen (B) *und* (C).

Zur Herstellung der cyklischen Anordnung dient die Gruppirung (H), *bei der im Falle* a) *nur eine Zeile geändert wird, etwa die erste*

unter der Mittellinie, im Falle b) *noch eine zweite, etwa die letzte Zeile. Fasst man die Zahlen von* (H) *dann als Repräsentanten der Zeilen von* (F) *auf, und verbindet deren Elemente entsprechend, so entsteht eine Anordnung* (E).

Die genannten Fälle erschöpfen alle, in denen (H) *zu einer Anordnung* (E) *führt.*

Als Beispiel möge dienen für a)

$$n = 31.$$

Die Gruppirung (H) ist:

1	2	28
3	4	24
5	6	20
7	8	16
9	10	12
11	21	30
13	23	26
15	25	22
17	27	18
19	29	14

$\varkappa = 2$; $4\varkappa + 3 = 11$; 2 primitive Wurzel mod. 11.

Nach Umstellung der Zeile 11 21 30, was durch den Bogen angedeutet wird, führt die Gruppirung zu einer einzigen geschlossenen Folge von Paaren:

| 1, 2 | 3, 4 | 7, 8 | 15, 25 | 9, 10 | 19, 29 | 17, 27 | 13, 23 | 5, 6 | 11, 30 |
10, 12 | 22, 15 | 6, 20 | 26, 13 | 8, 16 | 24, 3 | 27, 18 | 14, 19 | 2, 28 | 30, 21 |
20, 5 | 25, 22 | 16, 7 | 23, 26 | 18, 17 | 4, 24 | 28, 1 | 29, 14 | 12, 9 | 21, 11 |.

Hieraus ergiebt sich Zeile (31) der cyklischen Anordnung (E), indem man aus jedem Paar immer die erste Zahl nimmt:

(31) 1 3 7 15 9 19 17 13 5 11 10 22 6 26 8 24 27 14 2 30 20 25
16 23 18 4 28 29 12 21.

Gleichzeitig hat man hierin eine Lösung des äquivalenten Problems, dem man auch die in Art. 15 genannte Form geben kann.

Als Beispiel für Fall b) diene:

$$n = 19.$$

Die Gruppirung (H) ist

1	2	16
3	4	12
5	6	8
7	13	18
9	15	14
11	17	10

$\varkappa = 1$; $4\varkappa + 3 = 7$; bereits $2^3 \equiv 1$ mod. 7; nach den angedeuteten zwei Umstellungen führt die Gruppirung zu einer einzigen geschlossenen Folge von Paaren:

$$\| 1,2 \mid 3,4 \mid 7,18 \mid 6,8 \mid 14,9 \mid 4,12 \mid 16,1 \mid 17,11 \mid 9,15 \mid 5,6 \mid 11,10 \mid 2,16 \mid 18,13 \mid 12,3 \mid 15,14 \mid 10,17 \mid 8,5 \mid 13,7 \|.$$

Also Zeile 19) von (E) wird:

19) 1 3 7 6 14 4 16 17 9 5 11 2 18 12 15 10 8 13

und die Anordnung der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm 9$ mit der angegebenen Eigenschaft:

$$1, 3, 7, 6, -5, 4, -3, -2, 9, 5, -8, 2, -1, -7, -4, -9, 8, -6.$$

Wenn man für die niedrigsten Werthe von $\varkappa$ untersucht, welche der Zahlen $12\varkappa + 7$ die Bedingung a), welche die Bedingung b) erfüllen, so ergiebt sich: das Erstere gilt von $\varkappa = 0$, $n = 7$; $\varkappa = 2$, $n = 31$; $\varkappa = 4$, $n = 55$; dann erst von $\varkappa = 14$, $n = 175$ u. s. w., das Letztere von $\varkappa = 1$, $n = 19$; $\varkappa = 5$, $n = 67$; $\varkappa = 11$, $n = 139$; u. s. w. — Allgemein lässt sich zeigen, dass wenn $\varkappa$ ein Multiplum von 3 ist, die Gruppirung (H) nicht zu einer Lösung führt.

Wir haben also zwar alle Fälle erschöpft, in denen die Gruppirung (H) zu einer Lösung des Problems durch eine cyklische Anordnung führt, aber es bleibt noch die Frage offen, ob nicht eine *andere* Gruppirung als (H) noch in *den* Fällen $n = 12\varkappa + 7$ zum Ziel führt, wo (H) versagt. Hierzu ist übrigens zu bemerken, dass man aus (H) sogleich $n - 2$ andere Gruppirungen, die alle genau dasselbe wie (H), nicht mehr und nicht weniger, leisten, ableiten kann, indem man alle Zahlen in (H) einmal mit 2, einmal mit 3 u. s. w., einmal mit $n - 1$ multiplicirt und mod. n nimmt.

Giessen, November 1890.

Ueber lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden.

Von

P. A. Nekrassoff in Moskau.

Allen Mathematikern sind bestimmte Typen von linearen Differentialgleichungen bekannt, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden können. Derart ist z. B. die Gleichung von Laplace

$$(1)\quad (a_n + b_n x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{dx} + (a_0 + b_0 x)\, y = 0,$$

ferner die hypergeometrische Gleichung von Gauss und die allgemeinere Gleichung von der Form:

$$(2)\quad Q(x)\frac{d^n y}{d^n x} - \frac{h}{1}\, Q'(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \frac{h(h+1)}{1\,.\,2}\, Q''(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \cdots =$$

$$R(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{h+1}{1}\, R'(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \frac{(h+1)(h+2)}{1\,.\,2}\, R''(x)\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} + \cdots,$$

wo $Q(x)$ und $R(x)$ in Bezug auf x ganze Polynome sind und dabei der Grad eines der Polynome $Q(x)$ und $xR(x)$ gleich n, des anderen aber nicht grösser als n ist*).

Goursat hat in einer Abhandlung im zweiten Bande der *Acta Mathematica* die Anzahl der linearen Differentialgleichungen erweitert, welche durch bestimmte Integrale integrirt werden**). Er fand neue Typen von Gleichungen, welche zu dieser Gruppe gehören. In der That hat er auf Seite 41—48 seiner Abhandlung eine Methode zur

*) Die Gleichung (1) ist von Laplace in seiner Théorie analytique des probabilités betrachtet worden; die Gleichung (2) von Pochhammer im 71. Bande von Crelles Journal. Eine neue bemerkenswerthe Bearbeitung der Theorie der Gleichungen (1) und (2) hat Jordan in seinem Cours d'analyse de l'école polytechnique (t. III, p. 241—274, 1887. Paris) gegeben.

**) E. Goursat, Sur une classe des fonctions représentées par des intégrales définies (Acta Mathematica, 2 : 1, p. 1—70, 1883. Stockholm).

Bildung einer linearen Differentialgleichung gegeben, welche sich durch Integrale von der Form

$$y = \int_v^w z\,du \tag{3}$$

integriren lässt, wo

$$z = (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_n)^{b_n - 1} (u - u_1)^{\lambda_1 - 1} \ldots (u - u_p)^{\lambda_p - 1}$$

und $a_1, \ldots, a_n$ constante Grössen, $u_1, \ldots, u_p$ Functionen der Variablen x sind. Die Integrationsgrenzen v und w des Integrales (3) werden unter den Grössen $a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots, u_p$ gewählt.

In der vorliegenden Abhandlung, welche ihrem Inhalte nach mit der erwähnten Arbeit von Goursat in nahem Zusammenhange steht, erweitere ich die Zahl der linearen Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integrirt werden, noch mehr*). Ich gebe in der That darin eine Methode an zur Bildung einer allgemeineren linearen Differentialgleichung, welche integrirt werden kann mit Hilfe eines Integrals von der Form:

$$y = \int z\, e^{\varphi(x,u)}\, \Theta(x, u)\, du, \tag{4}$$

wo z die oben angegebene Bedeutung hat, $\Theta(x, u)$ eine beliebige in Bezug auf u ganze Function, $\varphi(x, u)$ eine beliebige in Bezug auf u rationale Function ist, und die Integrationswege der Integrale von der Form (4) auf bekannte Weise durch die Grössen $a_1, \ldots, a_n, u_1, \ldots, u_p$ und die Coefficienten der Function $\varphi(x, u)$ bedingt werden**). Die auf solche Weise gebildete lineare Differentialgleichung umfasst die oben angegebene Gleichung Goursat's so wie die Gleichungen (1) und (2) als Specialfälle. Die Gleichung Goursat's dagegen umfasst durchaus nicht die Gleichung (1) und nicht immer die Gleichung (2). Die hiermit angeführte Eigenschaft ist indess nicht die einzige, durch welche sich die vorliegende Abhandlung von derjenigen Goursat's unterscheidet.

Unter anderem unterscheidet sich die vorliegende Abhandlung von derjenigen Goursat's durch die Wahl der sogenannten Grund-

---

*) Die in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Resultate wurden am 11. Januar 1890 auf der VIII. russischen Naturforscherversammlung in St. Petersburg mitgetheilt (s. Abhandlungen der VIII. russischen Naturforscher- und Aerzteversammlung, Abtheilung I, Seite 12—15, St. Petersburg 1890) und sind ausführlicher in der *Mathematischen Sammlung* der Moskauer Mathematischen Gesellschaft (Bd. XV, Heft 2) auseinandergesetzt.

**) Die hiermit eingeführten Bezeichnungen, welche den bei Goursat benutzten entsprechen, gebrauche ich nur in der Einleitung zur Vergleichung seiner Resultate mit den meinigen. Sonst aber benutze ich andere Bezeichnungen.

Integrationswege, welche auch im Falle $\varphi(x, u) = 0$ und $\Theta(x, u) = 1$, d. h. wenn die zu integrirenden Functionen in den Integralen (3) und (4) einander gleich sind, mit den bei Goursat gebrauchten Wegen nicht übereinstimmen*). Die in der vorliegenden Abhandlung benutzte Wahl der Grund-Integrationswege macht es mir möglich viele Einschränkungen zu vermeiden, überhaupt die aufgestellten Fragen zu erweitern, ihre Lösung auf festere Grundlagen zu stellen und diesen Lösungen solche mannigfaltige Formen zu geben, wie sie sich bei Goursat nicht finden. Die Wichtigkeit dieser Wahl der Grund-Integrationswege besteht nicht nur darin, dass Integrale der von uns betrachteten Art, bezogen auf diese Integrationswege, *immer möglich* sind, sondern auch darin, dass diese Integrationswege immer den weiter unten anzugebenden Bedingungen (7) und (8) genügen, welche in der vorliegenden Theorie eine wichtige Rolle spielen. Auf diesen Bedingungen beruht aber die von mir angegebene Methode zur Bildung von linearen Differentialgleichungen (§ III), welche mittelst bestimmter Integrale von der Form (4) integrirt werden. Eben diese Bedingungen bilden die Grundlage zur Lösung der Frage der Vereinfachung und Umformung der Integrale von der Form (4) (§ II).

Ferner unterscheidet sich die vorliegende Abhandlung von derjenigen Goursat's durch die neue Darlegung der analytischen Eigenschaften der Functionen der Variablen x, welche sich durch bestimmte Integrale ausdrücken lassen, welche die Variable x unter dem Integralzeichen als Parameter enthalten. Während Goursat bei der Untersuchung solcher Functionen die Querschnitte („coupures")

---

*) Schon Riemann, von dem die moderne Theorie der linearen Differentialgleichungen ausgeht, bedient sich, wenn er hypergeometrische Functionen durch Integrale ausdrücken will, geschlossener und geöffneter Integrationswege (s. Werke, pag. 77, 404). Es muss jedoch bemerkt werden, dass die Integrationswege Riemann's den wichtigen weiter unten (in § I) unter (7) und (8) angegebenen Bedingungen nicht entsprechen. Letztere Bemerkung gilt übrigens, wie mir Hr. Klein mittheilt, nicht für die Integrationswege, welche Riemann in der Theorie der Abel'schen Integrale zur Definition der Perioden benutzt.

Ich muss ferner erwähnen, dass Jordan im III. Bande seines *Cours d'analyse* bei der Integration der *speciellen* Gleichungen (1) und (II) mittelst bestimmter Integrale mit Vortheil dieselben Wege benutzt, welche in vorliegender Abhandlung als „Grundwege" bezeichnet werden (§ I, (11)).

Die Eigenschaften derjenigen Integrale, welche auf die in der Folge durch die Symbole von der Form: $[(z'z''\bar{z}'\bar{z}'')]$ bezeichneten Wege bezogen sind, sind ausführlich von Pochhammer untersucht worden in seinen Abhandlungen: 1) Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf (diese Annalen, Band 35, 1889), 2) Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve (diese Annalen, Band 37, 1890), andererseits von mir im Zusammenhang mit den Symbolen der *allgemeinen Differentiation* (Mathem. Sammlung, Moskau, Band 14, Heft 1, 1888).

von Hermite benützt, vermeide ich überall deren Anwendung, indem ich die Integrationswege als biegsame, dehnbare und zusammendrückbare, leichtbewegliche *Fäden* betrachte (§ V), welche sich zugleich mit der Aenderung von x deformiren, indem dieselben fortgesetzt gespannt erhalten werden mittelst *fester cylindrischer Stifte*, deren Axen senkrecht zu der Ebene der Integrationsvariablen durch besondere Punkte der zu integrirenden Function gehen*). Die auf diesen Vorstellungen ruhende Methode zur Untersuchung von Functionen, welche durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden, hat ihre besonderen Vorzüge, und ist unter anderem einigen Einschränkungen nicht unterworfen, welche der Goursat'schen Methode eigen sind. Ausführlicher wird dies in § V, Anmerkung 2 der vorliegenden Abhandlung zur Sprache gebracht.

Nachdem ich so meine Resultate denjenigen von Goursat gegenübergestellt habe, sehe ich mich verpflichtet der Abhandlung Goursat's volle Anerkennung zukommen zu lassen.

In § IV sind als erklärende Beispiele für die neue Theorie zwei zu den neuen Typen gehörende lineare Differentialgleichungen in ihrer endgiltigen Form gegeben. Dieselben werden sich wohl bis jetzt noch nirgends in der mathematischen Literatur vorfinden.

Indem ich vorliegende Untersuchungen über die Theorie der linearen Differentialgleichungen veröffentliche, möchte ich betonen, dass derartigen Untersuchungen neben der gewöhnlichen Theorie der Integration der linearen Differentialgleichungen mittelst unendlicher Reihen von zweifellosem Nutzen scheinen. Die überaus complicirte Berechnung dieser Reihen (besonders im Falle sogenannter irregulärer Integrale) macht es allgemein wünschenswerth, die Lösung der linearen Differentialgleichungen durch andere Methoden zu versuchen. Und unter diesen Methoden scheint diejenige der bestimmten Integrale, die von derjenigen der unendlichen Reihen so sehr verschieden ist, um so mehr besondere Aufmerksamkeit zu verdienen, als die Lösungen, welche sie im Falle ihrer Anwendbarkeit giebt, besonders elegant sind.

---

*) Wie mir Hr. Klein mittheilt, gehen die Anfänge auch dieser Anschauungsweise wieder auf Riemann zurück, der von ihr beispielsweise beim Studium der oben erwähnten bestimmten Integrale Gebrauch machte, durch welche er die Perioden der Abel'schen Integrale definirte. Es ist dies aber kaum in weiteren Kreisen beachtet worden. Doch enthalten die von mir vermöge der im Texte angegebenen Methode untersuchten bestimmten Integrale den Parameter x in einer complicirteren Art, als die von Riemann betrachteten Abel'schen Integrale.

§ I.

Jordan'sche Grund-Integrationswege.

Es sei:

$$(5)\qquad f=\left\{\begin{array}{l}(z-z_1)^{\lambda_1-1}(z-z_2)^{\lambda_2-1}\cdots(z-z_k)^{\lambda_k-1}\\ \times(z-\xi)^{a-1}e^{\frac{u_1}{z-\xi}+\frac{u_2}{(z-\xi)^2}+\cdots+\frac{u_p}{(z-\xi)^p}}\\ \times(z-\eta)^{b-1}e^{\frac{v_1}{z-\eta}+\frac{v_2}{(z-\eta)^2}+\cdots+\frac{v_q}{(z-\eta)^q}}\\ \times(z-\zeta)^{c-1}e^{\frac{w_1}{z-\zeta}+\frac{w_2}{(z-\zeta)^2}+\cdots+\frac{w_r}{(z-\zeta)^r}}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;,\end{array}\right.$$

so dass

$$\begin{aligned}(5')\quad \lg f=&(\lambda_1-1)\lg(z-z_1)+(\lambda_2-1)\lg(z-z_2)+\cdots+(\lambda_k-1)\lg(z-z_k)\\ &+(a-1)\lg(z-\xi)+\frac{u_1}{z-\xi}+\cdots+\frac{u_p}{(z-\xi)^p}\\ &+(b-1)\lg(z-\eta)+\frac{v_1}{z-\eta}+\cdots+\frac{v_q}{(z-\eta)^q}\\ &+(c-1)\lg(z-\zeta)+\frac{w_1}{z-\zeta}+\cdots+\frac{w_r}{(z-\zeta)^r}\\ &+\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ &\;\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{aligned}$$

Dabei setzen wir voraus, dass keine der Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, a, b, c, \ldots$ oder auch die Grösse $\lambda_1+\cdots+\lambda_k+a+b+c+\cdots$ eine ganze Zahl oder Null ist. Ferner setzen wir:

$$(6)\qquad y=\int\limits_L f\Phi\,dz,$$

wo

$$(6')\qquad \Phi=\varrho_0+\varrho_1 z+\cdots+\varrho_\tau z^\tau;$$

L bedeutet hier den Integrationsweg und dieser soll jetzt so gewählt werden, dass *erstens* der Bedingung genügt wird:

$$(7)\qquad \int\limits_L\frac{d}{dz}\left[\frac{f\varphi}{(z-z_1)^{m_1}\cdots(z-z_k)^{m_k}(z-\xi)^{\mu}(z-\eta)^{\nu}(z-\zeta)^{\sigma}\cdots}\right]dz=0$$

(darin ist φ eine beliebige ganze Function von z, und $m_1, \ldots, m_k, \mu, \nu, \sigma, \ldots$ sind beliebige ganze Zahlen oder gleich Null), und dass *zweitens* das Differentiiren der Function y nach den Variablen

$z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \zeta, w_1, \ldots, w_r, \ldots, \varrho_0, \ldots, \varrho_\tau$ durch das Differentiiren der zu integrirenden Function f unter dem Integralzeichen ersetzt werden kann, d. h. dass die Gleichungen bestehen:

$$(8) \qquad \frac{dy}{dz_1} = \int\limits_L \frac{df}{dz_1} \Phi\, dz, \ldots, \frac{d^2y}{d\xi\, dv_1} = \int\limits_L \frac{d^2f}{d\xi\, dv_1} \Phi\, dz, \ldots.$$

Es giebt eine Menge von Integrationswegen, welche diesen Bedingungen genügen. Setzen wir voraus, dass die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ um endliche Strecken von einander entfernt sind, so können wir vor allem folgende drei Gruppen von Integrationswegen angeben, welche den Bedingungen (7) und (8) genügen.

Erste Gruppe. Es seien z' und z'' zwei Punkte der Ebene der Variablen z, genommen aus der Anzahl der Punkte welche den Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ entsprechen. Wir beschreiben um die Punkte z' und z'' sehr kleine Kreise $\beta\beta'\beta''\beta$ und $\gamma\gamma'\gamma''\gamma$ (Fig. 1) und verbinden jede dieser Peripherien mit einem Punkte und durch die Curven $\beta\alpha$ und $\gamma\alpha$, welche nicht durch die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ gehen sollen. Aus den so gezogenen Curven entstehen die elementaren Contouren $\alpha\beta\beta'\beta''\beta\alpha$ und $\alpha\gamma\gamma'\gamma''\gamma\alpha$ (Fig. 1), welche die Punkte z' und z'' umschliessen. Wir wollen diese Contouren, wenn sie im positiven Sinne durchlaufen werden, resp. mit (z') und (z'') bezeichnen. Dieselben Contouren sollen mit $(\bar{z}')$ und $(\bar{z}'')$ bezeichnet werden, wenn sie im negativen Sinne durchlaufen werden. Endlich soll $(z'z''\bar{z}'\bar{z}'')$ einen zusammengesetzten Weg darstellen, der aus den nacheinander durchlaufenen Wegen (z'), (z''), $(\bar{z}')$, $(\bar{z}'')$ besteht. Offenbar erhält die Function f bei der Bewegung des Punktes z auf dem Wege $(z'z''\bar{z}'\bar{z}'')$ am Anfange und am Ende desselben ein und dieselbe Bedeutung. Somit genügt der Weg $(z'z''\bar{z}'\bar{z}'')$ als Integrationsweg L der Bedingung (7). Ausserdem wird er zweifellos auch den Bedingungen (8) genügen.

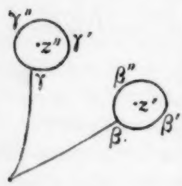


Fig. 1.

Zweite Gruppe. Bestimmen wir diejenigen Theile der Ebene der Variablen z, für deren Punkte der reelle Theil der Grösse

$$(9) \qquad \frac{u_p}{(z-\xi)^p}$$

negativ ist. Bezeichnen wir mit ϱ und θ den Modul und die Amplitude der Grösse u_p, so haben wir:

$$z-\xi = \varrho e^{\theta i}, \quad u_p = h e^{\omega i}, \quad \frac{u_p}{(z-\xi)^p} = \frac{h}{\varrho^p}[\cos(\omega - p\theta) + i \sin(\omega - p\theta)].$$

Wir mögen zunächst diejenigen Punkte der Ebene der Variablen z bestimmen, für welche der reelle Theil der Grösse (9) gleich Null ist. Offenbar muss für diese Punkte die Bedingung erfüllt werden:

$$\cos(\omega - p\theta) = 0,$$

woraus folgt:

$$(9') \qquad \theta = \theta_s = \frac{\omega + \left(s + \frac{1}{2}\right)\pi}{p},$$

wo s eine ganze Zahl ist. Wenn wir somit durch l_s eine Gerade bezeichnen, welche in der Ebene der Variablen z vom Punkte ξ bis ins Unendliche sich erstreckt nach derjenigen Richtung, welche mit der Abscissenaxe den Winkel θ bildet, so werden wir $2p$ Linien $l_0, l_1, \ldots, l_{2p-1}$ haben, für deren Punkte der reelle Theil der Grösse (9) gleich Null ist. Diese $2p$ Linien werden im Scheitelpunkte ξ $2p$ einander gleiche Winkel festlegen (wobei jedes Linienpaar l_s und l_{s+p} eine einzige Gerade bildet, indem eine Linie die Fortsetzung der anderen ist). — Die genannten $2p$ einander gleichen Winkel, welche im Scheitelpunkte ξ durch die Seiten $l_0, l_1, \ldots, l_{2p-1}$ gebildet werden, wollen wir mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p}$ bezeichnen, wobei wir unter ξ_s den Winkel zwischen den Seiten l_{s-1} und l_s verstehen. Es ist leicht einzusehen, dass der reelle Theil der Grösse (9) resp. *negativ* oder *positiv* wird, je nachdem der Punkt z innerhalb eines der Winkel $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_{2p-1}$ oder innerhalb eines der Winkel $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2p}$ fällt. In der That, wenn der Punkt z innerhalb des Winkels ξ_s liegt, so werden wir für diesen Punkt haben:

$$z - \xi = \varrho e^{(\theta_s - \theta')i},$$

wo ϱ der Modul $z - \xi$ und θ' eine Grösse ist, welche der Ungleichheit genügt

$$(9'') \qquad 0 < \theta' < \frac{\pi}{p}.$$

Zugleich haben wir:

$$\frac{u_p}{(z-\xi)^p} = (-1)^s \frac{h}{\varrho^p}(\sin p\theta' - i\cos p\theta').$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Ungleichheit (9″) zeigt aber, dass der reelle Theil der Grösse (9) bei ungeradem s negativ, bei geradem s positiv ist. — Nachdem wir nun auf diese Weise diejenigen Theile der Ebene der Variablen z bestimmt haben, in denen der reelle Theil der Grösse (9) negativ ist, bezeichnen wir in der Figur 2 die Geraden $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{2p-1}$ durch $\xi A, \xi B, \xi C, \ldots, \xi H$. Es werden dann also die Winkel $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2p}$ dargestellt durch $A\xi B$, $B\xi C, \ldots, H\xi A$. Wir bezeichnen ferner (Fig. 2) durch z' irgend einen der Punkte $z_1, \ldots, z_k, \eta, \zeta, \ldots$ und durch s irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, p$, und beschreiben um z' mit sehr kleinem Radius einen Kreis $\delta\delta'\delta''\delta$. Wir

verbinden ferner die Peripherie dieses Kreises mit dem Punkte ξ durch die Curve $\delta\xi$, welche den Punkt ξ erreicht ohne durch die Punkte $z_1, \dots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \dots$ zu gehen, und in ξ innerhalb des Winkels ξ_{2s-1} einmündet, ohne die Schenkel dieses Winkels zu berühren. Die so gezeichneten Curven bilden eine elementare Contour $\xi\delta\delta'\delta''\delta\xi$ (Fig. 2) welche den Punkt z' umgiebt, und die wir $(z')^s_\xi$ nennen, wenn sie im positiven Sinne durchlaufen wird. Offenbar muss für die Punkte dieser Contour, welche nahe an ξ liegen, der reelle Theil der Grösse (9) negativ sein. Zugleich wird sich die Function $f.\psi$ [ψ ist eine beliebige rationale Function] der Null nähern, sobald der Punkt z längt der Curve $\delta\xi$ auf den Punkt ξ zurückt. Desshalb stellt die Contour $(z')^s_\xi$ einen Integrationsweg L vor, der den Bedingungen (7) und (8) genügt. Bemerken wir noch, dass analoge Integrationswege auch von den Punkten $\eta, \zeta, \dots$ aus gezogen werden können. Diese Wege werden wir entsprechend bezeichnen mit

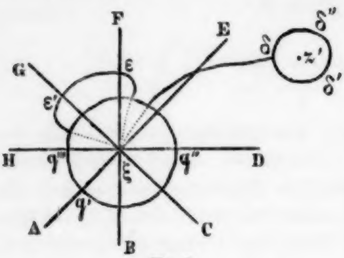


Fig. 2.

$$(z')^s_\eta (s = 1, \dots, q), \quad (z')^s_\zeta (s = 1, \dots, r), \dots.$$

Dritte Gruppe. Wir wollen hier die Bezeichnungen, welche wir bei der Betrachtung der Integrationswege der zweiten Gruppe festgesetzt haben, und welche sich auf Fig. 2 beziehen, beibehalten. Ausserdem bezeichnen wir jetzt mit L^s_ξ die Contour $\xi\varepsilon\varepsilon'\xi$ (Fig. 2). Dieselbe umkreist keinen der Punkte $z_1, \dots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \dots$, verläuft vielmehr folgendermassen. Sie läuft vom Punkte ξ innerhalb des Winkels ξ_{2s-1} aus (ohne vom Punkte ξ die Schenkel dieses Winkels zu berühren), tritt dann zuerst in den Winkel ξ_{2s}, dann in ξ_{2s+1} und erreicht innerhalb ξ_{2s+1} wieder den Punkt ξ (ohne in diesem Punkte die Schenkel des Winkels ξ_{2s+1} zu berühren). Offenbar kann diese Contour L^s_ξ wiederum als ein Integrationsweg L angesehen werden, der den Bedingungen (7) und (8) genügt. Selbstverständlich existiren derartige Integrationswege auch bei den Punkten $\eta, \zeta, \dots$; wir bezeichnen dieselben analog durch

$$L^s_\eta (s = 1, \dots, q), \quad L^s_\zeta (s = 1, \dots, r), \dots.$$

Ausser den angegebenen drei Gruppen von Integrationswegen, welche den Bedingungen (7) und (8) genügen, existirt eine Menge von Integrationswegen dieser Art. Im Allgemeinen wird diesen Bedingungen *erstens* jeder Weg genügen, der sich durch eine geschlossene Curve darstellen lässt, welche nicht durch die Punkte $z_1, \dots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \dots$

geht, und an dessen Anfang und Ende die Function f dieselbe Bedeutung hat. *Zweitens* genügt den Bedingungen (7) und (8) jeder Weg, der nicht durch die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ geht und dessen Anfang und Ende mit dem einen oder anderen der Punkte $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zusammenfällt, sofern nur der Weg am Anfang und am Ende so innerhalb der entsprechenden Winkel

$$\xi_{2s-1}(s=1,\ldots,p),\ \eta_{2s-1}(s=1,\ldots,q),\ \zeta_{2s-1}(s=1,\ldots,r),\ldots$$

verläuft, dass die Function $f.\psi$ unter ψ eine beliebige rationale Function von z verstanden am Anfang und am Ende des Weges gleich Null wird. Endlich *drittens* genügt den Bedingungen (7) und (8) jeder Weg, der gleichwerthig ist mit einem aus mehreren Theilen zusammengesetzten Wege, von denen jeder einzelne die eben angegebenen Eigenschaften besitzt. Es existiren aber auch keine anderen Wege mehr, welche den Bedingungen (7) und (8) genügen, als die hiermit angeführten, sofern wir nämlich die Variablen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q^1, \ldots$, so wie die ganzen Zahlen $m_1, \ldots, m_k, \mu, \nu, \sigma, \ldots$ und auch die ganze Function φ im zweiten Theile der Gleichung (7) unbestimmt lassen.

Wir wollen jetzt beweisen, dass wenn n eine ganze Zahl bedeutet, welche durch die Formel

$$n = k + (p+1) + (q+1) + (r+1) + \cdots - 1 \tag{10}$$

gegeben ist, es unter den Integrationswegen, welche den Bedingungen (7) und (8) genügen, n *Grund*wege giebt, welche die Eigenschaft besitzen, dass *jedes Integral von der Form* (6), *genommen in Bezug auf irgend einen Weg L, der den Bedingungen* (7) *und* (8) *genügt, sich durch n Integrale derselben Form, genommen in Bezug auf die erwähnten Grundwege, als eine lineare homogene Form ausdrücken lässt mit Coefficienten, welche die Variablen*

$$z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$$

nicht enthalten.

Beispielsweise können wir beweisen, dass man zu Grundintegrationswegen, welche die erforderlichen Eigenschaften besitzen, z. B. folgende n Wege machen kann (bei deren Bezeichnung ich die früheren Festsetzungen gebrauche):

$$\tag{11} \left\{\begin{array}{l} (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2),\ (z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3), \ldots, (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k), \\ (z_1 \xi \bar{z}_1 \bar{\xi}),\ L_\xi^1,\ L_\xi^2,\ \ldots,\ L_\xi^p, \\ (z_1 \eta \bar{z}_1 \bar{\eta}),\ L_\eta^1,\ L_\eta^2,\ \ldots,\ L_\eta^q, \\ (z_1 \zeta \bar{z}_1 \bar{\zeta}),\ L_\zeta^1,\ L_\zeta^2,\ \ldots,\ L_\zeta^r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right.$$

Wollen wir der Kürze wegen ein Integral von der Form (6), genommen in Bezug auf den Weg L, durch $[L]$ bezeichnen. Falls der Weg L durch stetige Deformation, bei welcher die Gröse des Integrales $[L]$ nicht geändert wird, zum Zusammenfallen mit dem Wege L' gebracht werden kann, sollen die Wege L und L' *gleichbedeutend* heissen.

1) Setzen wir nun zuerst voraus, dass der Weg L den Bedingungen (7) und (8) genügt, indem er eine geschlossene Curve darstellt, welcher entlang sich bewegend die Function f am Anfange und am Ende denselben Werth annimmt.

Es ist dann zunächst leicht einzusehen, dass man durch Deformation dieses Weges ihn durch den gleichbedeutenden geschlossenen Weg L' ersetzen kann, welcher durch den Punkt α (Fig. 1) geht, von dem aus wir die sämmtlichen Wege

$$(12)\qquad \begin{cases} (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2),\ (z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3),\ \ldots,\ (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k), \\ (z_1\, \xi\, \bar{z}_1\, \bar{\xi}),\ (z_1\, \eta\, \bar{z}_1\, \bar{\eta}),\ (z_1 \zeta \bar{z}_1\, \zeta),\ \ldots \end{cases}$$

sowie die Wege

$$(13)\qquad \begin{cases} (z_1),\ \ldots,\ (z_k),\ (\xi),\ (\eta),\ (\zeta),\ \ldots, \\ (\bar{z}_1),\ \ldots,\ (z_k),\ (\bar{\xi}),\ (\bar{\eta}),\ (\bar{\zeta}),\ \ldots \end{cases}$$

auslaufen lassen wollen.

Ferner ist leicht einzusehen, dass der Weg L' einem bestimmten Wege $(z'z''z'''\ldots)$ gleichbedeutend ist, der sich aus den nacheinander durchlaufenen Wegen (z'), (z''), (z'''), ..., (die alle zu den Wegen (13) gehören sollen) zusammensetzt. In diesem Sinne werden wir haben:

$$(14)\qquad [L] = [(z'z''z'''\ldots)].$$

Setzen wir ferner voraus, dass bei der Durchlaufung der Wege (z'), (z''), (z'''), ... die Function f die Factoren $e^{2\pi\lambda' i}$, $e^{2\pi\lambda'' i}$, $e^{2\pi\lambda''' i}$, ... annimmt. Unter diesen Bedingungen kann die Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

$$(15)\qquad [L] = [(z')] + e^{2\pi\lambda' i}[(z'')] + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}[(z''')] + \cdots,$$

wobei die Integrale $[(z')]$, $[(z'')]$, $[(z''')]$, ... so verstanden sein sollen, dass die Function f am Anfange eines jeden Integrationsweges die gleiche Bedeutung hat.

Sei jetzt (z) irgend einer der Integrationswege (13) und nehmen wir an, dass die Function f bei der Durchlaufung von (z) den Factor $e^{2\pi h i}$ annimmt, so haben wir folgende Gleichung:

$$(16)\qquad [(z_1 Z z_1 \bar{Z})] = (1 - e^{2\pi h i})[(z_1)] - (1 - e^{2\pi\lambda_1 i})[(Z)],$$

in der wieder alle Integrale so umgeformt sind, dass die Function f am Anfange jedes Integrationsweges die gleiche Bedeutung hat. Wenn wir nun in der Gleichung (16) dem Wege (Z) der Reihe nach die Bedeutung der Wege (z'), (z''), (z'''), ... geben und mit Hilfe der so erhaltenen Gleichungen aus der Gleichung (15) die Integrale

$$[(z')],\ [(z'')],\ [(z''')],\ \ldots$$

eliminiren, so bekommen wir:

$$(17)\quad [L] = \frac{1-e^{2\pi\lambda i}}{1-e^{2\pi\lambda_1 i}}[(z_1)] - \frac{1}{1-e^{2\pi\lambda_1 i}}\{[(z_1 z' \bar{z}_1 \bar{z}')] + e^{2\pi\lambda' i}[(z_1 z'' \bar{z}_1 \bar{z}'')] + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}[(z_1 z''' \bar{z}_1 \bar{z}''')] + \cdots\},$$

wo

$$(18)\quad \lambda = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots.$$

Da nun aber die Function f beim Durchlaufen des Weges $(z' z'' z''' \ldots)$ am Anfange und am Ende den gleichen Werth annehmen soll, so muss die Grösse λ, welche durch die Gleichung (18) bestimmt wird, eine ganze Zahl oder gleich Null sein. Deshalb bekommt die Gleichung (17) die Form:

$$(19)\quad [L] = \frac{-1}{1-e^{2\pi\lambda_1 i}}\{[(z_1 z' \bar{z}_1 \bar{z}')] + e^{2\pi\lambda' i}[(z_1 z'' \bar{z}_1 \bar{z}'')] + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}[(z_1 z''' \bar{z}_1 \bar{z}''')] + \cdots\}.$$

Wenn wir jetzt beachten, dass, unter (Z) einen Weg derselben Art verstanden, wie vorhin,

$$[(z_1 \overline{Z} \bar{z}_1 Z)] = e^{-2\pi\lambda i}\{(1-e^{2\pi\lambda_1 i})[(Z)] - (1-e^{2\pi\lambda i})[(z_1)]\},$$

so finden wir:

$$(20)\quad [(z_1 \overline{Z} \bar{z}_1 Z)] = -e^{-2\pi\lambda i}[(z_1 Z \bar{z}_1 \overline{Z})].$$

Giebt es nun unter den Wegen (z'), (z''), (z'''), ... solche, welche im negativen Sinne durchlaufen werden, d. h. Wege

$$(\bar{z}_1),\ \ldots,\ (\bar{z}_k),\ (\bar{\xi}),\ (\bar{\eta}),\ (\bar{\zeta}),\ \ldots,$$

so werden die ihnen entsprechenden Wege $(\bar{z}')$, $(\bar{z}'')$, $(\bar{z}''')$, ... im positiven Sinne durchlaufen und die entsprechenden Integrale $[(z_1 z' \bar{z}_1 \bar{z}')]$, $[(z z_1'' \bar{z} \bar{z}'')]$, ..., welche im zweiten Theile der Gleichung (19) vorkommen, besitzen die Form: $[(z_1 \overline{Z} \bar{z}_1 Z)]$. Diese Integrale werden wir dann mit Hülfe der Formel (20) umformen. Nach diesen Umformungen giebt uns in der That die Gleichung (19) den gesuchten Ausdruck für das Integral $[L]$ durch Integrale von der Form (6), die sich auf solche Wege (12) beziehen, welche zu den Grundwegen (11) gehören.

2) Setzen wir zweitens voraus, dass der Weg L den Bedingungen (7) und (8) genügt, indem er aus einer Curve besteht, deren Anfang und Ende mit zweien der Punkte ξ, η, ζ, ... zusammenfallen, in der Art, dass jede Function $f\,.\,\psi$ $\{\psi$ soll wieder eine beliebige rationale Function von z sein$\}$ am Anfang und am Ende dieses Weges gleich Null wird.

Um die nachfolgenden Ueberlegungen leichter verständlich zu machen, nehmen wir an, der Weg L verbinde insbesondere die

Punkte ξ und η, wobei diejenigen Punkte dieses Weges, welche den Punkten ξ und η sehr nahe sind, beziehungsweise innerhalb der Winkel ξ_1 und η_1 fallen sollen. Ein bestimmter Punkt α_1 theile jetzt den Weg L in zwei Theile $\xi\alpha_1$ und $\alpha_1\eta$, so dass wir haben:

$$(21) \qquad [L] = [\xi\alpha_1] + [\alpha_1\eta].$$

Wir beschreiben ferner um die Punkte ξ und η unendlich kleine Kreise $\beta_1\beta_1'\beta_1''\beta_1$ und $\gamma_1\gamma_1'\gamma_1''\gamma_1$, welche die Strecken $\xi\alpha_1$ und $\alpha_1\eta$ des Weges L beziehungsweise in den Punkten β_1 und γ_1 schneiden (wir überlassen es dem Leser die zugehörige Figur zu zeichnen). Wir bezeichnen endlich durch A den Weg $\alpha_1\beta_1\beta_1'\beta_1''\beta_1\alpha_1$, der aus dem Stücke $\alpha_1\beta_1$ der Curve $\xi\alpha_1$, der Kreisperipherie $\beta_1\beta_1'\beta_1''\beta_1$ und dem Stücke $\beta_1\alpha_1$, der Curve $\xi\alpha_1$ besteht, und durch B den Weg $\alpha_1\gamma_1\gamma_1'\gamma_1''\gamma_1\alpha_1$, der sich aus dem Stücke $\alpha_1\gamma_1$ der Curve $\alpha_1\eta$, der Kreisperipherie $\gamma_1\gamma_1'\gamma_1''\gamma_1$ und dem Stücke $\gamma_1\alpha_1$ der Curve $\alpha_1\eta$ zusammensetzt. Offenbar ist der Weg gleichbedeutend dem Wege, den die Curven

$$\alpha_1\xi,\ L_\xi^1,\ L_\xi^2, \ldots, L_\xi^p,\ \xi\alpha_1$$

bilden. Daher bekommen wir:

$$(22) \qquad [A] = (e^{2\pi ai} - 1)[\xi\alpha_1] + [L_\xi^1] + [L_\xi^2] + \cdots + [L_\xi^p].$$

Ebenso finden wir:

$$(22') \qquad [B] = (1 - e^{2\pi bi})[\alpha_1\eta] + [L_\eta^1] + [L_\eta^2] + \cdots + [L_\eta^q].$$

Berechnen wir aus den 2 letzten Gleichungen die Integrale $[\xi\alpha_1]$ und $[\alpha_1\eta]$, und setzen ihre so erhaltenen Werthe in Gleichung (21), so finden wir:

$$(23) \qquad [L] = \frac{(1 - e^{2\pi bi})[A] - (1 - e^{2\pi ai})[B]}{(e^{2\pi ai} - 1)(1 - e^{2\pi bi})} + \frac{[L_\xi^1] + \cdots + [L_\xi^p]}{1 - e^{2\pi ai}} - \frac{[L_\eta^1] + \cdots + [L_\eta^q]}{1 - e^{2\pi bi}}.$$

Ferner wollen wir mit $AB\overline{A}\,\overline{B}$ den Weg bezeichnen, der aus den nacheinander durchlaufenen Wegen $A, B, \overline{A}, \overline{B}$ zusammengesetzt ist, wobei $\overline{A}$ und $\overline{B}$ an sich dieselben Wege wie A und B bedeuten sollen, nur dass dieselben im entgegengesetzten Sinne durchlaufen gedacht sind. Wir haben dann:

$$(24) \qquad [AB\overline{A}\,\overline{B}] = (1 - e^{2\pi bi})[A] - (1 - e^{2\pi ai})[B].$$

Zugleich bekommt die Gleichung (23) die Form:

$$(25) \qquad [L] = \frac{[AB\overline{A}\,\overline{B}]}{(e^{2\pi ai} - 1)(1 - e^{2\pi bi})} + \frac{[L_\xi^1] + \cdots + [L_\xi^p]}{1 - e^{2\pi ai}} - \frac{[L_\eta^1] + \cdots + [L_\eta^q]}{1 - e^{2\pi bi}}.$$

Da die Function beim Durchlaufen des Weges $AB\overline{A}\,\overline{B}$ am Anfang und am Ende dieselbe Bedeutung erhält, so muss nach dem früher bewiesenen das Integral $[AB\overline{A}\,\overline{B}]$ sich durch Integrale von der Form (6), die auf die Wege (12) bezogen sind, vermöge einer linearen homogenen Formel ausdrücken lassen, deren Coefficienten die Variablen $z_1, \ldots, z_k, \xi_1, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$ nicht enthalten. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes für das Integral $[AB\overline{A}\,\overline{B}]$ in die rechte Seite der Gleichung (25) bekommen wir die gesuchte Formel für die Darstellung des Integrals $[L]$ durch Integrale von der Form (6), die auf die Grundwege (11) bezogen sind.

Offenbar kann man diese Betrachtungen leicht auf jeden offenen oder geschlossenen, stetigen Weg L erstrecken, dessen Anfang und Ende mit irgendwelchen der Punkte $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zusammenfallen. Nur muss dabei das Integral $[L]$ einen Sinn haben. Somit können wir den auf Seite 517 aufgestellten Satz von der Zurückführbarkeit aller Wege auf die n Grundwege als vollständig bewiesen betrachten.

Die hiermit bewiesene Eigenschaft der Grundwege kann man etwas erweitern. Diese Erweiterung ist beachtenswerth. Es seien z' und z'' zwei von den Grössen $z_1, \ldots, z_k, \infty, \xi, \eta, \zeta, \ldots$. Denken wir uns ferner eine Curve $z'z''$ zwischen den Punkten z' und z'', welche auf ihrem Wege zwischen z' und z'' nicht durch die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ geht, und setzen voraus, dass das Integral

$$(26) \qquad [z'z''] = \int_{z'z''} f\,\Phi\,dz,$$

bezogen auf die angegebene Curve $z'z''$, einen Sinn hat. Der Integrationsweg $z'z''$ wird den Bedingungen (7) und (8) nicht genügen, wenn auch nur eine von den Grössen z' und z'' mit irgend einer der Grössen $z_1, \ldots, z_k, \infty$ zusammenfällt. Nichtsdestoweniger kann man genau nach der soeben benutzten Methode leicht allgemein beweisen, dass *das Integral* $[z'z'']$, *bezogen auf diesen Weg, sich durch Integrale von der Form* (6), *die auf die Grundwege bezogen sind, mittelst einer linearen homogenen Formel, deren Coefficienten die Grössen* $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q \ldots$ *nicht enthalten, ausdrücken lässt.*

In der That, nehmen wir an, der Punkt α_2 theile den Weg $z'z''$ in zwei Theile, $z'\alpha_2$ und $\alpha_2 z''$, so dass man also hat:

$$(27) \qquad [z'z''] = [z'\alpha_2] + [\alpha_2 z''].$$

Wir beschreiben jetzt um die Punkte z' und z'' unendlich kleine Kreise $\beta_2\beta_2'\beta_2''\beta_2$ und $\gamma_2\gamma_2'\gamma_2''\gamma_2$, welche die oben genannten Curven $z'\alpha_2$ und $\alpha_2 z''$ beziehungsweise in den Punkten β_2 und γ_2 schneiden sollen. (Wenn irgend welche der Grössen z' und z'' unendlich gross ist, so

werden wir natürlich den entsprechenden Kreis $\beta_2\beta_2'\beta_2''\beta_2$ oder $\gamma_2\gamma_2'\gamma_2''\gamma_2$ nicht als unendlich klein, sondern als unendlich gross annehmen, mit den Coordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt). Wir bezeichnen ferner mit C den Weg $\alpha_2\beta_2\beta_2'\beta_2''\beta_2\alpha_2$, der zusammengesetzt ist aus dem Theile $\alpha_2\beta_2$ der Curve $z'\alpha_2$, der Peripherie $\beta_2\beta_2'\beta_2''\beta_2$ und dem Theile $\beta_2\alpha_2$ der Curve $z'\alpha_2$, ferner mit D den Weg $\alpha_2\gamma_2\gamma_2'\gamma_2''\gamma_2\alpha_2$, der zusammengesetzt ist aus dem Theile $\alpha_2\gamma_2$ der Curve $z''\alpha_2$, der Peripherie $\gamma_2\gamma_2'\gamma_2''\gamma_2$ und dem Theile $\gamma_2\alpha_2$ der Curve $\alpha_2 z''$. Unter der Voraussetzung, dass die Function f nach Durchlaufung der Wege C und D respective die Factoren $e^{2\pi\lambda' i}$ und $e^{2\pi\lambda'' i}$ erhält, erhalten wir jetzt die Formeln:

$$(28)\qquad \begin{cases} [C] = (e^{2\pi\lambda' i} - 1)[z'\alpha_2] + H_1, \\ [D] = (1 - e^{2\pi\lambda'' i})[\alpha_2 z''] + H_2, \end{cases}$$

wo

$$(29)\qquad H_1 = \begin{cases} 0 \text{ (wenn } z' = z_1, z_2, \ldots, z_k, \infty), \\ [L_\xi^1] + \cdots + [L_\xi^p] \text{ (wenn } z' = \xi), \\ [L_\eta^1] + \cdots + [L_\eta^q] \text{ (wenn } z' = \eta), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot, \end{cases}$$

$$(29')\qquad H_2 = \begin{cases} 0 \text{ (wenn } z'' = z_1, z_2, \ldots, z_k, \infty), \\ [L_\xi^1] + \cdots + [L_\xi^p] \text{ (wenn } z'' = \xi), \\ [L_\eta^1] + \cdots + [L_\eta^q] \text{ (wenn } z'' = \eta), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;. \end{cases}$$

Berechnen wir nun vermittelst der Gleichungen (28) die Integrale $[z'\alpha_2]$ und $[\alpha_2 z'']$, und setzen ihre Werthe in die Gleichung (27), so bekommen wir:

$$(30)\qquad [z'z''] = \frac{(1 - e^{2\pi\lambda'' i})[C] - (1 - e^{2\pi\lambda' i})[D]}{(e^{2\pi\lambda' i} - 1)(1 - e^{2\pi\lambda'' i})} + \frac{H_1}{1 - e^{2\pi\lambda' i}} - \frac{H_2}{1 - e^{2\pi\lambda'' i}}.$$

Ferner nennen wir $CD\overline{D}\overline{C}$ den Weg, der sich zusammensetzt aus den nacheinander durchlaufenen Wegen C, D, $\overline{C}$, $\overline{D}$ (wo $\overline{C}$, $\overline{D}$ die rückwärts durchlaufenen Wege C, D bedeuten sollen). Dann haben wir

$$[CD\overline{C}\overline{D}] = (1 - e^{2\pi\lambda'' i})[C] - (1 - e^{2\pi\lambda' i})[D].$$

Folglich bekommt die Gleichung (27') die Form:

$$(30')\qquad [z'z''] = \frac{[CD\overline{C}\overline{D}]}{(e^{2\pi\lambda' i} - 1)(1 - e^{2\pi\lambda'' i})} + \frac{H_1}{1 - e^{2\pi\lambda' i}} - \frac{H_2}{1 - e^{2\pi\lambda'' i}}.$$

Da nun am Anfang und Ende des Weges $CD\overline{C}\overline{D}$ die Function f denselben Werth erhält, so wird nach dem früher Bewiesenen das

Integral $[CD\overline{C}\,\overline{D}]$ vermittelst einer linearen homogenen Formel mit constanten Coefficienten durch Integrale von der Form (6), die auf die Wege (12) bezogen sind, ausgedrückt. Durch Einsetzen dieses für $[CD\overline{C}\,\overline{D}]$ geltenden Ausdrucks so wie der in (29) und (29') gegebenen Ausdrücke für die Grössen H_1 und H_2 in die rechte Seite der Gleichung (30'), bekommen wir aber in der That die gesuchte Darstellung des Integrals (26) durch Integrale von der Form (6), die auf die Grundwege (11) bezogen sind.

Mit Benutzung der somit bewiesenen Eigenschaft der Integrale von der Form (26) wollen wir fortan nicht nur die den Bedingungen (7) und (8) genügenden Integralwege betrachten, sondern auch die Wege $z'z''$, auf welche sich die Integrale von der Form (26) beziehen. Immerhin verdienen die den Bedingungen (7) und (8) genügenden Integrationswege *ganz besondere* Beachtung, nicht nur, weil auf diese Wege bezogene Integrale immer möglich sind, während Integrale von der Form (26) nicht immer möglich sind, sondern auch desshalb, weil die Bedingungen (7) und (8) eine sehr wichtige Rolle spielen bei der Bildung der linearen Differentialgleichung, welche durch Integrale von der Form (6) integrirbar ist, wie auch bei der Umformung dieser Integrale.

Wir wollen hier noch eine Formel ableiten, welche zu den Formeln gehört, welche die Werthe einiger Integrale von der Form (6) durch auf die Grundwege (11) bezogene Integrale darstellen. Dieselbe ist eine Umformung der Formel (19) und wird uns im § V von Nutzen sein. Bezeichnen wir durch $[L]$ wie früher ein Integral von der Form (6) bezogen auf den Weg L, und setzen wir voraus, dass

1) E ein Integrationsweg ist, gebildet aus den nacheinander durchlaufenen Wegen

$$(z'),\ (z''),\ (z'''),\ \ldots, \tag{31}$$

welche zu den Wegen (13) gehören;

2) dass F ein Integrationsweg ist, zusammengesetzt aus den nacheinander durchlaufenen Wegen

$$(\mathfrak{z}'),\ (\mathfrak{z}''),\ (\mathfrak{z}'''),\ \ldots, \tag{31'}$$

welche ebenfalls zu den Wegen (13) gehören;

3) dass die Function f bei Durchlaufung der Wege (31) und (31') beziehungsweise die Factoren erhält:

$$e^{2\pi\lambda' i},\ e^{2\pi\lambda'' i},\ e^{2\pi\lambda''' i},\ \ldots,$$
$$e^{2\pi l' i},\ e^{2\pi l'' i},\ e^{2\pi l''' i},\ \ldots;$$

4) dass $EF\overline{E}\,\overline{F}$ ein Weg ist, der sich aus den nacheinander durchlaufenen Wegen E, F, $\overline{E}$, $\overline{F}$ zusammensetzt (wobei $\overline{E}$ und $\overline{F}$ die-

selben Wege sind, wie E und F, nur in der entgegengesetzten Richtung genommen).

Auf Grund dieser Bezeichnungen werden wir haben:

$$(32)\qquad \begin{cases} [E] = [(z')] + e^{2\pi\lambda' i}[(z'')] + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}[(z''')] + \cdots, \\ [F] = [(\mathfrak{z}')] + e^{2\pi l' i}[(\mathfrak{z}'')] + e^{2\pi(l'+l'')i}[(\mathfrak{z}''')] + \cdots, \end{cases}$$

$$(33)\qquad [EF\overline{E}\overline{F}] = (1 - e^{2\pi l i})\,[E] - (1 - e^{2\pi\lambda i})\,[F],$$

wo

$$(33')\qquad \begin{cases} \lambda = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots, \\ l = l' + l'' + l''' + \cdots. \end{cases}$$

Dabei hat in allen Integralen, welche in den Gleichungen (32) und (33) stehen, die Function f am Anfange und am Ende eines jeden Integrationsweges denselben Werth. Geben wir nunmehr dem Wege (Z) in Gleichung (16) nach einander die Bedeutung der Wege

$$(z'),\ (z''),\ (z'''),\ \ldots,\ (\mathfrak{z}'),\ (\mathfrak{z}'')(\mathfrak{z}'''),\ \ldots,$$

eliminiren dann mit Hilfe der so erhaltenen Gleichungen aus den Gleichungen (32) die Integrale

$$[(z')],\ [(z'')],\ \ldots,\ [(\mathfrak{z}')],\ [(\mathfrak{z}'')],\ \ldots,$$

und setzen die so gefundenen Werthe der Integrale $[E]$ und $[F]$ in die Gleichung (33), so erhalten wir:

$$(34)\quad [EF\overline{E}\overline{F}] = \frac{e^{2\pi l i} - 1}{1 - e^{2\pi\lambda_1 i}}\left\{[(z_1 z' \overline{z}_1 \overline{z}')] + e^{2\pi\lambda' i}[(z_1 z'' \overline{z}_1 \overline{z}'')] \right.$$
$$\left. + e^{2\pi(\lambda'+\lambda'')i}[(z_1 z''' \overline{z}_1 \overline{z}''')] + \cdots\right\} - \frac{e^{2\pi\lambda i} - 1}{1 - e^{2\pi\lambda_1 i}}\left\{[(z_1 \mathfrak{z}' \overline{z}_1 \overline{\mathfrak{z}}')] \right.$$
$$\left. + e^{2\pi l' i}[(z_1 \mathfrak{z}'' \overline{z}_1 \overline{\mathfrak{z}}'')] + e^{2\pi(l'+l'')i}[z_1 \mathfrak{z}''' \overline{z}_1 \overline{\mathfrak{z}}''')] + \cdots\right\}.$$

Wenn wir diese Formel schliesslich noch mit Hülfe der Gleichungen von der Form (20) in gehöriger Weise umformen, so erhalten wir das Integral $[EF\overline{E}\overline{F}]$ durch Integrale von der Form (6) dargestellt, welche auf die Wege (12), bezogen sind.

Anstatt der Wege (11) kann man offenbar zu Grundintegrationswegen auch folgende n Wege wählen:

$$(35)\qquad \begin{cases} (z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2),\ (z_1 z_3 \overline{z}_1 \overline{z}_3),\ \ldots,\ (z_1 z_k \overline{z}_1 \overline{z}_k), \\ (z_1 \xi \overline{z}_1 \overline{\xi}),\ (z_1)_\xi^1,\ (z_1)_\xi^2,\ \ldots,\ (z_1)_\xi^p, \\ (z_1 \eta \overline{z}_1 \overline{\eta}),\ (z_1)_\eta^1,\ (z_1)_\eta^2,\ \ldots,\ (z_1)_\eta^q, \\ (z_1 \zeta \overline{z}_1 \overline{\zeta}),\ (z_1)_\zeta^1,\ (z_1)_\zeta^2,\ \ldots,\ (z_1)_\zeta^r, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

ebenso wie folgende n Wege:

$$(35')\quad \begin{cases} (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2),\ (z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3), \ldots, (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k), \\ (z_1)_\xi^1,\ L_\xi^1,\ L_\xi^2, \ldots, L_\xi^p, \\ (z_1)_\eta^1,\ L_\eta^1,\ L_\eta^2, \ldots, L_\eta^q, \\ (z_1)_\zeta^1,\ L_\zeta^1,\ L_\zeta^2, \ldots, L_\zeta^r, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

Ueberhaupt lässt sich die Wahl der Grundintegrationswege auf sehr mannigfache Weise treffen. Nur muss dabei die oben angegebene Eigenschaft der Grundwege erhalten bleiben, welche darin besteht, dass sich jedes Integral von der Form (6), das sich auf einen Weg L bezieht, der den Bedingungen (7) und (8) genügt, durch Integrale von derselben Form, die auf die Grundwege bezogen sind, vermöge einer linearen homogenen Formel ausdrücken lässt, deren Coefficienten von den Grössen $z_1 \ldots v_q \ldots$ frei sind. Die gleiche Form der Darstellung muss auch für Integrale (26) gelten.

Anmerkung 1. Wenn man $k = 0$ macht, so fallen auf der rechten Seite der Gleichung (5) die Factoren der ersten Zeile weg, und man kann als Grundwege folgendes System von Curven wählen:

$$(36)\quad \begin{cases} L_\xi^1,\ L_\xi^2, \ldots, L_\xi^p, \\ \xi\eta,\ L_\eta^1,\ L_\eta^2, \ldots, L_\eta^q, \\ \xi\zeta,\ L_\zeta^1,\ L_\zeta^2, \ldots, L_\zeta^r, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

Darin sind $\xi\eta$, $\xi\zeta, \ldots$ Curven, welche die Punkte ξ und η, ξ und $\zeta, \ldots$ in der Art verbinden, dass sie in unendlicher Nähe der Punkte ξ, η, $\zeta, \ldots$ innerhalb der Winkel ξ_1, η_1, $\zeta_1, \ldots$ verlaufen. Ebenso kann man im betrachteten Falle zu Grundwegen folgendes System von Curven wählen:

$$(36')\quad \begin{cases} L_\xi^1,\ L_\xi^2, \ldots, L_\xi^p, \\ (\xi\eta\bar{\xi}\bar{\eta}),\ L_\eta^1,\ L_\eta^2, \ldots, L_\eta^q, \\ (\xi\zeta\bar{\xi}\bar{\zeta}),\ L_\zeta^1,\ L_\zeta^2, \ldots, L_\zeta^r, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots. \end{cases}$$

Anmerkung 2. Wenn auf der rechten Seite der Gleichung (5) nur die Factoren der ersten Zeile von Null verschieden sind, diejenigen der übrigen Zeilen aber verschwinden, so kann man zu Grundintegrationswegen folgendes System von Curven wählen:

$$(36'')\quad (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2),\ (z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3), \ldots, (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k).$$

Anmerkung 3. Zu bemerken ist, dass die Bedingungen (7) und (8) nicht von einander verschieden sind, da eine jede dieser Bedingungen die Folge der anderen ist.

§ II.

Reducirte und modificirte Formen der Integrale von der Form (6).

Setzen wir

$$(37)\quad f_2 = f(z-z_1)^{m_1+1}\dots(z-z_k)^{m_k+1}(z-\xi)^{p+\mu+1}(z-\eta)^{q+\nu+1}\dots,$$

wo $m_1, \dots, m_k, \mu, \nu, \dots$ beliebige ganze Zahlen (mit Einschluss der Null), so finden wir:

$$(38)\quad \frac{df_2}{dz} = f\{(z-z_1)^{m_1}\dots(z-z_k)^{m_k}(z-\xi)^{\mu}(z-\eta)^{\nu}\dots\} P_{(m_1,\dots,\mu,\dots)},$$

wo

$$(39)\quad \begin{cases} P_{(m_1,\dots,\mu,\dots)} = \{(z-z_1)\dots(z-z_k)(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^{q+1}\dots\} \\ \qquad \times\Big\{\dfrac{\lambda_1+m_1}{z-z_1}+\dots+\dfrac{\lambda_k+m_k}{z-z_k} \\ \qquad + \dfrac{a+\mu+p}{z-\xi} - \dfrac{u_1}{(z-\xi)^2} - \dfrac{2u_2}{(z-\xi)^3} - \dots - \dfrac{pu_p}{(z-\xi)^{p+1}} \\ \qquad + \dfrac{b+q+\nu}{z-\eta} - \dfrac{v_1}{(z-\eta)^2} - \dfrac{2v_2}{(z-\eta)^3} - \dots - \dfrac{qv_q}{(z-\eta)^{q+1}} \\ \qquad + \dots\dots\dots \\ \qquad \dots\dots\dots\Big\}. \end{cases}$$

Offenbar ist $P_{(m_1,\dots,\mu_1\dots)}$ ein in Bezug auf z ganzes Polynom vom Grade n. Der Coefficient von z^n in diesem Polynom kann nicht gleich Null werden, weil wir die Grösse $\lambda_1+\dots+\lambda_k+a+c+\dots$ nicht gleich einer ganzen Zahl oder gleich Null annehmen.

Multipliciren wir jetzt beide Seiten der Gleichung (38) mit dz und integriren wir entlang der Contour L, so werden wir auf Grund der Bedingungen (7) haben:

$$(40)\quad \int_L f\{(z-z_1)^{m_1}\dots(z-z_k)^{m_k}(z-\xi)^{\mu}(z-\eta)^{\nu}\dots\} P_{(m_1,\dots,\mu,\dots)}\,dz = 0.$$

Führen wir ferner folgende Abkürzungen ein:

$$(41)\quad \begin{cases} m = m_1+\dots+m_k+\mu+\nu+\dots, \\ T_m = (z-z_1)^{m_1}\dots(z-z_k)^{m_k}(z-\xi)^{\mu}(z-\eta)^{\nu}\dots, \\ P_m = P_{(m_1,\dots,\mu,\dots)}, \end{cases}$$

so wird die Gleichung (40) dadurch folgende Form erhalten:

(42) $$\int_L f\, T_m\, P_m\, dz = 0.$$

Derartige Gleichungen, welche eine Umformung der Bedingung (7) darstellen, können zur Ableitung verschiedener Resultate und unter anderem zu verschiedenen Umformungen des Integrales (6) in Bezug auf die zu integrirende Function dienen. Beginnen wir mit der Betrachtung derjenigen Umformung des Integrales (6), mittelst welcher dieses Integral in Bezug auf die Function f in *reducirter* Form erscheint.

Der Grad τ des Polynomes Φ, welches durch die Gleichung (6′) bestimmt wird, ist eine beliebige ganze Zahl $\geqq 0$. Wenn aber dieser Grad $\geqq n$ ist, so kann er mit Hilfe von Gleichungen von der Form (42) erniedrigt werden. In der That, wenn $\tau \geqq n$ ist, und wir in den Gleichungen (42) unter $m_1, \ldots m_k, \mu, \nu, \ldots$ nur ganze positive Zahlen (incl. Null) verstehen und sie derart variiren lassen, dass die Zahl m (welche durch die erste der Gleichungen (41) bestimmt ist) nacheinander die Werthe $0, 1, \ldots, \tau - n$, bekommt, so erhalten wir $\tau - n + 1$ Gleichungen von der Form (42). Durch Multiplication dieser Gleichungen beziehungsweise mit unbestimmten Grössen $C_0, C_1, \ldots, C_{\tau-n}$, welche z nicht enthalten, und durch Combination der entstehenden Formeln mit der Gleichung (6) werden wir haben:

(43) $$y = \int_L f\, \Phi_1\, dz,$$

wo

(44) $$\Phi_1 = \Phi - C_0 T_0 P_0 - \cdots - C_{\tau-n} T_{\tau-n} P_{\tau-n}.$$

Bei der Unbestimmtheit der Grössen $C_0, \ldots, C_{\tau-n}$ ist die hier auftretende Function Φ_1, im allgemeinen ein Polynom vom Grade τ in Bezug auf z. Aber in jedem einzelnen Falle können wir in Folge der Unbestimmtheit der Grössen $C_0, \ldots, C_{\tau-n}$ dieselben so wählen, dass im Polynome Φ_1 alle Glieder wegfallen, deren Grad $\geqq n$ ist. Indem wir den Grössen $C_0, \ldots, C_{\tau-n}$ diese Werthe ertheilen, bekommt die Gleichung (43) folgende Form:

(45) $$y = \int_L f\, \theta\, dz,$$

wo θ ein bekanntes Polynom bedeutet, dessen Grad in Bezug auf z nicht höher ist als $n - 1$.

Die Form des Integrales (45), *auf welche wir somit das Integral* (6) *gebracht haben, ist eben diejenige, welche wir soeben die in Bezug auf die Function f reducirte Form genannt haben.*

Die Gleichungen von der Form (42) machen es möglich, das Integral (45) noch umzuformen, in Bezug auf die Indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $a, b, c, \ldots$, welche in der rechten Seite der die Function f bestimmenden Gleichung (5) vorkommen. *Diese Indices können nämlich um beliebige ganze Zahlen vergrössert oder verkleinert werden, sofern zugleich das in* (45) *vorkommende Polynom θ variirt wird.* Um die Möglichkeit einer solchen Umformung zu beweisen, genügt es, sich zu überzeugen, dass man einen beliebigen einzelnen der genannten Indices um eine Einheit sowohl vergrössern als auch verkleinern darf, anders gesagt, es genügt zu beweisen, dass das Integral (45) in jeder der nächstfolgenden Formen dargestellt werden kann:

$$y = \int_L f(z-\mathfrak{z})\theta_1\, dz, \tag{46}$$

$$y = \int_L \frac{f}{(z-\mathfrak{z})}\theta_2\, dz, \tag{47}$$

wo $\mathfrak{z}$ irgend eine der Grössen $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, ζ, ... ist, und sowohl θ_1 wie θ_2 in Bezug auf z ganze Polynome bedeuten, deren Grade nicht grösser als $n-1$ sind.

Zum Beweise ertheilen wir zunächst allen Zahlen $m_1, \ldots, m_k, \mu, \nu, \ldots$ in der Gleichung (41) den Werth Null, wodurch die Function $T_m = 1$ wird. Die Gleichung (42) bekommt dann die Form:

$$\int_L f P_0\, dz = 0, \tag{48}$$

wo P_0 ein Polynom vom Grade n ist. Wir multipliciren jetzt die Gleichung (48) mit einem unbestimmten Factor B, der z nicht enthält, combiniren das Resultat mit der Gleichung (46) und erhalten so:

$$y = \int_L f\{(z-\mathfrak{z})\theta_1 + BP_0\}\, dz. \tag{49}$$

Damit dieses Integral mit dem Integral (45) zusammenfalle, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\theta = (z-\mathfrak{z})\theta_1 + BP_0,$$

woraus folgt:

$$\theta_1 = \frac{\theta - BP_0}{z-\mathfrak{z}}. \tag{50}$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung in Bezug auf z ein ganzes Polynom sein soll, so muss die Function $\theta - BP_0$ für $z = \mathfrak{z}$ gleich Null werden. Folglich kommt:

$$B = \Big|^{z=\mathfrak{z}} \frac{\theta}{P_0}. \tag{51}$$

Die Gleichungen (50) und (51) bestimmen vollständig das gesuchte Polynom θ_1.

Geben wir zweitens den Zahlen $m_1, \ldots, m_k, \mu, \nu, \ldots$ in den Gleichungen (41) solche Werthe, dass die Function T_m die Form erhält:

$$T_m = \frac{1}{z-\mathfrak{z}}. \tag{52}$$

In diesem Falle wird $m = -1$, und die Gleichung (42) bekommt die Form:

$$\int_L \frac{f}{z-\mathfrak{z}} P_{-1} dz = 0, \tag{53}$$

wo P_{-1} ein bekanntes Polynom vom Grade n ist. Multipliciren wir die Gleichung (53) mit einem unbestimmten Factor B und combiniren das Resultat mit der Gleichung (47), so erhalten wir:

$$y = \int_L \frac{f}{z-\mathfrak{z}} (\theta_2 + BP_{-1}) dz. \tag{54}$$

Damit dieses Integral mit dem Integral (45) zusammenfalle, genügt die Bedingung

$$(z-\mathfrak{z})\theta = \theta_2 + BP_{-1},$$

woraus folgt:

$$\theta_2 = (z-\mathfrak{z})\theta - BP_{-1}. \tag{55}$$

Nun soll der Grad des gesuchten Polynoms θ_2 nicht höher als $n-1$ sein, es muss also das Glied vom Grade n in der Gleichung (55) verschwinden; anders gesagt: die Function

$$\frac{(z-\mathfrak{z})\theta - BP_{-1}}{z^n}$$

muss für $z = \infty$ gleich Null werden. Folglich hat man

$$B = \left| \frac{(z-\mathfrak{z})\theta}{P_{-1}} \right.^{z=\infty}. \tag{56}$$

Die Gleichungen (55) und (56) bestimmen vollständig das gesuchte Polynom θ_2.

Nachdem wir bewiesen haben, dass jeder der Indices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $a, b, c, \ldots$ im Ausdruck für die Function f um eine Einheit vergrössert oder vermindert werden kann, schliessen wir, dass man diesen Indices durch gehörige Aenderung des Polynoms θ beliebige positive oder negative Werthe beilegen kann.

§ III.

Bildung der linearen Differentialgleichung, welche sich mittelst bestimmter Integrale der betrachteten Form integriren lässt.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise, überzeugen wir uns mit Hülfe der Gleichung (5) dass:

$$(57)\qquad \frac{d^{m'} f}{dz_1^{m_1'} \dots dz_k^{m_k'}\, du_1^{\mu_1'} \dots du_p^{\mu_p'}\, dv_1^{\nu_1'} \dots dv_q^{\nu_q'} \dots} = f \cdot \frac{(\lambda_1, m_1') \dots (\lambda_k, m_k')}{(z-z_1)^{m_1'} \dots (z-z_k)^{m_k'} (z-\xi)^{\mu'} (z-\eta)^{\nu'} \dots},$$

wo

$$m' = m_1' + \cdots + m_k' + m_1' + \mu_1' + \cdots + \mu_p' + \nu_1' + \cdots + \nu_q' + \cdots,$$
$$\mu' = \mu_1' + 2\mu_2' + \cdots + p\mu_p',$$
$$\nu' = \nu_1' + 2\nu_2' + \cdots + q\nu_q',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$(\lambda_\sigma, m_\sigma') = (\lambda_\sigma - 1)(\lambda_\sigma - 2) \cdots (\lambda_\sigma - m_\sigma'),\ (\lambda_\sigma, 0) = 1.$$

In der auf der linken Seite der Gleichung (57) stehenden Ableitung, kommen keine Differenzirungen nach den Variablen ξ, η, ... vor. Differenziren wir die Gleichung (57) nach diesen Variablen, so finden wir:

$$(58)\qquad \frac{d^{m''} f}{dz_1^{m_1'} \dots dz_k^{m_k'}\, d\xi^{\mu_0'}\, du_1^{\mu_1'} \dots du_p^{\mu_p'}\, d\eta^{\nu_0'}\, dv_1^{\nu_1'} \dots dv_q^{\nu_q'} \dots} = f \cdot \frac{\Theta(z)}{(z-z_1)^{m_1'} \dots (z-z_k)^{m_k'} (z-\xi)^{\mu''} (z-\eta)^{\nu''} \dots},$$

wo $\Theta(z)$ eine in Bezug auf z ganze Function vom Grade $p\mu_0' + q\nu_0' + \cdots$ ist; ausserdem sind:

$$m'' = m_1' + \cdots + m_k' + \mu_0' + \mu_1' + \cdots + \mu_p' + \nu_0' + \nu_1' + \cdots + \nu_q' + \cdots,$$
$$\mu'' = \mu_1' + 2\mu_2' + \cdots + p\mu_p' + (p+1)\mu_0',$$
$$\nu'' = \nu_1' + 2\nu_2' + \cdots + q\nu_q' + (q+1)\nu_0',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Grössen

$$\varrho_0, \dots, \varrho_\tau, z_1, \dots, z_l, \xi, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_\sigma, w_1, \dots, w_t, \dots$$

von x abhängen, die Grössen

$$z_{l+1}, \dots, z_k, u_{s+1}, \dots, u_p, \eta, v_{\sigma+1}, \dots, v_q, w_{t+1}, \dots, w_\tau, \dots$$

aber von x unabhängig sind. Mit Hülfe der Gleichungen (57) und (58) ist leicht zu beweisen, dass

(59) $$\frac{d^m f}{dx^m} = f\,\frac{Q_m}{R^m},$$

wo

(60) $$R = \{(z-z_1)\ldots(z-z_l)(z-\xi)^{p+1}(z-\eta)^\sigma(z-\zeta)^{r+1}\ldots\},$$

Q_m aber ein in Bezug auf z ganzes Polynom ist, dessen Grad für $m > 0$ niedriger ist als der Grad des Polynomes R^m. Bezeichnen wir jetzt mit n_1 den Grad des Polynoms R in Bezug auf z (so dass also

(61) $$n_1 = l + (p+1) + \sigma + (r+1) + \cdots$$

ist), so können wir offenbar behaupten, dass für $m > 0$ der Grad des Polynomes Q_m nicht höher als $mn_1 - 1$ ist.

Setzen wir ferner:

(62) $$\Phi_m = \frac{d^m\Phi}{dx^m} = \frac{d^m\varrho_0}{dx^m} + z\frac{d^m\varrho_1}{dx^m} + \cdots + z^\tau\,\frac{d^m\varrho_\tau}{dx^m}.$$

Auf Grund der Gleichungen (6'), (6), (8), (59), (62) und der Formel von Leibniz erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \int\limits_L f\left\{\Phi_m + \frac{m}{1}\,\frac{Q_1\Phi_{m-1}}{R} + \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{Q_2\Phi_{m-2}}{R^2} + \cdots + \frac{Q_m\Phi}{R^m}\right\}dz$$

oder

(63) $$\frac{d^m y}{dx^m} = \int\limits_L f\,\frac{\Omega_m}{R^m}\,dz,$$

wo Ω_m ein in Bezug auf z ganzes Polynom vom Grade $\leqq (mn_1 + \tau)$ ist. Setzen wir

(64) $$f_1 = \frac{f}{R^n},$$

wo n durch die Gleichung (10) bestimmt wird, so finden wir mit Benutzung der Gleichung (63):

(65) $$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y =$$
$$= \int\limits_L f_1(\Omega_n + A_1 R\Omega_{n-1} + \cdots + A_{n-1}R^{n-1}\Omega_{n-1} + A_n R^n\Phi)\,dz,$$

wo $A_1, \ldots, A_n$ vorderhand noch unbekannte Functionen der Variablen x bedeuten, welche z nicht enthalten. Wir bemerken noch, dass der auf der rechten Seite der Gleichung (65) unter dem Integralzeichen innerhalb der Klammer stehende Ausdruck ein in Bezug auf z ganzes Polynom vom Grade $nm_1 + \tau$ ist, und ferner, dass unter den besprochenen Bedingungen die Gleichung (42) statthaben muss. Ertheilen

wir jetzt in den Gleichungen (41) den Zahlen $m_1, \ldots, m_k, \mu, \nu, \ldots$ Werthe, für welche die Function T_m die Form erhält

(66) $$T_m = \frac{\varphi_s}{R^n},$$

wo

(67) $$\begin{cases} s = s_1 + \cdots + s_k + \mu' + \nu' + \cdots, \\ \varphi_s = (s-z)^{s_1} \ldots (z-z_k)^{s_k} (z-\xi)^{\mu'} (z-\eta)^{\nu'} \ldots \end{cases}$$

und R eine durch die Gleichung (60) bestimmte Function ist, so bekommen wir:

(68) $$\begin{cases} m_1 \quad = s_1 - n, \ldots, m_l = s_l - n, \\ m_{l+1} = s_{l+1}, \ldots, m_k = s_k, \\ \mu = \mu' - n(p+1),\ \nu = \nu' - n\sigma, \ldots, \\ m = s - nn_1, \\ P_m \quad = P_{s-nn_1} = P_{(s_1-n, \ldots, \mu'-np-n, \ldots)}. \end{cases}$$

Zugleich bekommt die Gleichung (42) die Form:

(69) $$\int_L f_1 \varphi_s P_{s-nn_1}\, dz = 0,$$

wo P_{s-nn_1} ein Polynom n^{ten} Grades der früher definirten Art ist. — Setzen wir nunmehr für die ganzen Zahlen $s_1, \ldots, s_k, \mu', \nu', \ldots$ nur positive Werthe (incl. Null), und lassen dieselben derart variiren, dass die durch die erste der Gleichungen (67) bestimmte Zahl s die Werthe $0, 1, \ldots, [(n_1-1)n + \tau]$ erhält, so erhalten wir $(n_1-1)n + \tau + 1$ Gleichungen von der Form (69). Multipliciren wir endlich diese Gleichungen beziehungsweise mit den Grössen

$$B_0, B_1, \ldots, B_{(n_1-1)n+\tau},$$

welche unabhängig von z sein sollen, und combiniren die erhaltenen Gleichungen mit der Gleichung (65), so finden wir:

(70) $$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y =$$
$$= \int_L f_1 (\Omega_n + A_1 R \Omega_{n-1} + \cdots + A_{n-1} R^{n-1} \Omega_1 + A_n R^n \Phi$$
$$- B_0 P_{0-nn_1} - B_1 \varphi_1 P_{1-nn_1} - \cdots - B_g \varphi_g P_{g-nn_1})\, dz,$$

wo $g = (n_1-1)n + \tau$ ist. Wir wählen jetzt die unbestimmten Grössen $A_1, \ldots, A_n, B_0, \ldots, B_g$ derart, dass für ein beliebiges z die Gleichheit besteht:

(71) $$\Omega_n + A_1 R \Omega_{n-1} + \cdots + A_{n-1} R^{n-1} \Omega_1 + A_n R^n \Phi$$
$$- B_0 P_{0-nn_1} - B_1 \varphi_1 P_{1-nn_1} - \cdots - B_g \varphi_g P_{g-nn_1} = 0,$$

wo $g = (n_1-1)n + \tau$ ist. Diese Gleichung ist in Bezug auf z vom

Grade $nn_1 + \tau$ und führt auf $nn_1 + \tau + 1$ Gleichungen, welche linear sind in Bezug auf die $nn_1 + \tau + 1$ Unbekannten

$$A_0, A_1, \ldots, A_n,$$
$$B_0, B_1, \ldots, B_g.$$

Berechnen wir diese Unbekannten und setzen wir ihre Werthe in die Gleichung (70), so erhalten wir:

$$(72) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = 0.$$

Dies ist die gesuchte lineare Differentialgleichung, welche durch Integrale der Form (6) *integrirt werden kann.*

Bei der Ableitung der Gleichung (72), welche durch Integrale von der Form (6) integrirbar ist, spielten die Bedingungen (7) und (8) eine wesentliche Rolle. In der That benutzten wir dabei die Gleichung (42), welche auf der Bedingung (7) beruht, und die Formel (63), welche die Bedingung (8) voraussetzt. Aber zur Aufsuchung der particulären Lösungen der Gleichung (72) kann man ausser den Integralen (6), welche den Bedingungen (7) und (8) genügen, noch die Integrale von der Form (26) benutzen (welche den Bedingungen (7) und (8) nicht zu genügen brauchen). In der That folgt die Fähigkeit der Integrale von der Form (26), der Gleichung (72) zu genügen, daraus, dass sich diese Integrale durch Integrale von der Form (6), die zu Grundwegen gehören, welche den Bedingungen (7) und (8) genügen, mittelst linearer homogener Formeln mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.

Unter den Lösungen der Gleichung (72), welche durch Integrale von der Form (26) erhalten werden, die den Bedingungen (7) und (8) nicht genügen, sind viele beachtenswerth. Führen wir hier einige dieser Lösungen an, wobei mit dem Symbol $[L]$ allgemein ein Integral von der Form (6) bezogen auf den Weg L bezeichnet werden soll.

1) Wenn der reelle Theil der Grösse λ_σ positiv ist ($\sigma = 1, \ldots, k$) so kann man im Integral (26) $z' = z'' = z_\sigma$ setzen, und unter $z_\sigma z_\sigma$ eine geschlossene durch z_σ gehende Curve verstehen. Wenn somit der reelle Theil von λ_σ positiv ist, muss die Gleichung (72) Lösungen von der folgenden Form haben:

$$(73) \qquad y = [(\mathfrak{z})_{z_\sigma}],$$

wo $\mathfrak{z}$ irgend einer von den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ (mit Ausnahme des Punktes z_σ) und $(\mathfrak{z})_{z_\sigma}$ eine elementare Contour ist, die vom Punkte z_σ ausgeht und den Punkt $\mathfrak{z}$ umkreist. Ferner giebt (immer vorausgesetzt, dass der reelle Theil der Grösse λ_σ positiv ist) die

Formel (26) für $z' = z_\sigma$ und $z'' = \xi, \eta, \zeta, \ldots$ noch folgende Lösungen der Gleichung (72):

$$(74) \qquad y = [(z_\sigma\xi)_s], \quad y = [(z_\sigma\eta)_s], \quad y = [(z_\sigma\zeta)_s], \ldots,$$

wo $(z_\sigma\xi)_s$, $(z_\sigma\eta)_s$, $(z_\sigma\zeta)_s, \ldots$ Curven sind, welche die Punkte z_σ und ξ, z_σ und η, z_σ und $\zeta, \ldots$ unter sich verbinden, wobei diese Curven in unendlicher Nähe der Punkte $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ beziehungsweise innerhalb der Winkel $\xi_{2s-1}(s=1,\ldots,p)$, $\eta_{2s-1}(s=1,\ldots,q)$, $\zeta_{2s-1}(s=1,\ldots,r)\ldots$ verlaufen müssen.

2) Wenn der reelle Theil der beiden Grössen λ_σ und λ_s positiv ist (s und σ können zwei beliebige unter den Zahlen $1, \ldots, k$ sein), giebt die Formel (26) für $z' = z_\sigma$ und $z'' = z_s$ folgende Lösung der Gleichung (72):

$$(75) \qquad y = [z_\sigma z_s],$$

wo $z_\sigma z_s$ eine die Punkte z_σ und z_s verbindende Curve bedeutet.

3) Wenn der reelle Theil der Grösse

$$(76) \quad h = \tau + 1 + (\lambda_1 - 1) + \cdots + (\lambda_k - 1) + (a-1) + (b-1) + \cdots,$$

wo τ eine Potenz der durch Gleichung (6') bestimmten Function Φ ist, negativ ist, so dass die Function $f\Phi$ für $z = \infty$ sich in Null von der Ordnung > 1 verwandelt, so giebt die Formel (26) für $z' = \infty$ und $z'' = \infty, \xi, \eta, \ldots$ folgende Lösungen der Gleichung (72):

$$(77) \qquad y = [(\mathfrak{z})_\infty], \quad y = [(\infty\xi)_s], \quad y = [(\infty\eta)_s], \ldots.$$

Hier ist $(\mathfrak{z})_\infty$ eine elementare Contour, die aus der Unendlichkeit kommt und den zu den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ gehörenden Punkt $\mathfrak{z}$ umkreist. Ferner sind $(\infty\xi)_s$, $(\infty\eta)_s, \ldots$ Curven, welche aus der Unendlichkeit nach den Punkten $\xi, \eta, \ldots$ hinlaufen, wobei sie in unendlicher Nähe der Punkte $\xi, \eta, \ldots$ beziehungsweise innerhalb der Winkel $\xi_{2s-1}(s=1,\ldots,p)$, $\eta_{2s-1}(s=1,\ldots,q), \ldots$ liegen.

4) Wenn nicht nur der reelle Theil der gerade genannten Grösse h negativ ist, sondern dazu noch der reelle Theil der Grösse λ_σ positiv, so giebt die Formel (26) für $z' = z_\sigma$ und $z'' = \infty$ folgende Lösungen der Gleichung (72):

$$(78) \qquad y = [z_\sigma\infty],$$

wo $z_\sigma\infty$ eine vom Punkte z_σ ins Unendliche sich erstreckende Curve ist.

Bemerken wir noch, dass *mit Hilfe der im* § II *angegebenen Umformungen, welche erlauben, die Indices* $\lambda_1 \ldots \lambda_k$, a, $b, \ldots$ *um beliebige ganze Zahlen zu vergrössern oder zu verkleinern, immer erreicht werden kann, dass den Existenzbedingungen eines jeden der Integrale* (73), (74), (77) *und* (78) *genügt wird.*

Anmerkung 1. Die oben betrachtete (durch Gleichung 5 bestimmte) Function f enthält keinen Factor von der Form e^φ, wo φ

eine ganze Function der Veränderlichen z ist. Aber der Fall, dass die Function f einen derartigen Factor enthält, ist auch von keiner besonderen Wichtigkeit, da er mittelst der Substitution

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta}$$

(unter z' die neue Variable verstanden) leicht auf den betrachteten Fall zurückgeführt werden kann.

Anmerkung 2. Es sei

$$(79) \quad f = \{\psi_1(x,z)\}^{h_1} \ldots \{\psi_s(x,z)\}^{h_s} \{\varphi_1(x,z)\}^{k_1} \ldots \{\varphi_\sigma(x,z)\}^{k_\sigma} e^{\Theta(x,z)},$$

wo $\psi_1(x,z), \ldots, \psi_s(x,z), \varphi_1(x,z), \ldots, \varphi_\sigma(x,z)$ in Bezug auf z ganze algebraische und in Bezug auf x eindeutige (algebraische oder transcendente) Functionen sind, und $\Theta(x,z)$ ein Bruch von der Form ist:

$$\Theta(x,z) = \frac{Q(x,z)}{\{\varphi_1(x,z)\}^{n_1} \ldots \{\varphi_\sigma(x,z)\}^{n_\sigma}},$$

worin $n_1, n_2, \ldots, n_\sigma$ ganze positive Zahlen sind und der Zähler $Q(x,z)$ in Bezug auf x eine eindeutige und in Bezug auf z, ganze Function von niedrigerem Grade als der Nenner ist. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Function

$$\Psi(x,z) = \psi_1(x,z) \ldots \psi_s(x,z)\, \varphi_1(x,z) \ldots \varphi_\sigma(x,z)$$

in Bezug auf die Variable z nur für einige specielle Werthe der Variablen x Doppelwurzeln haben kann, im allgemeinen aber die Gleichung

$$\Psi(x,z) = 0$$

keine Doppelwurzeln in Bezug auf z besitzt. Die betrachtete Function f kann leicht auf die Form (5) gebracht werden. Dafür genügt es auf der rechten Seite der Gleichung (79) die Functionen

$$\psi_1(x,z), \ldots, \psi_s(x,z), \varphi_1(x,z), \ldots, \varphi_\sigma(x,z)$$

in bezüglich z lineare Factoren zu zerlegen, und den Bruch $\Theta(xz)$ durch seine Zerlegung in Partialbrüche zu ersetzen. Somit werden für die betrachtete Function f, nach Herstellung der Form (5), die Grössen $z_1, \ldots, z_k$ die Wurzeln der Gleichungen $\psi_1(x,z) = 0, \ldots, \psi_s(x,z) = 0$ darstellen, die Grössen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ aber die Wurzeln der Gleichungen $\varphi_1(x,z) = 0, \ldots, \varphi_\sigma(x,z) = 0$. Ferner stellen die Grössen

$$u_1, u_2, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r, \ldots$$

die Zähler bei der Zerlegung des Bruches $\Theta(x,z)$ in Partialbrüche dar, sind folglich rationale Functionen der Wurzeln $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Endlich sind die Coefficienten der auf die früher angegebene Weise gebildeten linearen Differentialgleichung, welche durch Integrale von der Form (6) integrirt wird, im vorliegenden Falle nichts anderes, als in Bezug auf z *symmetrische Functionen* der Wurzeln jeder der Gleichungen:

$\psi_1(x, z) = 0, \ldots, \psi_s(x, z) = 0, \quad \varphi_1(x, z) = 0, \ldots, \varphi_\sigma(x, z) = 0.$ Unter diesen Umständen müssen die Coefficienten der genannten linearen Gleichung offenbar eindeutige Functionen von x sein [insofern wir Φ als eindeutige Function von x angenommen hatten]. Besagte Coefficienten werden ausserdem algebraisch sein, wenn die Functionen $\psi_1(x, z), \ldots, \varphi_\sigma(x, z)$, Φ und $\Theta(x, z)$ von x algebraisch abhängen.

Anmerkung 3. Es ist leicht zu sehen, 1) dass die Gleichung (72) in Gleichung (1) übergeht, wenn $\Phi = 1$ und u_1 eine lineare Function von x ist, während die übrigen Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$ von x unabhängig sind; 2) dass die Gleichung (72) in Gleichung (2) übergeht, wenn $\Phi = 1$ und $z_1 = x$ ist, während die übrigen Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$ von x unabhängig sind.

Anmerkung 4. Es sei

$$y = \int_L f\,dz, \tag{80}$$

$$Y = \int_L f\Phi\,dz, \tag{81}$$

wo f und Φ Functionen sind, welche durch die Gleichungen (5) und (6′) bestimmt werden, und L ein Weg ist, welcher den Bedingungen (6) und (7) genügt. Mit Hülfe der Gleichungen von der Form (63) und (69) überzeugen wir uns, dass zwischen den eben erwähnten Integralen y und Y ein Zusammenhang von folgender Form besteht:

$$Y = X_0 y + X_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + X_{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \tag{82}$$

wo $X_0, \ldots, X_{n-1}$ bekannte Functionen der Variablen x sind. *Daher sind die mittelst der Integrale* (80) *integrirbare lineare Differentialgleichung und andererseits die allgemeinere mittelst der Integrale* (81) *integrirbare lineare Differentialgleichung von einander nicht wesentlich verschieden, indem man die zweite Gleichung als das Resultat der Umformung der ersten Gleichung vermöge der Substitution* (82) *betrachten kann.*

§ IV.

Beispiele.

Beispiel 1. Um die in den vorhergehenden Paragraphen dargestellte Theorie auf die einfachsten Beispiele anzuwenden, setzen wir zunächst:

$$f = z^\alpha e^{\frac{h}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z^3}}, \quad \Phi = 1. \tag{83}$$

Man kann dann der Gleichung (71) folgende Form geben:

$$A_3 z^6 + A_2 z^4 + A_1 z^2 + 1 =$$
$$= (\alpha + 1) B_3 z^6 - (hB_3 - \alpha B_2) z^5 - [2xB_3 + hB_2 - (\alpha - 1) B_1] z^4$$
$$- [3B_3 + 2xB_2 + hB_1 - (\alpha - 2) B_0] z^3 - (3B_2 + 2xB_1 + hB_0) z^2$$
$$- (3B_1 + 2xB_0) z - 3B_0.$$

Und daraus folgen die Gleichungen:

$$A_3 = (\alpha + 1) B_3, \quad hB_3 - \alpha B_2 = 0,$$
$$A_2 = -2xB_3 - hB_2 + (\alpha - 1) B_1, \quad 3B_3 + 2xB_2 + hB_1 - (\alpha - 2) B_0 = 0,$$
$$A_1 = -3B_2 - 2xB_1 - hB_0, \quad 3B_1 + 2xB_0 = 0, \quad 1 = -3B_0,$$

mit deren Hülfe wir finden:

$$(84) \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{-18h + (6h - 4x^2)(2hx + 3\alpha)}{9(2hx + 3\alpha)}, \\ A_2 = \dfrac{(2hx + 3\alpha)[2(2\alpha - 1)x + h^2] - 6(2\alpha x + h^2)}{9(2hx + 3\alpha)}, \\ A_3 = -\dfrac{\alpha(\alpha + 1)(2hx + 3\alpha - 6)}{9(2hx + 3\alpha)}. \end{cases}$$

Somit also lässt sich die Gleichung:

$$(85) \quad 9(2hx + 3\alpha)\frac{d^3y}{dx^3} - [18h + (4x^2 - 6h)(2hx + 3\alpha)]\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ \{(2hx + 3\alpha)[2(2\alpha - 1)x + h^2] - 6(2\alpha x + h^2)\}\frac{dy}{dx}$$
$$- \alpha(\alpha + 1)(2hx + 3\alpha - 6)\, y = 0$$

durch Integrale von der Form

$$(86) \qquad y = \int_L z^\alpha e^{\frac{h}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z^3}}\, dz$$

integriren.

Beispiel 2. Es sei

$$f = (z - 1)^{\lambda - 1} z^{a - 1} e^{\frac{u}{z} + \frac{x}{z^2}}, \quad \Phi = 1,$$

wo u eine Constante ist.

In diesem Falle kann man der Gleichung (71) folgende Form geben:

$$1 + A_1 z^2 + A_2 z^4 + A_3 z^6$$
$$= 2xB_0 + [(u - 2x) B_0 + 2xB_1] z$$
$$+ [(4 - a - u) B_0 + (u - 2x) B_1 + 2xB_2] z^2$$
$$+ [(a + \lambda - 4) B_0 + (3 - a - u) B_1 + (u - 2x) B_2 + 2xB_3] z^3$$
$$+ [(a + \lambda - 3) B_1 + (2 - a - u) B_2 + (u - 2x) B_3] z^4$$
$$+ [(a + \lambda - 2) B_2 + (1 - a - u) B_3] z^5 + (a + \lambda - 1) B_3 z^6.$$

Und daraus folgen die Gleichungen:

$$2xB_0 = 1, \quad 2xB_1 + (u - 2x)B_0 = 0,$$
$$2xB_3 + (u - 2x)B_2 + (3 - a - u)B_1 + (a + \lambda - 4)B_0 = 0,$$
$$(1 - a - u)B_3 + (a + \lambda - 2)B_2 = 0,$$
$$A_1 = 2xB_2 + (u - 2x)B_1 + (4 - a - u)B_0,$$
$$A_2 = (u - 2x)B_3 + (2 - a - u)B_2 + (a + \lambda - 3)B_1,$$
$$A_3 = (a + \lambda - 1)B_3,$$

mit deren Hülfe wir finden:

$$(87)\quad \begin{cases} A_1 = -\dfrac{2(a+u-1)Mx + [(2x-u)^2 + 2(a+u-4)x]N}{4Nx^2}, \\[2ex] A_2 = \dfrac{[(a+\lambda-2)(2x-u) + (a+u-2)(a+u-1)]N}{4Nx^4} \\[2ex] \qquad\qquad + \dfrac{(a+\lambda-3)(2x-u)}{4x^2}, \\[2ex] A_3 = -\dfrac{(a+\lambda-2)(a+\lambda-1)M}{4Nx^3}, \end{cases}$$

wo

$$(87')\quad \begin{cases} M = 2(u-\lambda+1)x - (a+u-3)u, \\ N = 2(u-\lambda+1)x - (a+u-1)u. \end{cases}$$

Daher ist die Gleichung

$$(88)\quad \frac{d^3y}{dx^3} + A_1\frac{d^2y}{dx^2} + A_2\frac{dy}{dx} + A_3y = 0,$$

in welcher die Coefficienten A_1, A_2 und A_3 durch die Gleichungen (87) und (87′) bestimmt werden, integrirbar mit Hülfe von Integralen der Form:

$$(89)\quad y = \int\limits_L (z-1)^{\lambda-1} z^{a-1} e^{\frac{u}{z}+\frac{x}{z^2}}\, dz.$$

Bemerken wir, dass die Gleichung (88) in demjenigen Theile der Ebene x, welche den Punkt $x = 0$ umgiebt, irreguläre Integrale besitzt, deren Zerlegung in unendliche nach Potenzen von x fortschreitende Reihen nach den gewöhnlichen Methoden sehr complicirte Rechnungen erfordert.

§ V.

Analytische Eigenschaften der Functionen, welche sich durch bestimmte Integrale der Form (6) ausdrücken lassen.

Es ist bekannt, dass die analytischen Functionen am meisten charakterisirt werden durch ihre singulären Punkte und ihr Verhalten bei sogenannten *Umläufen* oder *Umkreisungen* dieser Punkte. Was insbesondere die Functionen betrifft, welche linearen Differential-

gleichungen genügen, so muss man bemerken, dass der Verlauf dieser Functionen beim Umkreisen der singulären Punkte eine noch grössere Bedeutung erlangt in Anbetracht des jetzigen Standes der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Desshalb halte ich es nicht für überflüssig, eine einfache Methode zur Untersuchung der bezüglichen Eigenschaften solcher Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Variablen x zu geben, welche durch Integrale von der Form (6) bestimmt werden, die längs der Grundintegrationswege erstreckt sind. (Dabei wird angenommen, dass die Grössen $z_1, \ldots, z_k$, ξ, $u_1, \ldots, u_p$, η, $v_1, \ldots, v_q, \ldots$ gegebene Functionen der Variablen x sind; einige dieser Grössen können in speciellen Fällen auch constant sein.) Diese Methode, in welcher die Riemann'sche Auffassung der Integrationswege als gespannter Fäden (vergl. die Note zu p. 512) eine besondere Rolle spielt, macht es möglich die Lage der singulären Punkte der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auf der Ebene der Variablen x zu bestimmen, und die Wirkung der Umkreisungen dieser Punkte auf die Werthe der genannten Functionen zu untersuchen, wobei wir ohne Weiteres die sogenannten *Umkreisungscoefficienten* erhalten werden (d. h. die constanten Coefficienten, welche in den linearen Ausdrücken auftreten, mittelst deren man die Endwerthe der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vermöge ihrer Anfangswerthe darstellt).

Haben wir so eine unmittelbare Methode zur Untersuchung der singulären Punkte der Integrale von der Form (6), und verbinden wir dieselbe mit der Theorie der Integration linearer Differentialgleichungen durch unendliche Reihen, so dringen wir dadurch einerseits besser in die Eigenschaften der Integrale von der Form (6) ein, besonders was ihre Fähigkeit betrifft, sich auf verschiedene Weisen in unendliche Reihen zerlegen zu lassen, andererseits entdecken wir ganze Classen von linearen Differentialgleichungen, bei welchen die im Allgemeinen sehr complicirte und bei dem jetzigen Stande der Theorie der linearen Gleichungen grundlegende Aufgabe, die erwähnten Umkreisungscoefficienten zu berechnen, sich sogar beim Vorhandensein sogenannter irregulärer Integrale vereinfacht.

In der Folge werden wir zugleich mit der Aenderung von x die in der z-Ebene verlaufenden Integrationswege der betrachteten Integrale gewissen stetigen Deformationen unterwerfen müssen, welche dadurch entstehen, dass zusammen mit dem Punkte x die Punkte $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, $\zeta, \ldots$ bewegt werden und zugleich auch die Schenkel der Winkel $\xi_{2\sigma-1}(\sigma=1,\ldots,p)$, $\eta_{2\sigma-1}(\sigma=1,\ldots,q)$ $\zeta_{2\sigma-1}(\sigma=1,\ldots,r), \ldots$ innerhalb welcher die reellen Theile der Grössen

$$(90) \qquad \frac{u_p}{(z-\xi)^p}, \quad \frac{v_q}{(z-\eta)^q}, \quad \frac{w_r}{(z-\zeta)^r}, \ldots$$

beziehungsweise negativ sind (siehe § I, Besprechung der Contouren der 2^{ten} und 3^{ten} Gruppe).

Um uns den Charakter dieser Deformationen klar zu machen, wollen wir uns folgende Vorstellungen bilden:

I. *Die Ebene der Variablen z wird in den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ durchsetzt durch genügend dünne feste cylindrische Stäbe, deren Axen senkrecht zur Ebene stehen.* (Der Kürze halber bezeichnen wir diese Stäbe mit denselben Buchstaben, wie die Durchschnittspunkte ihrer Axen mit der Ebene; also werden diese Stäbe beziehungsweise heissen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$).

II. *Für ein gegebenes x sind die Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ unbeweglich; bei der Aenderung von x aber bewegen sie sich zusammen mit den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$, so zwar, dass ihre Axen beständig durch diese Punkte gehen.*

III. *Bei der Aenderung von x führen die Stäbe $z_1, \ldots, z_k$ nur eine vorschreitende Bewegung aus, die Stäbe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ aber ausserdem noch eine drehende Bewegung, in Folge welcher die Schenkel der Winkel $\xi_{2\sigma-1}(\sigma = 1, \ldots, p)$, $\eta_{2\sigma-1}(\sigma = 1, \ldots, q)$, $\zeta_{2\sigma-1}(\sigma = 1, \ldots, r), \ldots$ beständig in denselben die Axen enthaltenden Schnittebenen der bezüglichen Stäbe liegen.* (Diese Schnitte der Stäbe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ wollen wir *Hauptschnitte* nennen).

IV. *Jeder den Bedingungen* (7) *und* (8) *genügende Integrationsweg L, welcher aus einer geschlossenen Curve, die nicht durch die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ geht, besteht, und die Eigenschaft besitzt, dass die Function f beim Durchlaufen dieses Weges am Anfange und am Ende denselben Werth annimmt, stellt einen zusammenhängenden, geschlossenen, dehnbaren und zusammendrückbaren, biegsamen und leichtbeweglichen Faden vor, welcher eine bestimmte Anzahl Male die Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ umkreist.* Auf diese Weise z. B. erscheint der zur ersten Gruppe gehörende Weg $(z'z''\bar{z}'\bar{z}'')$ als ein zusammenhängender geschlossener Faden

$$\alpha\beta\beta'\beta''\beta\alpha\gamma\gamma'\gamma''\gamma\alpha\beta\beta''\beta'\beta\alpha\gamma\gamma''\gamma'\gamma\alpha$$

(Fig. 1, pag. 514), welcher die Stäbe z' und z'' umkreist.

V. *Jeder den Bedingungen* (7) *und* (8) *genügende Weg L, welcher aus einer Curve besteht, deren Anfang z' und Ende z'' mit einigen der Punkte $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zusammenfallen, und welcher sonst keine Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ enthält, erscheint ebenfalls als ein zusammenhängender, dehnbarer und zusammendrückbarer, biegsamer und leichtbeweglicher Faden. Dabei sind die innerhalb der Stäbe z' und z'' verlaufenden Endstücke dieses Fadens in diese Stäbe unveränderlich eingefügt, so zwar, dass sie zwischen den Hauptschnitten der Stäbe innerhalb der Winkel verlaufen, für deren Punkte die reellen Theile der zugehörigen Grössen* (90) *negativ sind.* Auf diese Weise erscheinen z. B. die Wege

$(z')_\xi^\xi$ und L_ξ^ξ der 2ten und 3ten Gruppe (s. § I) als die Fäden $\xi\delta\delta'\delta''\delta\xi$ und $\xi\varepsilon\varepsilon'\xi$ (Fig. 2, pag. 516). Die *Endstücke* dieser Fäden, d. h. ihre unveränderlich mit dem Stabe ξ zusammenfallenden Stücke, sind in Fig. 2 durch die punktirten Linien bezeichnet (der Kreis $g' g'' g'''$ stellt den Schnitt des Stabes ξ mit der Ebene der Variablen z dar). Man muss allgemein festhalten, dass bei Aenderungen von x die in die Punkte z', z'' einmündenden Endstücke des betrachteten Weges L an den vorschreitenden und drehenden Bewegungen der Stäbe z' und z'' theilnehmen müssen. Durch diese Bewegung wird dann der ganze Weg L deformirt. —

Jetzt ist es leicht sich allgemein die Deformationen der Integrationswege vorzustellen, welche durch Aenderungen von x hervorgerufen werden. In der That, wenn sich x in bestimmter Weise ändert, so werden, solange der Punkt x nicht gerade in einen der singulären Punkte hineinfällt, die Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ sich auf eine bestimmte Weise bewegen und zugleich die oben genannten Fäden, welche die Integrationswege darstellen, in Bewegung setzen und deformiren. Offenbar werden diese Wege während der ganzen Zeit der betrachteten Deformation den Bedingungen (7) und (8) genügen, wobei sich die auf diese Wege bezogenen Integrale $y_1, \ldots, y_n$ auf bestimmte Weise stetig ändern müssen.

Wir bemerken noch, dass neben den hiermit bezeichneten Deformationen der Integrationswege noch solche bei constantem x zugelassen werden, nämlich alle diejenigen, bei denen sich die Werthe der zugehörigen Integrale nicht ändern. Wenn für ein gegebenes x zwei Integrationswege durch stetige Deformation der letzteren Art zum Zusammenfallen gebracht werden können, wollen wir zwei solche Wege wie früher (s. § I) *gleichbedeutend* nennen.

Unter den Wegdeformationen bei constantem x verdient besondere Beachtung die Deformation, welche einer Verschiebung des Anfangspunktes α der Fäden $(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), \ldots$ entspricht, aus denen wir unsere Grundwege zusammengesetzt haben. Wenn man diesen Anfangspunkt längs einer beliebigen Curve verschiebt, welche durch keinen der Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ geht, so wird das Integral von der Form (6), bezogen auf irgend einen Weg $(z' z'' \bar{z}' \bar{z}'')$ (bei welchem die Punkte z' und z'' zu der Punktreihe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ gehören) seinen Werth nicht ändern. Dies berechtigt uns, den Anfangspunkt α der Wege $(z' z'' \bar{z}' \bar{z}'')$ selber als beweglich zu betrachten.

Somit dürfen wir beispielsweise diesen Anfangspunkt α unmittelbar mit der Hand verrücken, sobald es nothwendig erscheint. Wenn er aber bei der Aenderung von x sich auf dem Wege irgend eines der Stäbe befindet, so müssen wir uns vorstellen, dass er durch die Bewegung

dieses Stabes zusammen mit den Fäden, die von ihm auslaufen, verschoben wird.

Um jetzt die singulären Punkte der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zu untersuchen, welche durch bestimmte Integrale von der Form (6), die längs der Grundwege erstreckt werden, ausgedrückt werden, wollen wir der Kürze wegen diese Wege beziehungsweise mit $L_1, L_2, \ldots, L_n$ bezeichnen; ferner werden wir zugleich mit der Ebene der Variablen z auch die Ebene der Variablen x betrachten, auf welche die singulären Punkte der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fallen.

Indem wir jetzt zwecks Aufsuchung dieser singulären Punkte den Punkt x verschiedene Punkte seiner Ebene umkreisen lassen, müssen wir nicht nur die dabei von den Stäben hervorgebrachte Deformation der die Integrationswege vorstellenden Fäden verfolgen, sondern auch *die Wirkung dieser Umkreisungen auf den Werth der zu integrirenden Function f selbst, welcher Werth sich manchmal nach einer Umkreisung geändert haben kann.*

Indem wir dies im Auge behalten, setzen wir fest, dass wir den Werth der Function f für diejenigen der Grundwege $L_1, \ldots, L_n$, deren Anfangspunkt mit dem Punkte α (Fig. 1) zusammenfällt, durch den für diesen Anfangspunkt geltenden Anfangswerth der Function f bestimmen, d. h. durch den Werth der Grösse

$$\chi(x) = (f)_{z=\alpha}. \tag{91}$$

Ferner wollen wir den Werth der Function f für diejenigen Integrationswege $L_1, \ldots, L_n$, deren Anfangspunkte nicht mit dem Punkte α zusammenfallen, ebenfalls durch den Werth $\chi(x)$ der Function f für den Punkt $z = \alpha$ bestimmen. Zu diesem Zwecke stellen wir uns vor, dass diese Integrationswege durch *Hülfsfäden*, welche die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ nicht enthalten, mit dem Punkte α verbunden sind, wobei die Function f, welche für den Punkt $z = \alpha$ den angegebenen Anfangswerth $\chi(x)$ besitzt und sich bei der Bewegung des Punktes z entlang dieser Hülfsfäden stetig ändert, diese Wege mit denjenigen bestimmten Werthen erreicht, welche wir nun der Function f bei den auf diese Wege bezogenen Integrationen als neue Anfangswerthe zuertheilen wollen. Unter solchen Bedingungen wird der Einfluss, den die Umkreisungen des einen oder anderen Punktes der x-Ebene auf die zu integrirende Function f besitzen, vollständig bestimmt durch den Einfluss ebenderselben Umkreisungen auf die Grösse $\chi(x)$. Dieser Einfluss ist sorgfältig zu studiren.

Beim Aufsuchen der singulären Punkte der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ braucht man jetzt, wie ich behaupte, *nur folgende drei Categorien von Punkten der Ebene* x zu untersuchen:

I. *Diejenigen Punkte, für welche einige der Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ einander gleich werden;*

II. *Die Punkte, für welche einige der Grössen* $u_p, v_q, w_r, \ldots$ *gleich Null werden;*

III. *Die singulären Punkte der Functionen* $z_1, \ldots, z_k$, ξ, $u_1, \ldots, u_p$, η, $v_1, \ldots, v_q, \ldots, \varrho_0, \ldots, \varrho_\tau$.

Ausser diesen drei Categorien können die Functionen $y_1, \ldots, y_n$ keine singulären Punkte haben. Beweisen wir in der That, dass *der Punkt* x_0 *kein singulärer Punkt irgend einer der Functionen* $y_1, \ldots, y_n$ *ist, wenn er nicht zu einer der drei genannten Categorien gehört.* Bemerken wir zunächst, dass vermöge der so getroffenen Festsetzung die Functionen $z_1, \ldots, z_k$, ξ, $u_1, \ldots, u_p$, η, $v_1, \ldots, v_q, \ldots$ sowie auch die Amplituden der Functionen $u_p, v_q, \ldots$ in der Umgebung des Punktes x_0 endlich, stetig und eindeutig sein müssen. Wenn also die Variable x den Punkt x_0 auf einer unendlich kleinen geschlossenen Curve umkreist, so können dabei die Functionen $z_1, \ldots, z_k$, ξ, $u_1, \ldots, u_p$, η, $v_1, \ldots, v_q, \ldots$ und die Amplituden der Functionen $u_p, v_q, \ldots$ nur unendlich kleine Zunahmen erfahren, und müssen schliesslich wieder die Anfangswerthe annehmen. In Folge dessen werden die Stäbe $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, $\zeta, \ldots$, welche durch ihre Bewegung eine Deformation der Integrationswege hervorrufen können, während der Umkreisung nur unendlich kleine vorschreitende oder drehende Bewegungen ausführen, nach der Umkreisung aber (auch was die Hauptschnitte der Stäbe ξ, η, $\zeta, \ldots$ angeht) in ihre Anfangslage zurückgekehrt sein. Wenn nun gleichzeitig die Bedingung erfüllt wird, dass der Anfangspunkt α der Fäden $(z_1), \ldots, (z_k)$, (ξ), $(\eta), \ldots$ in endlicher Entfernung von den Flächen liegt, die von den unendlich kleinen geschlossenen Curven abgegrenzt werden, welche bei der betrachteten Umkreisung von den Punkten $z_1, \ldots, z_k$, ξ, $\eta, \ldots$ beschrieben werden, so werden bei der ganzen Bewegung die Grundwege $L_1, \ldots, L_n$ nur unendlich wenig deformirt, und werden fortgesetzt solche Lagen einnehmen, die mit den Anfangslagen der Wege gleichbedeutend sind. Gleichzeitig nimmt die Function f nach vollendeter Umkreisung für $z = \alpha$ denselben Anfangswerth wieder an den sie vorher hatte. Hiernach verursacht die Umkreisung des Punktes x_0 keine Aenderungen der Werthe der auf die Wege $L_1, \ldots, L_n$ bezogenen Integrale. Folglich erhalten die Functionen $y_1, \ldots, y_n$ nach der angedeuteten Umkreisung ihre ursprünglichen Werthe. Diese Functionen sind also in der Umgebung des Punktes x_0 jedenfalls eindeutig. Ausserdem aber sind diese Functionen und ihre Abgeleiteten in demselben Bereiche offenbar endlich und stetig. Somit ist der Punkt x_0 kein singulärer Punkt der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ und jede dieser Functionen kann für Punkte x, die hinreichend nahe an x_0 liegen, nach ganzen, positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden.

Nehmen wir jetzt an, *der Punkt x_0 gehöre zur ersten Categorie.* Dann kann er, wie wir behaupten, ein singulärer Punkt einiger der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ sein. Um dies an einem einfachen Beispiele zu erklären, denken wir uns, dass für $x = x_0$ nur die Grössen z_1 und z_2 einander gleich werden, und zugleich den Werth z_0 annehmen, und dass beim Umlauf des x um x_0 die Punkte z_1 und z_2 um den Punkt z_0 in positivem Sinne die geschlossenen Contouren $z_1\beta' z_1'\beta'' z_1$ und $z_2\gamma' z_2'\gamma'' z_2$ beschreiben. Nehmen wir dabei an, die Curve $z_1\beta' z_1'\beta'' z_1$ läge innerhalb der von der Curve $z_2\gamma' z_2'\gamma'' z_2$ begrenzten Fläche, und der Anfangspunkt α der Wege $(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), (\zeta), \ldots$ befinde sich ausserhalb dieser Fläche und überhaupt ausserhalb der Flächen, welche von den geschlossenen Curven begrenzt werden, welche bei

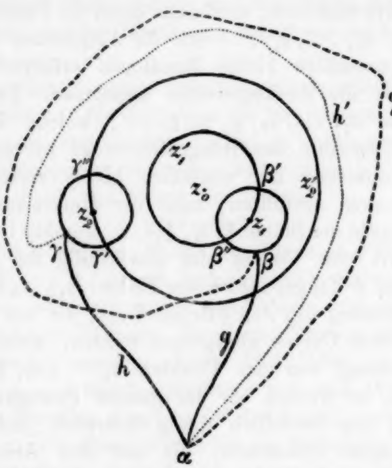


Fig. 3.

der betrachteten Umkreisung von den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ beschrieben werden (Fig. 3). Wenn wir nun die Aenderung der durch Gleichung (91) bestimmten Grösse $\chi(x)$, ferner die Bewegung der Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \zeta, \ldots$ verfolgen (die beide der Umkreisung des Punktes x_0 entsprechen), und ebenso die durch diese Bewegung hervorgebrachten Deformationen der Fäden untersuchen, welche die Contouren $(z_1), \ldots, z_k, (\xi), (\eta), (\zeta), \ldots$ erzeugen, die einen Bestandtheil der Wege:

$$(92)\qquad \begin{cases} (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2), & (z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3), \ \ldots, \ (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k), \\ (z_1 \xi \bar{z}_1 \bar{\xi}), & (z_1 \eta \bar{z}_1 \bar{\eta}), \ (z_1 \zeta \bar{z}_1 \bar{\zeta}), \ldots \end{cases}$$

bilden, so bemerken wir folgendes:

1) Die durch Gleichung (91) bestimmte Grösse $\chi(x)$ nimmt nach der Umkreisung den Anfangswerth wieder an.

2) Die Contour (z_1) [auf Fig. 3 durch die Curve $\alpha g\beta\beta'\beta''\beta g\alpha$ bezeichnet] wird schliesslich eine Lage einnehmen, welche gleichbedeutend ist mit der Lage der Contour $\alpha g'\beta\beta'\beta''\beta g'\alpha$ (Fig. 3); dieselbe ist in der Figur durch eine dicke punktirte Linie bezeichnet und unterscheidet sich von Contour (z_1) nur durch eine Umkreisung des Stabes z_2.

3) Die Contour (z_2) [in Fig. 3 $\alpha h\gamma\gamma'\gamma''\gamma h\alpha$] nimmt nach der Umkreisung eine Lage ein, welche gleichbedeutend ist mit der Lage der Contour $\alpha h'\gamma'\gamma''\gamma h'\alpha$ (Fig. 3); dieselbe ist durch eine feine punktirte Linie bezeichnet und unterscheidet sich von der Contour (z_2) durch eine Umkreisung des Stabes z_1. {Wir empfehlen dem Leser einen Faden und 2 Bleistifte, welche die Stäbe vorstellen sollen, zu nehmen, und thatsächlich die beschriebenen Bewegungen auszuführen, um sich von der Richtigkeit der mitgetheilten Resultate zu überzeugen}.

4) Die Contouren $(z_3), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), (\zeta), \ldots$ nehmen nach der Umkreisung Lagen an, welche ihren Anfangslagen gleichbedeutend sind.

Man kann auch sagen, dass bei der Anordnung der Figur 3, der Weg (z_1) nach der Umkreisung eine Lage einnehmen wird, welche gleichbedeutend ist dem Wege $(z_1 z_2 z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_1)$, der sich aus den nacheinander durchlaufenen Wegen $(z_1), (z_2), (z_1), (\bar{z}_2), (\bar{z}_1)$ zusammensetzt. Wir wollen ihn der Kürze wegen mit A bezeichnen und unter $\bar{A}$ den im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Weg verstehen. Ebenso nimmt der Weg (z_2) nach der Umkreisung eine Lage ein, welche gleichbedeutend ist dem Wege $(z_1 z_2 \bar{z}_1)$. Wir wollen diesen Weg B nennen und unter $\bar{B}$ den im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen Weg B verstehen. Zugleich werden die Wege (92) nach der Umkreisung Lagen einnehmen, welche beziehungsweise gleichbedeutend sind den Wegen:

$$(93) \qquad \begin{cases} AB\bar{A}\bar{B}, \quad A(z_3)\bar{A}(\bar{z}_3), \ldots, A(z_k)\bar{A}(\bar{z}_k), \\ A(\xi)\bar{A}(\bar{\xi}), \; A(\eta)\bar{A}(\bar{\eta}), \; A(\zeta)\bar{A}(\bar{\zeta}), \ldots, \end{cases}$$

(wo die Bezeichnung ohne Weiteres verständlich sein dürfte). Somit werden die Integrale:

$$(94) \qquad \begin{cases} y_1, \; y_2, \; \ldots, y_{k-1}, \\ y_k, \; y_{k+1}, \ldots, y_\nu, \end{cases} \qquad \nu = n - p - q - v - \cdots,$$

welche auf die Wege (92) bezogen sein mögen, die die ν ersten von den Grundwegen $L_1, \ldots, L_n$ sein sollen, nach der Umkreisung übergegangen sein in die Integrale:

$$(95)\qquad \begin{cases} Y_1, \; Y_2, \; \ldots, \; Y_{k-1}, \\ Y_k, \; Y_{k+1}, \ldots, \; Y_\nu, \end{cases}$$

welche auf die Wege (92) bezogen sind. Drücken wir jetzt diese letzteren Integrale mit Hülfe der Formel (34) durch die Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ aus, so finden wir:

$$(96_1)\qquad Y_1 = e^{2\pi(\lambda_1+\lambda_2)i}\, y_1,$$

$$(96_2)\qquad Y_{\sigma-1} = y_{\sigma-1} + e^{2\pi\lambda_1 i}(e^{2\pi\lambda_\sigma i} - 1)\, y_1 \quad (\sigma = 3, \cdots, k),$$

$$(96_3)\qquad Y_k = y_k + e^{2\pi\lambda_1 i}(e^{2a\pi i} - 1)\, y_1,$$

$$(96_4)\qquad Y_{k+1} = y_{k+1} + e^{2\pi\lambda_1 i}(e^{2\pi b i} - 1)\, y_1,$$

. . . .

. . . .

Die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ erhalten also nach der Umkreisung des Punktes x_0 in der That neue Werthe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$, welche von den Anfangswerthen verschieden sind. *Folglich ist x_0 ein singulärer Punkt der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$.*

Der hiermit betrachtete Fall erklärt in genügender Weise die Thatsache, dass die Punkte der ersten Categorie singuläre Punkte einiger der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sein können.

Nehmen wir ferner an, *der Punkt x_0 gehöre zur zweiten Categorie.* Um zu beweisen, dass auch in diesem Falle der Punkt x_0 ein singulärer Punkt einiger der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ sein kann, nehmen wir $p = 3$ an, und denken uns, die Function u_3 werde gleich Null für $x = x_0$ und zwar in der Weise, dass ihre Amplitude die Zunahme 2π erhält, während der Punkt x den Punkt x_0 unendlich nahe umkreist. Der Anfangspunkt α der Wege $(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), \ldots$ sei so gelegen, dass der Werth $\chi(x)$ der Function f für $z = \alpha$ sich nach der erwähnten Umkreisung nicht ändert. Nehmen wir noch der Einfachheit halber an, die Grössen ξ und z_1 seien constant. Es seien jetzt $A\xi B, C\xi D, E\xi F$ (Fig. 4) die Winkel ξ_1, ξ_3, ξ_5, innerhalb welcher der reelle Theil der Grösse

$$\frac{u_3}{(z-\xi)^3}$$

negativ ist, deren Schenkel also in den Hauptschnitten des Stabes ξ liegen. Ferner sollen die Curven $\xi\alpha_1\delta\delta'\delta''\delta\alpha_1\xi$, $\xi\beta_1\gamma_1\xi_3$, $\xi\beta_2\gamma_2\xi$, $\xi\beta_3\gamma_3\xi$ (Fig. 4) respective die Integrationswege

$$(97)\qquad (z_1)_\xi^1,\; L_\xi^1,\; L_\xi^2,\; L_\xi^3$$

darstellen und die Integrale von der Form (6), bezogen auf diese Wege, sollen mit y_1, y_2, y_3, y_4 bezeichnet sein. Wir nehmen ferner an, die bei Berechnung dieser Integrale in Betracht kommenden Anfangswerthe der Function f seien mittelst der Hülfsfäden $\delta''\alpha$, $\gamma_1\alpha$,

$\gamma_2\alpha$, $\gamma_3\alpha$ (Fig. 4) bestimmt (die vom Punkte α zu den Punkten δ'', γ_1, γ_2, γ_3 der bezüglichen Integrationswege hingezogen sind). Dabei müssen wir uns vorstellen, dass jeder der Fäden $\delta''\alpha$, $\gamma_1\alpha$, $\gamma_2\alpha$, $\gamma_3\alpha$ mit dem zugehörigen Wege (97) unzertrennlich verbunden ist, sich zusammen mit ihm bei Aenderungen von x deformirt, und immer dazu dient den Werth der Function f auf diesem Wege zu bestimmen. Nehmen wir ausserdem der Einfachheit halber an, dass die einerseits von den Fäden $\delta''\alpha$, $\gamma_1\alpha$, $\gamma_2\alpha$, $\gamma_3\alpha$ und andererseits von den Wegen $(z_1)_\xi^1$, L_ξ^1, L_ξ^2, L_ξ^3 begrenzten Flächen keine Stäbe enthalten. Nunmehr möge x den Punkt x_0 umkreisen. Wir verfolgen dann zunächst die Bewegung der Geraden $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$, welche

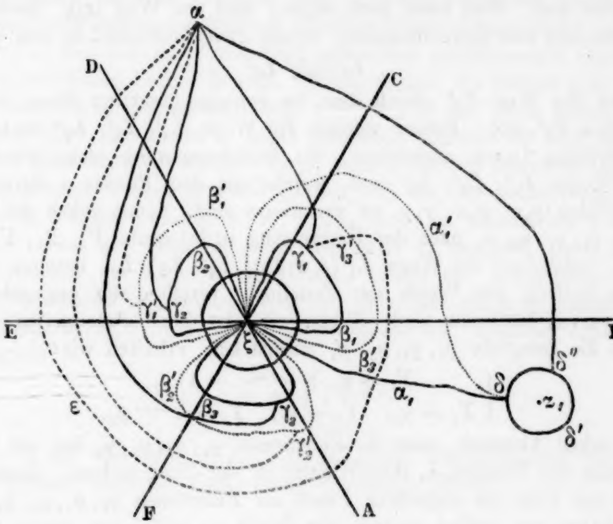


Fig. 4.

auf der Figur 4 durch die Geraden $A\xi$, $B\xi$, $C\xi$, $D\xi$, $E\xi$, $F\xi$ berechnet sind, und die Schenkel der Winkel $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ bilden; damit zugleich verfolgen wir die Drehung des Stabes ξ, dessen Hauptschnitte immer durch die sich bewegenden Geraden $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ gehen müssen, sowie auch die durch diese Drehung hervorgebrachten Deformationen der Curven $(z_1)_\xi^1$, L_ξ^1, L_ξ^2, L_ξ^3, $\delta''\alpha$, $\gamma_1\alpha_2$, $\gamma_2\alpha$ und $\gamma_3\alpha$, welche wir uns als Fäden vorstellen. Da den Bedingungen gemäss die Amplitude ω der Grösse u_3 nach der Umkreisung eine Zunahme von 2π erhalten hat, so haben dabei der Formel (9') entsprechend, die Schenkel $l_0, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$ und der Stab ξ eine Drehung um den

Winkel $\frac{2\pi}{3}$ im positiven Sinne ausgeführt, wobei die Winkel ξ_1, ξ_3, ξ_5 beziehungsweise in die Lage der Winkel ξ_3, ξ_5, ξ_1 gelangt sind. Zu gleicher Zeit nehmen die Wege $(z_1)_\xi^1, L_\xi^1, L_\xi^2, L_\xi^3$ nach der Umkreisung Lagen ein, welche beziehungsweise gleichbedeutend sind den Wegen $\xi\alpha_1'\delta\delta'\delta''\delta\alpha_1'\xi$, $\xi\beta_1'\gamma_1'\xi$, $\xi\beta_2'\gamma_2'\xi$, $\xi\beta_3'\gamma_3'\xi$ (in Fig. 4 durch die fein punktirten Linien bezeichnet). Was die Fäden $\delta''\alpha$, $\gamma_1\alpha$, $\gamma_2\alpha$, $\gamma_3\alpha$ anbelangt, welche zur Bestimmung der Anfangswerthe der Function f bei den Integrationen dienen, so kommt der erste von ihnen vermöge unserer Umkreisung in eine der Anfangslage gleichbedeutende Lage, und die drei übrigen beziehungsweise in die Lagen $\gamma_1'\alpha$, $\gamma_2'\alpha$, $\gamma_3'\alpha$, welche in Fig. 4 durch die dickpunktirten Linien bezeichnet sind. Man kann auch sagen, dass der Weg $(z_1)_\xi'$ nach der Umkreisung eine Lage einnimmt, welche gleichbedeutend ist dem Wege

$$\overline{L}_\xi^1 (z_1)_\xi^1 L_\xi^1$$

(wobei der Weg $\overline{L}_\xi^1$ gleich dem im entgegengesetzten Sinne durchlaufenen L_ξ^1 ist). Ferner werden die Wege $L_\xi^1, L_\xi^2, L_\xi^3$ nach der Umkreisung Lagen einnehmen, die beziehungsweise gleichbedeutend den Wegen $L_\xi^2, L_\xi^3, L_\xi^1$ sind, welche mit dem Punkte α durch die Hülfsfäden $\gamma_2\alpha$, $\gamma_3\alpha$, $\gamma_1\gamma_3'\varepsilon\alpha$ verbunden sind. Somit gehen die Integrale y_1, y_2, y_3, y_4 nach der Umkreisung in Integrale Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 über, welche auf die Wege $\overline{L}_\xi^1(z_1)_\xi^1 L_\xi^1$, L_ξ^2, L_ξ^3, L_ξ^1 bezogen sind, denen entlang der Werth der Function f vermöge der angegebenen Hülfscurven bestimmt wird. Wenn wir jetzt diese letzteren Integrale durch die Integrale y_1, y_2, y_3, y_4 ausdrücken, erhalten wir:

$$(98)\qquad \begin{cases} Y_1 = y_1 + (e^{2\pi\lambda_1 i} - 1)\, y_2, \\ Y_2 = y_3, \quad Y_3 = y_4, \quad Y_4 = e^{2\pi a i}\, y_2. \end{cases}$$

Wir sehen hiernach, dass die Functionen y_1, y_2, y_3, y_4 bei der Umkreisung des Punktes x_0 ihre Werthe in der That ändern. *Somit ist x_0 in der That ein singulärer Punkt der Functionen y_1, y_2, y_3, y_4.*

Setzen wir endlich voraus, *der Punkt x_0 gehöre zur dritten Categorie.* Es soll der Punkt x den Punkt x_0 auf einer unendlich kleinen Contour umkreisen, dabei aber der Anfangspunkt α der Wege $(z_1), \ldots, (z_k)$, (ξ), (η), ... auf keiner der Curven liegen, welche von den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ während der betrachteten Umkreisung beschrieben werden. Unterscheiden wir ferner zwei Fälle: 1) den Fall, dass die obengenannte Grösse $\chi(x)$ nach der betrachteten Umkreisung den Werth $K.\chi(x)$ annimmt, wo K constant ist und im speciellen Falle der Einheit gleich sein kann; 2) den Fall, dass die Grössen $\chi(x)$ nach der Umkreisung einen neuen Werth $\chi_1(x)$ annimmt, für welchen das Verhältniss

$$\frac{\chi_1(x)}{\chi(x)}$$

keine constante Grösse ist. Untersuchen wir diese zwei Fälle besonders:

Erster Fall. Es ist leicht einzusehen, dass der Punkt x_0 im betrachteten Falle ein singulärer Punkt der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ sein kann, wobei diese Functionen nach der Umkreisung des Punktes x_0 Werthe $Y_1, \ldots, Y_n$ annehmen müssen, welche sich mittelst der Anfangswerthe $y_1, \ldots, y_n$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen. Es sei z. B. der Punkt x_0 ein Pol der m^{ten} Ordnung in Bezug auf die Function z_η, dagegen kein singulärer Punkt bezüglich der Functionen $z_1, z_3, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$. Unter dieser Bedingung muss der Stab z_2, während der Punkt x um den Punkt x_0 eine einmalige unendlich kleine Umkreisung ausführt, m Umläufe um den Coordinatenanfangspunkt machen, indem er sich auf einer unendlich entfernten geschlossenen Curve im negativen Sinne herum bewegt. Somit nimmt die Grösse $\chi(x)$ nach der Umkreisung den neuen Werth $e^{-2\pi m\lambda_1 i}\chi(x)$ an. (Wir setzen dabei voraus, dass der Punkt α nicht unendlich entfernt ist und dass er wieder ausserhalb der Flächen liegt, welche von den unendlich kleinen geschlossenen Curven begrenzt werden, die bei der betrachteten Umkreisung von den Punkten $z_1, z_3, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ beschrieben werden). Ferner wird der Weg (z_2), der den Stab z_2 umgiebt, nach seiner Deformirung die Lage A einnehmen, welche der Anfangslage nicht gleichbedeutend ist, sondern sich von derselben durch m Umläufe um die Stäbe $z_1, z_3, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ unterscheidet. Zugleich erhält das Integral:

$$y_1 = \int\limits_{(z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2)} f\Phi\, dz,$$

bezogen auf den Weg $(z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2)$, zu dessen Bestandtheilen der Weg (z_2) gehört, nach der Umkreisung den neuen Werth

$$Y_1 = e^{-2\pi m\lambda_1 i} \int\limits_{(z_1 A \bar{z}_1 \bar{A})} f\Phi\, dz.$$

Diesen Werth kann man mit Hülfe der Formel (34) als eine lineare homogene Function der $y_1, \ldots, y_n$ mit constanten Coefficienten ausdrücken, wobei angenommen wird, dass man die Wege (4) als Grundintegrationswege gewählt hat. Obgleich nun diejenigen Integrationswege, welche die Curve (z_2) nicht enthalten, nach der Umkreisung Lagen einnehmen, die ihren Anfangslagen gleichbedeutend sind, so haben nichtsdestoweniger die auf diese Wege bezogenen Integrale nach der Umkreisung ihre Werthe geändert. Sie haben nämlich den Factor $e^{-2\pi m\lambda_1 i}$ erhalten, indem dieser Factor zum Werthe $\chi(x)$ der Function f für $z = \alpha$ hinzugekommen ist. Somit erscheint der

Punkt x_0 im betrachteten Beispiele als singulärer Punkt der Functionen $y_1, \ldots, y_n$.

Zweiter Fall. In diesem Falle erhält die Function f, nach der Umkreisung des Punktes x_0 durch die Variable x, auf den verschiedenen durch Hülfsfäden mit dem Punkte a verbundenen Integrationswegen einen neuen Werth f_1, für welchen das Verhältniss

$$\frac{f_1}{f}$$

nicht constant ist. Zugleich erhalten die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nach der Umkreisung des Punktes x_0 Werthe $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, welche sich ausdrücken lassen durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten mittelst der auf die Grundwege bezogenen Integrale $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, in welchen die zu integrirende Function f durch ihren obenerwähnten Werth f_1 ersetzt ist. In Folge dieser Aenderung des Werthes der zu integrirenden Function sind die Integrale $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ im Allgemeinen von den Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verschieden, und desshalb lassen sich die Integrale $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ im Allgemeinen nicht mittelst der Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten ausdrücken. Dabei muss man bemerken, dass im betrachteten Falle die Functionen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ nicht der Gleichung (72), sondern im Allgemeinen einer anderen linearen Differentialgleichung genügen werden, welche aus der Gleichung (72) erhalten wird, indem man die Coefficienten $A_1, \ldots, A_n$ durch diejenigen Werthe ersetzt, welche dieselben nach Umkreisung des Punktes x_0 annehmen. (Dieser Punkt wird im betrachteten Falle ein kritischer Punkt der Functionen $A_1, \ldots, A_n$ sein). Weitere Umkreisungen des Punktes x_0 können auf neue Werthe der betrachteten Integrale führen, welche sich zwar durch Integrale von derselben Form, bezogen auf die Grundwege, ausdrücken lassen, aber möglicherweise nicht als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten der Integrale $y_1, \ldots, y_n$ und derjenigen Integrale, welche aus ihnen durch die vorhergehenden Umkreisungen erhalten sind. Um diese Resultate zu verallgemeinern, nehmen wir an, die Functionen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots$ haben mehrere singuläre Punkte $x_0', x_0'', \ldots$, welche die Eigenschaft besitzen, dass für ein gegebenes z die Function f nach Umkreisung dieser Punkte durch die Variable x einen Werth f_1 erhalten kann, für welchen das Verhältniss $f_1 : f$ nicht constant ist. Wenn die Anzahl dieser singulären Punkte endlich ist, und wenn die Punkte in Bezug auf die Functionen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \ldots$ singuläre Punkte von algebraischem Charakter sind, so können die Functionen $y_1, \ldots, y_n$ bei allen möglichen Umkreisungen der Punkte $x_0', x_0'', \ldots$ nur eine endliche Anzahl N von *verschiedenen* oder *linear*

unabhängigen Werthen annehmen, d. h. von solchen Werthen, zwischen denen keine linearen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten bestehen. Alle übrigen Werthe der Functionen $y_1, \ldots, y_n$, welche nach den verschiedenen Umkreisungen der Punkte $x_0', x_0'', \ldots$ hervorkommen, müssen sich als lineare homogene Functionen der bereits gefundenen N Werthe, mit constanten Coefficienten, ausdrücken lassen. Wir wollen daher diese N-Werthe *Grund*werthe nennen. Nach dem Theorem von Tannery*) bilden diese Grundwerthe eine Gruppe von particulären Lösungen einer bestimmten linearen Differentialgleichung der N^{ten} Ordnung mit *eindeutigen* Coefficienten. Wir verzichten hier auf eine Discussion der umfangreichen und complicirten Frage nach dem Bildungsgesetz dieser linearen Differentialgleichung, welche durch bestimmte Integrale integrirbar ist. Wir bemerken nur, dass, wenn die Function f in Bezug auf die Variable x keine singulären Punkte zulässt, für welche der betrachtete zweite Fall eintritt, $N = n$ wird. Dabei fällt die gerade erwähnte, mit eindeutigen Coefficienten versehene Gleichung N^{ter} Ordnung ohne Weiteres mit der Gleichung (72) zusammen. Dieser Schluss trifft, wie wir uns schon früher überzeugten, für die Form (79) der Function f in der That vollständig zu.

Durch die auseinandergelegten allgemeinen Methoden sind wir nunmehr in der Lage, alle singulären Punkte der Functionen $y_1, \ldots, y_n$ aufzufinden, und den Einfluss der Umkreisungen dieser Punkte auf die Werthe dieser Functionen festzustellen. Ueberhaupt so oft wir eine Gruppe irgendwelcher Functionen y haben, welche nach der Umkreisung eines der singulären Punkte Werthe annehmen, die sich als lineare homogene Functionen der Anfangswerthe mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen, sind wir mit Hülfe dieser Untersuchungsmethoden im Stande, auch diese Coefficienten zu finden; wir können dann also, nach der Fuchs'schen Methode, die betrachteten Integrale in der Umgebung des betrachteten singulären Punktes in Potenzreihen zerlegen.

Um letztere Idee durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Integrale von der Form (89) respective bezogen auf die Grundwege $(10\bar{1}\bar{0})$, L_0^1 und L_0^2. Dieselben sind in der Figur 5 (auf folgender Seite) durch die Curven bezeichnet:

$$\alpha\gamma\gamma'\gamma''\gamma\alpha\beta\beta'\beta''\beta\alpha\gamma\gamma''\gamma'\gamma\alpha\beta\beta''\beta'\beta\alpha, \quad O\delta_1\varepsilon_1 O, \quad O\delta_2\varepsilon_2 O.$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Winkel AOB und COD (Fig. 5) diejenigen Winkel sind, für deren Punkte der reelle Theil der Grösse

*) Annales de l'Ecole Normale, t. IV, 2$^{\text{me}}$ série, p. 130.

$\frac{x}{z^2}$

negativ ist. Es ist leicht zu sehen, dass das Integral

$$(99_1) \qquad y_1 = \int\limits_{(10\bar{1}\bar{0})} (z-1)^{\lambda-1} z^{\alpha-1} e^{\frac{u}{z}+\frac{x}{z^2}} dz$$

gar keine singulären Punkte im endlichen Theile der Ebene der Variablen x besitzt und sich dementsprechend unbedingt in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von x zerlegen lässt. Aber jedes der Integrale

$$(99_2) \qquad y_2 = \int\limits_{L_0^1} (z-1)^{\lambda-1} z^{\alpha-1} e^{\frac{u}{z}+\frac{x}{z^2}} dz,$$

$$(99_3) \qquad y_3 = \int\limits_{L_0^2} (z-1)^{\lambda-1} z^{\alpha-1} e^{\frac{u}{z}+\frac{x}{z^2}} dz$$

besitzt einen einzelnen singulären Punkt, nämlich den Punkt $x = 0$. Macht der Punkt x eine Umkreisung um diesen singulären Punkt, so erhält die Amplitude von x nach dieser Umkreisung die Zunahme 2π; der Stab O, dessen Axe durch den Anfangspunkt der Ebene der Variablen z geht, und die zugehörigen Winkel AOB und COD (Fig. 5) machen dabei eine Drehung um den Winkel π, die Wege L_0' und L_0^2 nehmen also Lagen ein, welche beziehungsweise gleichbedeutend sind den Wegen L_0^2 und L_0', und die Functionen y_2 und y_3 nehmen die Werthe Y_2 und Y_3 an, welche sich durch y_2 und y_3 folgendermassen ausdrücken lassen:

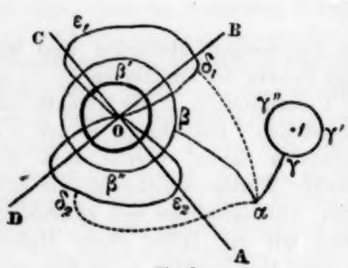


Fig. 5.

$$(100) \qquad Y_2 = e^{2\pi\alpha i} y_3, \quad Y_3 = y_2.$$

Wir haben dabei der früheren Verabredung entsprechend angenommen, dass die Werthe der zu integrirenden Function f, welche bei Berechnung von y_2 und y_3 in Betracht kommen, mit Hülfe der Hülfsfäden $\delta_1\alpha$ und $\delta_2\alpha$ (Fig. 5) und des gegebenen Werthes $\chi(x)$ der Function f für den Punkt α bestimmt werden.

Wir kennen jetzt die Substitution der y_1, y_2, y_3 und wollen nunmehr nach Fuchs setzen:

$$(101) \qquad y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3,$$

indem wir uns vornehmen, darin die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so zu bestimmen, dass die Function y bei der Umkreisung des betrachteten singulären Punktes in eine Function Y übergeht, welche von y nur um einen constanten Factor unterschieden ist:

(102) $$Y = sy.$$

Diese Bedingung bringt man mit Hülfe der Gleichung

$$Y = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_3$$

und der Gleichungen (100) und (101) auf die Form:

$$(1-s)\alpha_1 y_1 + (-s\alpha_2 + \alpha_3) y_2 + (e^{2\pi a i}\alpha_2 - s\alpha_3) y_3 = 0.$$

Folglich:

$$(1-s)\alpha_1 = 0, \quad -s\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad e^{2\pi a i}\alpha_2 - s\alpha_3 = 0.$$

Diese linearen, in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ homogenen Gleichungen sind nur möglich, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} 1-s, & 0, & 0 \\ 0, & -s, & 1 \\ 0, & e^{2\pi a i}, & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Dies also ist im vorliegenden Falle Fuchs' determinirende Gleichung. Wir finden so folgende drei Werthe von s:

$$s = 1, \; e^{\pi a i}, \; e^{\pi(a-1)i}.$$

Hierauf finden wir als entsprechende Functionen y, welche der Bedingung (102) genügen, die folgenden:

(103) $$y = y_1, \; y = e^{-\frac{\pi a i}{2}} y_2 + e^{\frac{\pi a i}{2}} y_3, \; y = e^{-\frac{\pi a i}{2}} y_2 - e^{\frac{\pi a i}{2}} y_3.$$

Da die beiden zuletzt angegebenen Functionen y nach der Umkreisung des Punktes $x = 0$ die Factoren $e^{\pi a i}$ und $e^{\pi(a-1)i}$ annehmen, so können dieselben beziehungsweise in folgender Form dargestellt werden:

$$x^{\frac{a}{2}} \varphi(x) \quad \text{und} \quad x^{\frac{a-1}{2}} \psi(x)$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutige Functionen sind. Man muss bemerken, dass die hier auftretenden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in ihren Zerlegungen nach Potenzen von x unendlich viele Glieder mit negativen Potenzen enthalten werden, da wir es hier mit irregulären Integralen der Gleichung (88) zu thun haben. Diese Zerlegungen sind in der That leicht auszuführen. Mit ihrer Hülfe ist es dann leicht die Integrale y_2 und y_3 in unendliche Reihen zu zerlegen.

Wir bemerken noch, dass man aus der Form der Gleichung (88) erwarten könnte, dass ihre Integrale als singulären Punkt noch folgenden besitzen möchten:

$$x_0 = \frac{(a+u-1)u}{2(u-\lambda+1)},$$

denn für $x = x_0$ werden die Coefficienten der Gleichung (88) unendlich. Aber indem wir nach der angegebenen Methode die singulären Punkte der Functionen y_1, y_2, y_3 aufsuchen, welche durch die Gleichungen (99_1), (99_2), (99_3) bestimmt werden und eine vollständige Gruppe von particulären Lösungen der Gleichung (88) darstellen, kommen wir zu dem Schlusse, dass der so bestimmte Punkt x_0 kein singulärer Punkt der Integrale der Gleichung (88) ist.

Kehren wir jetzt zur weiteren Untersuchung des allgemeinen Falles zurück. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die durch Gleichung (5) bestimmte Function f, für jedes gegebene z in Bezug auf die Veränderliche x keine singulären Punkte besitzt, ausser solchen, deren Umkreisung entweder gar keine Aenderungen des Werthes $\chi(x)$ der Function f für $z = \alpha$ hervorruft, oder nur den Hinzutritt eines constanten Factors verursacht. Nehmen wir ferner die Wege (11) zu Grundwegen und theilen wir sie in zwei Categorien ein. Die erste Categorie sollen die Wege bilden:

$$(104)\qquad \begin{cases} (z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2), \ldots, (z_1 z_k \bar{z}_1 \bar{z}_k), \\ (z_1 \xi \bar{z}_1 \bar{\xi}), (z_1 \eta \bar{z}_1 \bar{\eta}), \ldots, \end{cases}$$

welche zur ersten Gruppe gehören (s. § I), die zweite Categorie aber die Wege:

$$(105)\qquad \begin{cases} L_\xi^1, \ldots, L_\xi^p, \\ L_\eta^1, \ldots, L_\eta^q, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad , \end{cases}$$

welche zur dritten Gruppe gehören (s. § I). Die Anzahl ν der Wege (104) der ersten Categorie ist:

$$(106)\qquad \nu = n - p - q - r \ldots$$

Die Integrale von der Form (6) bezogen auf die Wege (104) wollen wir beziehungsweise mit $y_1, \ldots, y_\nu$, und die auf die Wege (105) bezogenen mit $y_{\nu+1}, \ldots, y_n$ bezeichnen. Nehmen wir ferner an, der Punkt x beschreibe eine beliebige geschlossene Curve, welche die singulären Punkte der Functionen $y_1 \ldots y_\nu$ umkreist, und verfolgen wir die Bewegung der Stäbe $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, ζ, ... und die durch diese Bewegung hervorgebrachten Deformationen der Fäden $(z_1), \ldots, (z_k)$, (ξ), (η), ... aus denen sich die Wege (104) zusammensetzen. Es ist leicht einzusehen, dass nach der Umkreisung des Punktes x auf der genannten geschlossenen Curve folgende Aenderungen stattfinden:

1) Die Wege $(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), \ldots$ nehmen Lagen ein, welche gleichbedeutend sind gewissen Wegen

$$Z_1, \ldots, Z_k, \Xi, \mathrm{H}, \ldots,$$

welche auf bestimmte Weise zusammengesetzt sind aus den in der einen und der andern Richtung genommenen Wegen $(z_1), \ldots, (z_k)$, $(\xi), (\eta), \ldots$.

2) Die Wege (104) gehen nach der Umkreisung in folgende Wege über:

$$(107) \qquad \begin{cases} (Z_1 Z_2 \overline{Z}_1 \overline{Z}_2), \ldots, (Z_1 Z_k Z_1 Z_k), \\ (Z_1 \Xi \overline{Z}_1 \overline{\Xi}), (Z_1 \mathrm{H} \overline{Z} \overline{\mathrm{H}}), \ldots. \end{cases}$$

3) Der Werth $\chi(x)$ der Function f für $z = \alpha$ nimmt nach der Umkreisung den constanten Factor C an (dabei soll der Punkt α nicht auf den Curven liegen, welche die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ bei der betrachteten Umkreisung beschreiben).

4) Die Integrale $y_1, \ldots, y_\nu$ gehen nach der Umkreisung in die Integrale $Y_1, \ldots, Y_\nu$ über, welche resp. auf die Wege (107) bezogen sind. Es ist leicht einzusehen, *dass sich letztere Integrale mittelst der Integrale $y_1 \ldots y_\nu$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten ausdrücken lassen.* In der That lässt sich auf jedes Integral von der Form (6), bezogen auf die Wege (107), die Formel (34) anwenden, welche es möglich macht, die Integrale $Y_1 \ldots Y_\nu$ mittelst der Integrale $Cy_1, \ldots, Cy_\nu$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten auszudrücken; C ist dabei der obenerwähnte constante Factor.

Der bewiesene Satz lässt sich folgendermassen ausdrücken: *Nachdem die Variable x eine geschlossene Curve beschrieben hat, welche die singulären Punkte der Functionen $y_1, \ldots, y_\nu$ umkreist, nehmen diese Functionen Werthe an, welche sich aus den Anfangswerthen $y_1, \ldots, y_\nu$ als lineare homogene Functionen mit constanten Coefficienten berechnen lassen.*

Dieser Schluss in Verbindung mit dem früher erwähnten Theorem von Tannery zeigt, dass *die Integrale $y_1, \ldots, y_\nu$ bezogen auf die Wege* (104) *die particulären Lösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten darstellen.* Man muss aber bemerken, dass im allgemeinen diese Coefficienten nicht so wie die Coefficienten der Gleichung (72) mittelst der Functionen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots, \varrho_0, \ldots, \varrho_\tau$ und ihrer Abgeleiteten rational ausgedrückt werden können. In die Ausdrücke der Coefficienten der eben erwähnten Gleichung ν^{ter} Ordnung treten rational nicht nur die Functionen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots, \varrho_0, \ldots, \varrho_\tau$ mit ihren Abgeleiteten ein, sondern auch die Integrale $y_{\nu+1}, \ldots, y_n$ mit ihren Abgeleiteten.

Ohne uns in eingehendere Untersuchungen einzulassen, bemerken wir noch, dass unter den betrachteten Bedingungen *die Integrale $y_{\nu+1}, \ldots, y_n$ bezogen auf die Wege* (105) *auch nichts anderes sind als*

die particulären Lösungen einer gewissen linearen Differentialgleichung der $(n-\nu)^{ten}$ Ordnung mit eindeutigen Coefficienten. Diese Coefficienten ihrerseits lassen sich rational durch die Functionen $z_1, \ldots, z_k, \xi, u_1, \ldots, u_p, \eta, v_1, \ldots, v_q, \ldots, \varrho_0, \ldots, \varrho_r, y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ und ihre Abgeleiteten ausdrücken.

Anmerkung 1. Den soeben aufgestellten Satz betreffs der Integrale $y_1, \ldots, y_\nu$ kann man in Bezug auf die Form der Function f verallgemeinern. Um den Ausdruck der Function f allgemeiner zu machen, wollen wir sie nicht mehr nach Formel (5) bestimmen, sondern mit Hülfe der folgenden Eigenschaften:

1) In Bezug auf die Variable z soll die Function f nur $\nu + 1$ singuläre Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ besitzen.

2) Nachdem der Punkt z die Contouren $(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), \ldots$, welche die Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ umgeben, beschrieben hat, soll sie beziehungsweise die Factoren erhalten:

$$e^{2\pi\lambda_1 i}, \ldots, e^{2\pi\lambda_k i}, e^{2\pi a i}, e^{2\pi b i}, \ldots,$$

wobei keine der Grössen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, a, b, \ldots$ oder auch die Grösse

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k + a + b + \cdots$$

eine ganze Zahl oder gleich Null sein soll.

3) Der Werth $\chi(x)$ der Function f für $z = a$ soll eine Function der Variablen x sein, welche nur solche singuläre Punkte besitzt, deren Umkreisung keine andere Aenderung dieser Factoren hervorruft, als etwa das Zutreten eines constanten Factors.

Wenn die Function f diese Eigenschaften besitzt, so müssen die Functionen

$$(108)\qquad \frac{f}{(z-z_1)^{\lambda_1}}, \ldots, \frac{f}{(z-z_k)^{\lambda_k}}, \frac{f}{(z-\xi)^a}, \frac{f}{(z-\eta)^b}, \ldots$$

in Bezug auf die Variable z in der Umgebung der Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$, eindeutig sein. Dabei können diese Punkte entweder einfache *Pole* oder auch beliebige *wesentlich singuläre* Punkte der entsprechenden Functionen (108) sein, sowie auch gewöhnliche nicht singuläre Punkte dieser Functionen. Betrachten wir jetzt Integrale von der Form:

$$(109)\qquad y = \int_L f\,dz,$$

bezogen auf die Wege (104), welche als Fäden gedacht werden sollen. Diese Integrale, welche mit $y_1, \ldots, y_\nu$ bezeichnet sein sollen, werden Functionen von x sein und verschiedene singuläre Punkte besitzen. Zu den singulären Punkten dieser Functionen können, unter anderen, diejenigen Werthe von x gehören, für welche einige der Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ einander gleich oder unendlich werden, sowie auch diejenigen Werthe von x, denen singuläre Punkte der Functionen

$z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ entsprechen. Nehmen wir ferner an, der Punkt x mache eine Umkreisung um irgend einen der singulären Punkte der Functionen $y_1, \ldots, y_\nu$, und verfolgen wir dabei die Bewegungen der Stäbe $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ und die dadurch hervorgerufenen Deformationen der als Fäden gedachten Integrationswege. Offenbar entstehen nach der Umkehrung folgende Aenderungen:

1) Die Wege:

$$(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), \eta, \ldots$$

gehen über in folgende:

$$Z_1, \ldots, Z_k, \Xi, H, \ldots,$$

von denen jeder gleichbedeutend ist einer gewissen Combination der Wege:

$$(z_1), \ldots, (z_k), (\xi), (\eta), \ldots,$$
$$(\bar{z}_1), \ldots, (\bar{z}_k), (\bar{\xi}), (\bar{\eta}), \ldots.$$

2) Die Wege (104) gehen beziehungsweise in die Wege (107) über.

3) Der Werth $\chi(x)$ der Function f für $z = \alpha$ nimmt nach der Umkreisung den constanten Factor C an (dabei soll der Punkt α nicht auf den Curven liegen, welche die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ bei der betrachteten Umkreisung beschreiben).

4) Die Integrale $y_1, \ldots, y_\nu$ gehen nach der Umkreisung in die Integrale $Y_1, \ldots, Y_\nu$ über, welche bez. auf die Wege (107) bezogen sind.

Nun können diese letztgenannten Integrale mit Hülfe einer der Formel (34) analogen Formel aus den Integralen $Cy_1, \ldots, Cy_\nu$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten berechnet werden (C ist der erwähnte constante Factor). *Wenn also die Variable x eine geschlossene Curve beschreibt, welche die singulären Punkte der Functionen $y_1, \ldots, y_\nu$ umkreist, so nehmen diese Functionen Werthe an, welche sich mittelst der Anfangswerthe $y_1, \ldots, y_\nu$ durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten sich ausdrücken lassen.* Dieser Schluss in Verbindung mit dem wiederholt genannten Theorem von Tannery zeigt, dass *die auf die Wege* (104) *bezogenen Integrale $y_1, \ldots, y_\nu$ die particulären Lösungen einer linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten darstellen.*

Diese Gleichung ist im Allgemeinen so complicirt, dass wir es für überflüssig halten, tiefer auf ihre Untersuchung einzugehen. Wir wollen den eben erhaltenen Satz nur benutzen um unsere Methode der Untersuchung der durch bestimmte Integrale bestimmten Functionen mit derjenigen von Hermite und Goursat zu vergleichen, wie sofort geschehen soll.

Anmerkung 2. Unter Beibehaltung der in Anmerkung 1 festgesetzten Bezeichnungen wollen wir annehmen:

$$(110) \qquad [z'z''] = \int_{z'}^{z''} f\,dz,$$

wo die Grenzen z' und z'' irgendwie unter den Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ gewählt sein sollen, und die Integration sich auf die Gerade $z'z''$ bezieht. Setzen wir ferner voraus, dass die Function f den in Anmerkung 1 festgesetzten Bedingungen genügt, und ausserdem die Eigenschaft besitzt, dass ihre in Bezug auf x singulären Punkte für jedes gegebene constante z nur solchen Werthen von x entsprechen, welche der Gleichung genügen:

$$(111) \qquad (z-z_1)\cdots(z-z_k)(z-\xi)(z-\eta)\cdots = 0.$$

Unter diesen Bedingungen unterscheidet sich unsere Function f nur durch ihre Bezeichnungen von derjenigen Function, welche auf Seite 2 der Abhandlung Goursat's angegeben ist (Acta Mathem. 2: 1, 1883). Ferner nehmen wir mit Goursat an (l. c. p. 15):

1) Dass von den $\nu + 1$ Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ irgend drei auf einer geraden Linie nur für solche Werthe von x liegen können, welche durch die Punkte einer oder einiger bestimmter Linien (Querschnitte [coupures] der ersten Art) dargestellt werden;

2) Dass die $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ Integrale von der Form (110) einen wohlbestimmten Sinn haben.

Unter Voraussetzung dieser Bedingungen, kommt Goursat auf den Seiten 15—21 seiner Abhandlung zu Schlüssen, welche mit Hülfe der von uns eingeführten Bezeichnungen, folgendermassen formulirt werden können:

1) Von den $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ Integralen von der Form (110) sind nur ν Integrale linear unabhängig, die übrigen lassen sich mittelst dieser ν Grundintegrale ausdrücken durch lineare homogene Formeln mit constanten Coefficienten.

2) Jedes Integral von der Form

$$(112) \qquad y = \int_L f\,dz,$$

bezogen auf eine beliebige Curve L, welche irgend zwei von den Punkten $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ verbindet, lässt sich mittelst derselben ν Grundintegrale durch eine lineare homogene Formel mit constanten Coefficienten ausdrücken.

3) Die singulären Punkte der Functionen, welche durch Integrale von der Form (110) ausgedrückt werden, gehören sämmtlich zu denjenigen Punkten der Ebene x, für welche einige der Grössen $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ einander gleich werden.

4) Nachdem die Variable x eine geschlossene Curve beschrieben

hat, welche Umkreisungen um die singulären Punkte macht, erhalten die durch Integrale von der Form (110) ausgedrückten Functionen Werthe, welche sich aus den Anfangswerthen der Grundintegrale durch lineare, homogene Formeln mit constanten Coefficienten zusammensetzen lassen.

5) Die sämmtlichen Integrale (110) genügen einer linearen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung mit eindeutigen Coefficienten.

Bei diesen Schlüssen macht Goursat betreffs der Function f gar keine Einschränkungen ausser der obenerwähnten. Und in der That werden diese Schlüsse Goursat's vollständig richtig sein, wenn wir zu den von Goursat gemachten Einschränkungen noch folgende in Goursat's Abhandlung nicht ausdrücklich angegebene Einschränkung hinzufügen:

Die Punkte $z_1, \ldots, z_k, \xi, \eta, \ldots$ sollen keine wesentlich singulären Punkte der zugehörigen Functionen (108) *sein.*

Wenn aber diese letzte Einschränkung nicht hinzutritt, können die Schlüsse Goursat's unter Umständen unrichtig werden. Um dies zu beweisen, nehmen wir folgendes Beispiel. Setzen wir $\nu = 3$ und

(113) $$f = (z-x)^{\frac{1}{4}} (z^2 - 8z + 17)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{(z-x)^2}}.$$

Offenbar sind im vorliegenden Falle die Integrale

(114) $$[z_1 z_2],\ [z_1 z_3],\ [z_1 \xi],\ [z_2 z_3],\ [z_2 \xi],\ [z_3 \xi]$$

wo $$(z_1 = 0,\quad z_2 = 4 + i,\quad z_3 = 4 - i,\quad \xi = x)$$

für reelles $x < 3$ möglich, wobei von den vier die eben erwähnten Grössen darstellenden Punkten keine drei auf einer Geraden liegen, solange der Punkt x nicht auf den Seiten des Dreiecks $z_1 z_2 z_3$ oder ihren Verlängerungen liegt. Somit genügt die durch Gleichung (113) bestimmte Function f allen von Goursat aufgestellten Forderungen. Aber es ist leicht einzusehen, dass im betrachteten Beispiele der Punkt $\xi = x$ ein wesentlich singulärer Punkt der Function

$$\frac{f}{(z-x)^{\frac{1}{4}}}.$$

ist. Deshalb kann man auf den vorliegenden Fall den obenerwähnten Schluss von Goursat nicht erstrecken. Vielmehr müssen zu den sechs schon erwähnten Goursat'schen Integralen noch folgende zwei hinzugefügt werden:

(115) $$[L_\xi^1] = \int_{L_\xi^1} f\,dz \quad \text{und} \quad [L_\xi^2] = \int_{L_\xi^2} f\,dz,$$

die auf die Wege L_ξ^1 und L_ξ^2 bezogen sind. Diese Wege gehören zur 3^{ten} Gruppe (§ I) und verlaufen ganz in der Nähe des Punktes $\xi = x$.

Dementsprechend giebt es nicht bloss *drei* Grundintegrale, wie es der Fall wäre, wenn man den ersten der früher erwähnten Sätze

Goursat's den vorliegenden Fall anwenden wollte, sondern *fünf*, und in die Zahl dieser Grundintegrale treten nothwendig die Integrale $[L_\xi^1]$ und $[L_\xi^2]$ ein. Was aber die singulären Punkte der Integrale (114) anbelangt, so besitzen diese Integrale ausser denjenigen singulären Punkten, für welche zwei der Grössen z_1, z_2, z_3, ξ einander gleich werden, noch den singulären Punkt $x = 1$, dessen Umkreisung auf die Werthe der Integrale $[z_1 \xi]$, $[z_2 \xi]$, $[z_3 \xi]$ in der That von Einfluss ist. Wollen wir diese Umkreisung vermöge unserer bestimmten Integrale studiren, so können wir bei den Integralen $[z_1 \xi]$, $[z_2 \xi]$, $[z_3 \xi]$ die geradlinigen Integrationswege nicht festhalten.

Somit ist die Methode von Goursat für die Integrale von der Form (114) nicht ausreichend. Von der oben angedeuteten Einschränkung aber, welche der Goursat'schen Methode eigen ist, ist die von mir angegebene Methode frei, insofern in derselben von der Vorstellung der Integrationswege als gespannter Fäden Gebrauch gemacht wird, die durch die Bewegung fester Stäbe deformirt werden. In der That behalten die nach dieser Methode in der Anmerkung 1 des § V gezogenen Schlüsse auch im vorliegenden Beispiele ihre Kraft in ihrer ganzen Allgemeinheit.

Anmerkung 3. Die in § V angegebene Methode ist nicht nur für die Integrale von der Form (6) oder (109), sondern auch für Integrale von folgender Form ausreichend:

$$y = \int_{x_1 x_2} f\, dz. \tag{116}$$

Wir müssen uns dabei zwischen x_1 und x_2 einen Faden ausgespannt denken, welcher nicht durch die Punkte $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, ... hindurchläuft. Zugleich müssen wir uns vorstellen, dass die Ebene der Variabelen z nicht nur in den Punkten $z_1, \ldots, z_k$, ξ, η, ... sondern auch in den Punkten x_1, x_2 von cylindrischen Stäben durchsetzt wird.

Moskau, den 19. Januar 1891.

Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven.

Von

Wilhelm Stahl in Aachen.

In diesem Aufsatze gebe ich eine algebraische Ableitung der zu einer ebenen rationalen Curve R_n n^{ter} Ordnung perspectiven Strahlenbüschel; sie stützt sich auf Eigenschaften der zu den geraden Schnitten der R_n conjugirten Formen. Herr Brill hat zuerst auf die Wichtigkeit der Proportionalität der aus den Coefficienten conjugirter Formenreihen gebildeten correspondirenden Determinanten für die Theorie der rationalen Curven aufmerksam gemacht*) und auf dieser Proportionalität beruht das hier eingeschlagene Verfahren. Dasselbe ist also abweichend von demjenigen, welches Herr Brill selbst und Herr Franz Meyer zur Lösung des angegebenen Problems benutzt haben**); scheint mir aber, da es die Bedingungen für mögliche specielle Erzeugungsarten der R_n scharf angiebt und die Gleichungen der erzeugenden Büschel in sehr compakter Form herstellt, jenen gegenüber einen Vorzug zu haben. Der schöne Satz des Herrn Franz Meyer, dass eine Curve vierter Ordnung einen dreifachen Punkt besitzt, sobald die zu den geraden Schnitten derselben conjugirten Formen die ersten Polaren einer Form fünfter Ordnung sind***), ergiebt sich als ein besonderer Fall eines allgemeineren Satzes, welcher hier bewiesen wird. In einer Fortsetzung gedenke ich in analoger Weise die zu den rationalen Raumcurven perspectiven Regelflächen und Ebenenbüschel zu behandeln.

---

*) Brill: Ueber binäre Formen und die Gl. 6^{ten} Grades. Diese Annalen Bd. 20, S. 330.

**) Meyer: Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln. Diese Annalen Bd. 30, S. 30 und: Zur algebr. Erz. der rat. ebenen Curven 4^{ter} Ord. Diese Annalen Bd. 31, S. 116. Brill: Ueber rat. Curven und Regelflächen. Diese Ann. Bd. 36, S. 230.

***) Meyer. Diese Ann. Bd. 31.

§ 1.

1) Es seien bei veränderlichem μ in den Functionen:

$$\varrho x_i = \varphi_i(\mu) = \sum_0^n {}^p a_{ip}\,\mu^{n-p} \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

die Coordinaten einer rationalen Curve R_n n^{ter} Ordnung gegeben.

Eine der zu den Formen φ_i oder den „geraden Schnitten" der R_n conjugirten Formen sei gegeben in:

$$f_k(\mu) = \sum_0^n {}^p \binom{n}{p} b_{kp}\,\mu^{n-p}. \tag{2}$$

Dann gelten die Gleichungen:

$$\sum_0^n {}^p (-1)^p a_{ip}\,b_{k,n-p} = 0. \tag{3}$$

Es giebt also $(n-2)$ linear unabhängige Functionen f_k, welche wir mit $f_1 f_2 \ldots f_{n-2}$ bezeichnen. Durch Combination derselben erhalten wir ∞^{n-3} Functionen f, welche ein lineares System bilden. Wir setzen voraus, dass die Functionen φ_i keinen gemeinsamen Factor besitzen, oder dass unter den f_k sich keine n^{te} Potenz einer linearen Function von μ sich befindet.

Aus (3) folgt die Proportionalität der correspondirenden Determinanten*)

(4) $|a_p a_q a_r| = \tau\,|b_0 b_1 \ldots b_{r-1} b_{r+1} \ldots b_{q-1} b_{q+1} \ldots b_{p-1} b_{p+1} \ldots b_n|$

wobei

$$p > q > r.$$

Die Geraden eines Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkt z schneiden R_n in ∞^1 Punktgruppen, welche conjugirt sind zu $(n-1)$ linear unabhängigen Functionen f. $(n-2)$ derselben sind die Functionen $f_1 \ldots f_{n-2}$; die Coefficienten der $(n-1)^{\text{ten}}$ aber genügen den Bedingungen:

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}^p (-1)^p a_{ip}\,b_{n-1,n-p} \tag{5}$$

In Verbindung mit (3) erhalten wir hieraus die Proportionalität der Determinanten:

(6) $|z\, a_p a_q| = \pi\,|b_0 b_1 \ldots b_{q-1} b_{q+1} \ldots b_{p-1} b_{p+1} \ldots b_n|$.

2) Fällt der Punkt z mit einem Punkte R_n, dessen Parameter λ ist, zusammen, so erhalten die „geraden Schnitte" des Büschels z den

*) Vergl. Baltzer Determ. 3. Aufl. § 6, 2.

gemeinsamen Factor $(\mu-\lambda)$, weshalb unter den conjugirten Functionen f die n^{te} Potenz $(\mu-\lambda)^n$ sich befindet. Diese muss sich durch die Functionen $f_1 f_2 \ldots f_{n-1}$ linear ausdrücken lassen, so dass:

$$\sum_1^{n-1}{}^k h_k f_k(\mu) = (\mu-\lambda)^n.$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$\sum_1^{n-1}{}^k h_k(b_{kp}\lambda + b_{k,p+1}) = 0 \quad \text{für} \quad (p = 0 \ldots n-1).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die $(n-1)$ Grössen h_k, so folgt, dass die $(n-1)$-reihigen Determinanten folgender Matrix verschwinden:

$$(7)\quad \left\| \begin{matrix} b_{10}\lambda & +b_{11}, & b_{11}\lambda & +b_{12}, & \cdots, & b_{1,n-1}\lambda & +b_{1n} \\ b_{20}\lambda & +b_{21}, & b_{21}\lambda & +b_{22}, & \cdots, & b_{2,n-1}\lambda & +b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \cdots & \vdots & \\ b_{n-1,0}\lambda & +b_{n-1,1}, & b_{n-1,1}\lambda & +b_{n-1,2}, & \cdots, & b_{n-1,n-1}\lambda & +b_{n-1,n} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Zwischen diesen Determinanten besteht keine lineare Gleichung, deren Coefficienten unabhängig von λ sind.

Berechnet man die Determinanten, so erhält man für jede eine Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ, deren Coefficienten Determinanten sind von der Art, wie sie in der rechten Seite der Gleichung (6) auftreten. Ersetzt man diese durch die Determinanten der linken Seite von (6), so erhalten wir die Gleichung eines Strahlenbüschels $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher durch den Parameter λ projectiv zu R_n ist der Art, dass jeder Strahl des Büschels den ihm entsprechenden Punkt von R_n enthält. Der Büschel ist *perspectiv* zu R_n.

Es giebt somit ∞^{n-1} zu R_n *perspective Strahlbüschel* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche ein lineares System bilden.* Damit sind alle diese Büschel erschöpft. Fügt man zu der Matrix (7) als n^{te} Horizontalreihe die beliebigen Grössen:

$$c_0\, c_1 \ldots c_{n-1}$$

hinzu, so erhält man in der nun vollständigen n-reihigen Determinante den allgemeinsten Ausdruck eines solchen Strahlenbüschels. Jedem derselben entspricht somit eine Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\overset{n-1}{F}(\lambda) = \sum_0^{n-1}{}^p \binom{n-1}{p} c_p \lambda^{n-1-p},$$

deren invarianten Eigenschaften, wie wir später sehen werden, besondere Eigenschaften des Strahlenbüschels entsprechen. Aus den Gleichungen von n linear unabhängigen dieser Büschel kann durch

Elimination von 1, λ, ..., λ^{n-1} die Gleichung von R_n in der einfachsten Form, welche Herr Franz Meyer schon angegeben hat*), hergestellt werden.

3) Will man zu R_n perspective Strahlenbüschel, deren Ordnung niederer als $(n-1)$ ist, aufsuchen, so hat man die Grössen c_p so zu bestimmen, dass aus der n-reihigen Determinante sich eine Function von λ abhebt, deren Coefficienten unabhängig von $b_{n-1,p}$ sind. Dies ist nun, wie leicht einzusehen, nicht anders möglich, als dadurch, dass man als n^{te} Horizontalreihe zu der Matrix (7) hinzufügt:

$$b_{t0}\nu + b_{t1},\ b_{t1}\nu + b_{t2},\ \cdots,\ b_{t,n-1}\nu + b_{tn},$$

wobei:

$$b_{tp} = \sum_{1}^{n-2}{}^{k} g_k b_{kp}$$

und die g_k beliebige Constante sind. Es tritt dann der Factor $(\lambda-\nu)$ aus der nun vollständigen n-reihigen Determinante heraus. Setzt man t der Reihe nach gleich 1, 2, ..., $(n-2)$, so erhalten wir hierdurch $(n-2)$ linear unabhängige Strahlenbüschel $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind. Bei der Berechnung derselben könnte man $\nu = \infty$ setzen, wodurch der Factor von λ^{n-1} zum Verschwinden gebracht wird.

4) Die Erniedrigung der Ordnung des zu R_n perspectiven Büschels kann dann und nur dann noch weiter getrieben werden, wenn es gelingt, eine Function $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ zu bilden, deren sämmtliche r^{ten} Polaren conjugirt sind zu den $\varphi_i(\lambda)$. Eine solche Function sei gegeben in:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_{0}^{n+r}{}^{p} \binom{n+r}{p} m_p \lambda^{n+r-p}. \tag{8}$$

Wir fügen jetzt zu der Matrix (7) als letzte Horizontalreihe hinzu:

$$m_0 s_{r+1} + m_1 s_r + \cdots + m_{r+1} s_0,\ m_1 s_{r+1} + m_2 s_r + \cdots + m_{r+2} s_0,\ \cdots$$
$$\cdots,\ m_{n-1} s_{r+1} + m_n s_r + \cdots + m_{r+n} s_0.$$

Dann hat die vollständige n-reihige Determinante den Factor:

$$\sum_{0}^{r+1}{}^{p} (-1)^p s_p \lambda^{r+1-p}.$$

Wir erhalten einen zu R_n perspectiven Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, dessen Berechnung leicht ausgeführt werden kann, wenn $s_0 = s_1 = \cdots = s_r = 0$ gesetzt wird. Die Coefficienten von λ^{n-1} bis λ^{n-r-1} werden dann gleich Null.

*) Meyer: Apolarität u. rat. Curven. S. 16.

Jede Function $\overset{n+r}{F}$ $(n+r)^{ter}$ *Ordnung, deren sämmtliche* r^{ten} *Polaren dem Systeme der* $f_k\big(k=1,\cdots,(n-2)\big)$ *angehören, liefert einen zu* R_n *perspectiven Büschel* $(n-r-2)^{ter}$ *Ordnung.*

Die Gleichung dieses Büschels kann geschrieben werden in:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{r+1} & m_{r+2} & \cdots & m_{n+r} \\ b_{r+2,0}\lambda+b_{r+2,1}, & b_{r+2,1}\lambda+b_{r+2,2}, & \cdots, & b_{r+2,n-1}\lambda+b_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,0}\lambda+b_{n-1,1}, & b_{n-1,1}\lambda+b_{n-1,2}, & \cdots, & b_{n-1,n-1}\lambda+b_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0.$$

§ 2.

1) Unter der Voraussetzung, dass zwischen den a_{ip} keine wesentlichen Relationen bestehen, die R_n also allgemeiner Natur ist, wollen wir bei gegebenem r die Zahl der linear unabhängigen Functionen $\overset{n+r}{F}$ bestimmen. Es sei:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_0^{n+r} {}^p \binom{n+r}{p} m_p\,\lambda^{n+r-p}.$$

Sollen die r^{ten} Polaren derselben conjugirt sein zu den Functionen φ_i, so folgen die Gleichungen:

$$(10)\qquad \sum_0^{n} {}^p (-1)^p m_{t+p}\,a_{i,n-p} = 0 \quad \text{für} \quad (t=0,1\ldots r;\quad i=1,2,3).$$

Wir haben somit $3(r+1)$ homogene lineare Gleichungen zwischen den $(r+n+1)$ Grössen m_p. Es giebt folglich $(n-2r-2)$ linear unabhängige Functionen $\overset{n+r}{F}$ oder ∞^{n-2r-3} derselben, welche ein lineares System bilden. Bei der allgemeinen R_n ist stets $2r \leqq (n-3)$.

Aus Gleichung (10) schliessen wir nach dem Brill'schen Satze über correspondirende Determinanten, dass *die* $(n-2r-2)$*-reihigen Determinanten, welche aus den Coefficienten der* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ *gebildet werden können, proportional sind Functionen* $(r+1)^{ter}$ *Ordnung der dreireihigen Determinanten der Coefficienten der* $\varphi_i(\lambda)$.

2) Für die zu der allgemeinen R_n perspectiven Strahlenbüschel erhalten wir aus dem Vorhergehenden folgende Sätze:

Es giebt ∞^{n-2r-3} Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung wobei $2r \leq n-3$. Ist n gerade, so erhalten wir für $2r = n-4$, ∞^1 Büschel $\frac{n}{2}$ter Ordnung. Ist n ungerade, so finden wir für $2r = n-5$, ∞^2 Büschel $\frac{n+1}{2}$ter Ordnung und für $2r = n-3$, ∞^0 oder einen Büschel $\frac{n-1}{2}$ter Ordnung.

3) Die Ordnung eines zu R_n perspectiven Strahlenbüschels kann sich weiter erniedrigen, wenn $2r > n-3$ werden kann. Die Curve R_n ist dann nicht mehr allgemeiner Natur. Zwischen den Coefficienten a_{ip} bestehen $h = 2r-(n-3)$ von einander unabhängige Relationen, welche durch das Verschwinden der Determinanten gewisser Matrices gegeben sind.

Die Form $\overset{n+r}{F}$ absorbirt nun in ihren $(r-s)^{\text{ten}}$ Polaren ∞^{r-s} Formen $\overset{n+s}{F}$ $(n+s)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren es im Allgemeinen ∞^{n-2s-3} giebt. Ist desshalb:

$$r-s \geqq n-2s-3 \quad \text{oder} \quad s \geqq n-r-3,$$

so absorbirt $\overset{n+r}{F}$ alle Formen $(n+s)^{\text{ter}}$ Ordnung. Der grösste Werth, welchen r überhaupt annehmen kann, ist $r = n-3$.

Es werden durch $\overset{n+r}{F}\left(r > \frac{n-3}{2}\right)$ alle Formen $\overset{2n-r-3}{F}$ $(2n-r-3)^{\text{ter}}$ und höherer Ordnung absorbirt, während die Formen niederer Ordnung unbeeinflusst bleiben.

4) Für die Curve R_n ergiebt sich hieraus Folgendes: Existirt ein zu R_n perspectiver Strahlenbüschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\left(n-3 \geqq r \geqq \frac{n-3}{2}\right),$$

so absorbirt derselbe alle zu R_n perspectiven Strahlenbüschel, deren Ordnung niederer als $(r+2)$ ist und es giebt ∞^{2r-n+5} zu R_n perspective Büschel $(r+2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Nimmt r den grössten Werth $(n-3)$ an, so giebt es einen zu R_n perspectiven Büschel erster Ordnung und ∞^{n-1} Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese letzteren Büschel werden, wenn R_n nicht zerfällt, niemals beeinflusst.

§ 3.

Die Eigenschaften einer Curve R_n hängen im Wesentlichen davon ab, wie sie durch Strahlenbüschel niederer Ordnung erzeugt werden kann. Die Eigenschaften dieser Büschel oder auch der zu ihnen gehörenden Formen $\overset{n+r}{F}$ sind auch Eigenschaften der R_n. Insbesondere

spielt hier die Darstellung der $\overset{n+r}{F}$ als eine Summe von Potenzen linearer Functionen von λ eine grosse Rolle.

1) Folgender Satz giebt nun den Zusammenhang der Eigenschaften der $\overset{n+r}{F}$ mit denjenigen von R_n an:

„Lässt sich eine Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, deren r^{te} Polaren conjugirt sind, zu den Functionen $\varphi_i(\lambda)$, darstellen als eine Summe von v Potenzen linearer Functionen $(\lambda - \mu_p)$, so lässt sich durch die Punkte μ_p von R_n eine zu R_n projective rationale Curve C_w $(v - r - 2)^{ter}$ Ordnung legen, welche mit R_n diese Punkte entsprechend gemein hat. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte von R_n und C_n liefern den Strahlenbüschel $(n - r - 2)^{ter}$ Ordnung, welcher zu $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ gehört oder C_w ist perspectiv zu diesem Büschel.“

Beweis: Es sei:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_1^v {}^p\, g_p(\lambda - \mu_p)^{n+r}. \tag{11}$$

Wir bilden für die Coordinaten der Curve C_w die Ausdrücke:

$$\varrho z_i = \sum_1^v {}^p\, g_p \frac{\varphi_i(\mu_p)}{\lambda - \mu_p}. \tag{12}$$

Diese Curve ist durch den Parameter λ projectiv zu R_n, deren Coordinaten durch

$$\varrho x_i = \varphi_i(\lambda)$$

gegeben sind und hat mit R_n die v sich selbst entsprechenden Punkte $\varrho x_i = \varphi_i(\mu_p)$ gemein.

Die Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ liefert einen zu R_n perspectiven Strahlenbüschel $(n-r-2)^{ter}$ Ordnung, welcher durch (§ 1 Gl. (9)) gegeben ist. Wir zeigen zunächst, dass die Curve C_w ebenfalls perspectiv ist zu diesem Büschel. Ist

$$\sum_0^n \binom{n}{p} b_p \lambda^{n-p}$$

eine von $f_1 \ldots f_{n-2}$ verschiedene Form, welche zu den geraden Schnitten des Büschels z mit R_n conjugirt ist, so haben wir nach (§ 1, Gl. (5))

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}^p (-1)^p a_{ip} b_{n-p}$$

also nach Gleichung (12)

$$b_t = (-1)^t \sum_{p=0}^{v} g_p \frac{\mu_p^t}{\lambda - \mu_p} \quad \text{für} \quad (t = 0, 1, \ldots, n)$$

oder:

$$b_t \lambda + b_{t+1} = (-1)^t \sum_{p=1}^{v} g_p \mu_p^t .$$

Durch Zusammenstellung der Gleichungen (8) und (11) ergiebt sich aber:

$$m_t = (-1)^t \sum_{p=1}^{v} g_p \mu_p^t$$

und folglich:

$$b_t \lambda + b_{t+1} = m_t .$$

Ersetzen wir nun in der Determinante (9) $b_{n-1,t}$ durch b_t, so verschwindet dieselbe oder der Punkt z liegt auf dem Strahle λ des Büschels, dessen Gleichung durch (9) gegeben ist. Hiermit ist zunächst bewiesen, dass die Curve C_w perspectiv dem aus $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ folgenden Strahlenbüschel ist.

Wir zeigen ferner, dass C_w von der Ordnung $w = v - r - 2$ ist. Da die Functionen φ_i conjugirt zu den r^{ten} Polaren der $\overset{n+r}{F}$ sind, so gelten die Gleichungen:

$$\sum_{p=1}^{v} g_p \varphi_i(\mu_p)(\lambda - \mu_p)^r = 0$$

für jeden Werth von λ. Es ist also:

$$\sum_{p=1}^{v} g_p \varphi_i(\mu_p) \mu_p^t = 0 \quad \text{für} \quad (t = 0, 1, \ldots, r).$$

Ist ferner

$$\prod_{p=1}^{v} (\lambda - \mu_p) = \lambda^v - s_1 \lambda^{v-1} + s_2 \lambda^{v-2} - \cdots + (-1)^v s_v ,$$

so folgt aus Gleichung (12)

$$\begin{aligned} \varrho z_i \prod_{p=1}^{v} (\lambda - \mu_p) = {} & \lambda^{v-1} \sum_{p=1}^{v} g_p \varphi_i(\mu_p) + \lambda^{v-2} \sum_{p=1}^{v} g_p \varphi_i(\mu_p)(s_1 - \mu_p) + \cdots \\ & + \lambda^{v-r-1} \sum_{p=1}^{v} g_p \varphi_i(\mu_p) \left\{ s_r - \mu_p s_{r-1} + \mu_p^2 s_{r-2} + \cdots + (-1)^r \mu_p^r \right\} \\ & + \overset{v-r-2}{\chi_i}(\lambda) \end{aligned}$$

wobei die χ_i ganze Functionen von der Ordnung $(v-r-2)$ in λ sind. Es folgt:

$$\tau z_i = \overset{v-r-2}{\chi_i}(\lambda).$$

Es ist demnach C_w von der Ordnung $(v-r-2)$ und unser Satz ist bewiesen. Er lässt sich umkehren und lautet dann:

„Giebt es ein zu R_n projective Curve C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n v sich selbst entsprechende Punkte μ_p hat, so giebt es eine Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung $(r = v - w - 2)$, deren r^{te} Polaren conjugirt zu den Functionen $\varphi_i(\lambda)$ sind und welche sich darstellen lässt als eine Summe von v Potenzen der linearen Functionen $(\lambda - \mu_p)$. Der zu R_n perspective Büschel $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher zu $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ gehört, ist auch perspectiv zu C_w."

Den Beweis werde ich seiner Einfachheit wegen unterdrücken.

Ist $w = 0$, $v = r + 2$, so reducirt sich C_w auf einen Punkt, durch welchen alle Strahlen des Büschels $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung gehen; R_n hat einen $(r+2)$-fachen Punkt.

2) Nach (§ 1, 2) gehören zu den zu R_n perspectiven Strahlenbüscheln $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung beliebige Formen $\overset{n-1}{F}(\lambda)$. In analoger Weise wie oben lässt sich nun folgender Satz beweisen:

„Lässt sich die Function $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ darstellen als eine Summe von v Potenzen der linearen Functionen $(\lambda - \mu_p)$, so lässt sich durch die Punkte μ_p von R_n eine zu R_n projective rationale Curve C_{v-1} $(v-1)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, welche mit R_n diese Punkte entsprechend gemein hat. Die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte von R_n mit C_{v-1} geben den Strahlenbüschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher zu der Function $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ gehört oder C_{v-1} ist perspectiv zu diesem Büschel."

Nehmen wir zunächst an, $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ sei eine beliebige Function, so lässt sich bei geradem n *eine* Darstellung von $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ durch eine Summe von $\frac{n}{2}$ Potenzen machen. Es ist dann $w = \frac{n-2}{2}$ und C_w ist die Erzeugende niederster Ordnung des Büschels. Ist dagegen n ungerade, so giebt es im Allgemeinen ∞^1 Darstellungen von $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ durch eine Summe von $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Wir erhalten ∞^1 Curven $C_w \left(w = \frac{n-1}{2}\right)$, welche perspectiv zu dem Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

Verschwindet die Katalectikante von $\overset{n-1}{F}(\lambda)$, ist also diese Form darstellbar durch eine Summe von $\frac{n-1}{2}$ Potenzen, so giebt es eine

zu dem Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung perspective Curve $\frac{n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung. Der Büschel ist specialisirt.

Ist $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ eine Summe zweier Potenzen, so hat der Büschel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung eine $(n-2)$-fache Tangente.

Ist $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ selbst eine Potenz, so ist $v = 1$, $w = 0$ d. h. alle Strahlen des Büschels $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehen durch einen Punkt, welcher auf R_n liegt; man hat es mit einem $(n-1)$mal zählenden Büschel erster Ordnung zu thun.

§ 4.

1) Es giebt im Allgemeinen eine endliche Anzahl t_w von zu R_n projectiven Curven C_w w^{ter} Ordnung, die mit R_n $(3w+2)$ Punkte entsprechend gemein haben. Wir wollen die Zahl t_w bestimmen. Es ist hier zu setzen:

$$v = 3w + 2; \quad r = v - w - 2 = 2w.$$

Es giebt nun ∞^{n-2r-3} Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, von welchen jede sich linear aus $(n-2r-2)$ derselben zusammensetzen lässt (§ 2, 1). t_w derselben müssen sich nach § 3 darstellen lassen als eine Summe von v Potenzen linearer Functionen.

Folglich haben wir die in λ identische Gleichung:

$$\sum_1^{n-4w-2}{}^{p}\, h_p \overset{n+2w}{F_p}(\lambda) + \sum_1^{3w+2}{}^{q}\, g_q(\lambda - \mu_q)^{n+2w} = 0.$$

Hierbei sind die Functionen $\overset{n+2w}{F_p}$ als bekannt anzusehen, dagegen die Grössen h_p, g_q, μ_q als Unbekannte. Polarisiren wir diese Gleichung nach den $(3w+2)$ Grössen μ_q, so folgt eine Gleichung

$$(n + 2w) - (3w + 2) = (n - w - 2)^{\text{ter}}$$

Ordnung in λ, deren sämmtliche Coefficienten, welche nur von den h_p und μ_q abhängen, verschwinden. Wir haben somit $(n - w - 1)$ Gleichungen, welche linear sind in den $(n - 4w - 2)$ Grössen h_p und den $(3w + 3)$ symmetrischen Functionen der μ_q. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Grössen h_p, so erhalten wir, da:

$$(n - w - 1) - (n - 4w - 2) = 3w + 1$$

ist,

$$t' = \frac{(n-w-1)(n-w-2)\ldots(n-4w-1)}{1 \,.\, 2 \;\; (3w+1)}$$

linear unabhängige Gleichungen $(n - 4w - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung in den $(3w + 3)$ symmetrischen Functionen der μ_q. Lösen wir von diesen symmetrischen Functionen die Grösse μ_1 ab, so haben wir t' lineare

Gleichungen zwischen den Producten und Potenzen $(n-4w-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der symmetrischen Functionen von $\mu_2 \ldots \mu_{3w+2}$, deren es $(3w+2)$ giebt.

Diese Producte und Potenzen, deren Zahl bekanntlich ebenfalls gleich t' ist, können somit aus den zur Verfügung stehenden Gleichungen eliminirt werden. Es folgt eine Gleichung von der Ordnung $t'(n-4w-2)$ in μ_1. Da nun je $v = 3w+2$ Werthe von μ_q zusammengehören, so finden sich $t' \frac{n-4w-2}{3w+2}$ verschiedene Lösungen des Problems. Es giebt also:

$$t_w = \frac{(n-w-1)(n-w-2)\ldots(n-4w-2)}{1.2\ldots(3w+2)} \tag{13}$$

Curven C_w w^{ter} Ordnung, welche so projectiv auf R_n bezogen werden können, dass eine C_w und R_n je $(3w+2)$ Punkte entsprechend gemein haben.

Die Folgerungen hieraus sind sehr mannigfaltig.

2) Setzen wir $w = 0$, so ist $v = 2$; C_w ist nullter Ordnung, reducirt sich also auf einen Punkt, welcher mit zwei verschiedenen Punkten von R_n zur Deckung kommt. R_n hat daher $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte.

Für $w = 1$ folgt $v = 5$

$$t_1 = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3.4.5}.$$

Bei der allgemeinen Curve R_7 giebt es daher *eine* Gerade, welche so projectiv auf R_7 bezogen werden kann, dass sie 5 Punkte entsprechend gemein haben, diese Gerade ist Doppeltangente des zu R_7 perspectiven Büschels dritter Ordnung. Unter den zu einer R_8 perspectiven Büscheln vierter Ordnung giebt es im Allgemeinen 6, welche eine dreifache Tangente besitzen. Unter den ∞^2 zu einer R_9 perspectiven Büscheln fünfter Ordnung giebt es 21 mit je einer vierfachen Tangente.

Soll bei der R_6 $w = 1$ werden, so muss die Bedingung erfüllt sein, dass eine Function $\overset{8}{F}(\lambda)$ exisirt, dann aber giebt es ∞^1 gerade Linien von der gewünschten Lage, welche einen zu R_6 perspectiven Büschel zweiter Ordnung umhüllen.

Soll bei der R_5 $w = 1$ werden, so müssen die zwei Bedingungen erfüllt sein, welche ein vierfacher Punkt der R_5 erfordert; dann aber giebt es ∞^2 gerade Linien von der gewünschten Lage.

Analoges folgt, wenn wir $w = 2$ setzen.

3) Kann eine zu R_n projective Curve C_w so liegen, dass beide $(3w+3)$ Punkte entsprechend gemein haben, so muss eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten a_{ip} oder den Deter-

minanten $|a_p a_q a_r|$ bestehen, deren Ordnung wir bestimmen wollen. Wir verfahren in ähnlicher Weise wie in Nr. 1.

Es ist hier:

$$v = 3w + 3; \quad r = 2w + 1.$$

Es giebt nun ∞^{n-4w-5} Functionen $\overset{n+2w+1}{F}(\lambda)$, von welchen jede durch $(n-4w-4)$ linear unabhängige unter ihnen darstellbar ist; eine muss eine Summe von $(3w+3)$ Potenzen linearer Functionen von λ sein.

Wir haben die Gleichung:

$$\sum_1^{n-4w-4}{}^p h_p \overset{n+2w+1}{F_p}(\lambda) + \sum_1^{3w+3}{}^q g_q(\lambda-\mu_q)^{n+2w+1} = 0.$$

Polarisirt man diese Gleichung nach den $(3w+3)$ Grössen μ_q, so erhalten wir eine in λ identische Gleichung von der Ordnung:

$$(n + 2w + 1) - (3w + 3) = n - w - 2$$

oder $(n-w-1)$ Gleichungen in den Grössen h_p und den symmetrischen Functionen der μ_q lineare Gleichungen. Eliminiren wir aus ihnen die Grössen h_p, so finden sich

$$t'' = \frac{(n-w-1)(n-w-2)\ldots(n-4w-3)}{1.2\ldots(3w+3)}$$

Gleichungen, welche in den $(n-4w-4)$ reihigen Determinanten der Coefficienten der F_p linear und in den $(3w+4)$ symmetrischen Functionen der μ_q von der Ordnung $(n-4w-4)$ sind. Nun ist die Zahl der Producte und Potenzen $(n-4w-4)^{\text{ter}}$ Ordnung dieser $(3w+4)$ Functionen bekanntlich ebenfalls gleich t'', so dass sie eliminirt werden können. Es folgt eine Gleichung, welche in den $(n-4w-4)$-reihigen Determinanten der Coefficienten der F_p von der Ordnung t'' ist. Nach (§ 2, 1) sind aber diese Determinanten proportional Functionen $(r+1)^{\text{ter}}$ oder $(2w+2)^{\text{ter}}$ Ordnung der dreireihigen Determinanten der a_{ip}. Die gesuchte Bedingungsgleichung ist also in den dreireihigen Determinanten der a_{ip} von der Ordnung:

$$\frac{2(n-w-1)(n-w-2)\ldots(n-4w-3)(w+1)}{1.2\ldots(3w+3)}$$

4) Ist $w = 0$, so hat man es mit der Bedingungsgleichung für einen dreifachen Punkt der R_n zu thun. Sie ist in den $|a_p a_q a_r|$ von der Ordnung: $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$. Hieraus folgt, dass die Fläche der dreifachen Secanten einer rationalen Raumcurve R_n ebenfalls von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ ist. Für die ebene R_4 findet man als Bedingung für einen dreifachen Punkt, dass eine $\overset{5}{F}(\lambda)$ existirt, deren erste Polaren conjugirt sind zu den geraden Schnitten der R_4, denn

jede Function fünfter Ordnung lässt sich als eine Summe von drei Potenzen linearer Functionen darstellen.*)

Für $w = 1$, $n = 7$ muss es eine $\overset{10}{F}(\lambda)$ geben, was aber die Erfüllung zweier Bedingungsgleichungen erfordert. Sind diese aber befriedigt, so giebt es ∞^1 gerade Linien von der gewünschten Lage, welche einen zu R_7 perspectiven Büschel zweiter Ordnung bilden.

5) Es giebt im Allgemeinen ∞^1 zu R_n projective Curven C_w, welche so liegen, dass $(3w + 1)$ entsprechende Punkte beider Curven sich decken. Zwischen den Parametern μ_1 und μ_2 zweier solcher Punkte besteht dann eine Correspondenzgleichung, welche nach dem Vorhergehenden leicht aufgestellt werden kann. Wir finden zwischen $(\mu_1 + \mu_2)$ und $\mu_1 \mu_2$ eine Gleichung von der Ordnung:

$$\frac{(n-w-1)(n-w-2)\dots(n-4w)}{1.2\dots(3w-1)}.$$

Für $w = 1$, folgt als Ordnung dieser Gleichnng:

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2}.$$

Hieraus kann man die Ordnung desjenigen Strahlenbüschels ableiten, dessen Geraden so projectiv auf R_n sind, dass vier entsprechende Punkte sich decken. Sollen nämlich die Punkte μ_1 und μ_2 von R_4 mit dem beliebigen Punkte s auf einer Geraden liegen, so besteht zwischen $(\mu_1 + \mu_2)$ und $(\mu_1 \mu_2)$ eine Gleichung von der Ordnung $(n-1)$. Eliminirt man aus dieser und der obigen μ_2, so erhält man für μ_1 eine Gleichung von der Ordnung: $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$. Die Wurzeln derselben gehören zunächst paarweise zusammen, vier Wurzeln aber liefern dieselbe Gerade, weshalb die gesuchte Ordnung des Büschels gleich ist:

$$k = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3.4}.$$

Für $w = 1$, $n = 5$ folgt $k = 2$, d. h. die Geraden bilden hier den zu R_5 perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Für $w = 1$, $n = 6$ folgt $k = 10$; die Geraden bestehen hier aus den Doppeltangenten der zu R_6 perspectiven Büscheln dritter Ordnung. Für $n = 4$ muss die Bedingung erfüllt sein, dass R_4 einen dreifachen Punkt hat; dann aber sind alle Geraden der Ebene mit R_n in der gewünschten Lage.

Für $w = 2$, $n = 9$ finden wir eine $\overset{12}{F}(\lambda)$, deren dritte Polaren conjugirt sind zu den $\varphi_i(\lambda)$. $\overset{12}{F}(\lambda)$ lässt sich auf ∞^1 Arten durch eine Summe von sieben Potenzen linearer Functionen $(\lambda - \mu_q)$ darstellen. Jedesmal liegen die sieben Punkte μ_q der R_9 auf einem Kegelschnitt.

*) Meyer, a. a. O.

Alle diese Kegelschnitte sind perspectiv zu dem Strahlenbüschel vierter Ordnung, welcher selbst perspectiv zu R_9 ist.

Für $w = 2$, $n = 10$ finden wir ∞^1 Formen $\overset{13}{F}(\lambda)$, von welchen jede auf *eine* Art durch eine Summe von sieben Potenzen $(\lambda - \mu_q)$ darstellbar ist. Jedesmal liegen die sieben Punkte μ_q auf einem Kegelschnitte, welcher perspectiv zu einem der ∞^1 Strahlenbüschel fünfter Ordnung ist, welche R_{10} erzeugen.

§ 5.

In einigen Beispielen möge das Vorstehende etwas näher ausgeführt werden.

1) *Curven zweiter Ordnung.* R_2 ist gegeben in:

$$\varrho x_i = a_{i0}\lambda^2 + a_{i1}\lambda + a_{i2}.$$

Wir haben die zu den geraden Schnitten eines Büschels conjugirte Form:

$$f_1(\lambda) = b_{10}\lambda^2 + 2b_{11}\lambda + b_{12};$$

die zu R_2 perspectiven Strahlenbüschel erster Ordnung haben dann die Gleichungen:

$$b_{10}\lambda + b_{11} = 0 \quad \text{und} \quad b_{11}\lambda + b_{12} = 0$$

oder nach (§ 1, Gl. (6))

$$|za_1a_2|\lambda + |za_0a_2| = 0 \quad \text{und} \quad |za_0a_2|\lambda + |za_0a_1| = 0.$$

2) *Curven dritter Ordnung.* R_3 ist gegeben in:

$$\varrho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}.$$

Für die zu R_3 perspectiven Büschel zweiter Ordnung folgt:

$$\left\| \begin{matrix} b_{10}\lambda + b_{11}, & b_{11}\lambda + b_{12}, & b_{12}\lambda + b_{13} \\ b_{20}\lambda + b_{21}, & b_{21}\lambda + b_{22}, & b_{22}\lambda + b_{23} \end{matrix} \right\| = 0$$

und für den Büschel erster Ordnung:

$$\begin{vmatrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20}\lambda + b_{21}, & b_{21}\lambda + b_{22}, & b_{22}\lambda + b_{23} \end{vmatrix} = 0$$

oder in symbolischer Schreibweise, wenn wir setzen:

$$f_1(\lambda) = \alpha_\lambda^3 = \alpha_\lambda'^3; \quad f_2(\lambda) = \beta_\lambda^3,$$
$$(\alpha\alpha')^2(\alpha\beta)(\alpha'\beta)\beta_\lambda = 0.$$

Die Determinante berechnen wir weiter in:

$$\lambda \begin{vmatrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{19} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{vmatrix} = 0$$

oder nach $\big(\S\ 1,\ \text{Gl. }(6)\big)$

$$\lambda\,\{b_{11}|z a_0 a_3| - b_{12}|z a_1 a_3| + b_{13}|z a_2 a_3|\}$$
$$- b_{10}|z a_0 a_1| + b_{11}|z a_0 a_2| - b_{12}|z a_0 a_3| = 0.$$

§ 6.

Curven vierter Ordnung.

1) Wir haben hier zwei linear unabhängige zu den geraden Schnitten der R_4 conjugirte Formen f_1 und f_2. Die Gleichungen der zu R_4 perspectiven Büschel zweiter Ordnung sind nach (§ 1, 3):

$$\begin{vmatrix} b_{10}\lambda + b_{11}, & b_{11}\lambda + b_{12}, & b_{12}\lambda + b_{13}, & b_{13}\lambda + b_{14} \\ b_{20}\lambda + b_{21}, & b_{21}\lambda + b_{22}, & b_{22}\lambda + b_{23}, & b_{23}\lambda + b_{24} \\ b_{30}\lambda + b_{31}, & b_{31}\lambda + b_{32}, & b_{32}\lambda + b_{33}, & b_{33}\lambda + b_{34} \\ b_{r0} & b_{r1} & b_{r2} & b_{r3} \end{vmatrix} = 0$$

wobei $r = 1$ oder 2 zu setzen ist.

Ist symbolisch:

$$f_r = \alpha_\lambda^4 = \alpha_\lambda'^4;\quad f_q = \beta_\lambda^4;\quad f_3 = \gamma_\lambda^4,$$

so dass $r = \begin{cases}1\\2\end{cases}$, $q = \begin{cases}2\\1\end{cases}$ ist, so haben wir für die Büschel zweiter Ordnung den symbolischen Ausdruck:

$$(\alpha\alpha')^2(\alpha\beta)(\alpha\gamma)(\alpha'\beta)(\alpha'\gamma)(\beta\gamma)\beta_\lambda\gamma_\lambda = 0.$$

In nicht symbolischer Art schreiben wir die Gleichung eines solchen Büschels in:

$$\psi_r(\lambda) = \alpha_r + \beta_r\lambda + \gamma_r\lambda^2 = 0.$$

Hierbei ist:

$$\alpha_r = -b_{r3}|b_1 b_2 b_3| + b_{r2}|b_1 b_2 b_4| - b_{r1}|b_1 b_3 b_4| + b_{r0}|b_2 b_3 b_4|,$$
$$\beta_r = -b_{r3}|b_0 b_2 b_3| - b_{r2}\{|b_0 b_2 b_4| + |b_1 b_2 b_3|\}$$
$$\qquad - b_{r1}\{|b_1 b_2 b_4| + |b_0 b_3 b_4|\} + b_{r0}|b_1 b_3 b_4|,$$
$$\gamma_r = \quad b_{r4}|b_0 b_1 b_2| - b_{r3}|b_0 b_1 b_3| + b_{r2}|b_0 b_2 b_3| + b_{r1}|b_1 b_2 b_3|.$$

Nach $\big(\S\ 1,\ \text{Gl. }(6)\big)$ ersetzen wir nun $|b_0 b_1 b_2|$ durch $|z a_3 a_4|$ etc.

2) Die Functionen $\psi_r(\lambda)$ sind simultane Covarianten der drei Formen $f_k(\lambda)$ $(k=1, 2, 3)$, welche ich bei einer früheren Gelegenheit schon betrachtet habe.*) Die Resultante R_{ψ_1,ψ_2} von ψ_1 und ψ_2 ergiebt sich demnach in:

---

*) Siehe diese Annalen Bd. XXXV, S. 395.

$$R_{\psi_1,\psi_2} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} \\ b_{24} & b_{23} & b_{22} & b_{21} \\ b_{13} & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ b_{23} & b_{22} & b_{21} & b_{20} \end{vmatrix}.$$

Der erste Factor der rechten Seite dieser Gleichung gleich Null gesetzt, giebt die Gleichung der Curve R_4. Der zweite Factor gleich Null gesetzt, giebt die Bedingung dafür, dass f_1 und f_2 die ersten Polaren einer Form fünfter Ordnung sind. In diesem Falle haben ψ_1 und ψ_2 einen gemeinsamen linearen Factor, welcher den zu R_4 perspectiven Strahlenbüschel erster Ordnung darstellt. Ist die Form fünfter Ordnung gegeben in

$$\overset{5}{F}(\lambda) = m_5 + 5m_4\lambda + 10m_3\lambda^2 + 10m_2\lambda^3 + 5m_1\lambda^4 + m_0\lambda^5$$

und setzen wir symbolisch

$$\overset{5}{F}(\lambda) = m_\lambda^5 = m_\lambda'^{\,5} = m_\lambda''^{\,5}; \quad f_3(\lambda) = \gamma_\lambda^4,$$

so ist:

$$(mm')^2\,(mm'')^2\,(m'm'')^2\,(m\gamma)\,(m'\gamma)\,(m''\gamma)\gamma_\lambda = 0$$

die Gleichung des zu R_4 perspectiven Büschels erster Ordnung und ihre linke Seite ist der den Functionen ψ_1 und ψ_2 gemeinsame Factor.

In nicht symbolischer Schreibart erhalten wir nach (§ 1, Gl. (9)) die Gleichung dieses Büschels in:

$$\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit Hülfe von (§ 1, Gl. (6)) noch umzuformen ist.

3) Bleiben wir bei der allgemeinen R_4 stehen, so können wir uns die Gleichung $\psi_r = 0$ in folgender Weise geschrieben denken:

$$\lambda^2 \sum_1^3{}_i\, z_i u_i + \lambda \sum_1^3{}_i\, z_i v_i + \sum_1^3{}_i\, z_i w_i = 0.$$

Die Gleichung $|uvw| = 0$ sagt dann aus, dass der Strahlenbüschel zweiter Ordnung auf einen solchen erster Ordnung sich reducirt. Dies ist auf zwei Arten möglich, erstens indem aus der Gleichung des Büschels ein von z unabhängiger in λ linearer Factor heraustritt und zweitens indem wir es mit einem zweimal zählenden Büschel erster Ordnung zu thun haben. Dem entsprechend hat $|uvw|$ zwei Factoren. Es folgt:

$$\tau|uvw| = \begin{vmatrix} b_{r4} & b_{r3} & b_{r2} \\ b_{r3} & b_{r2} & b_{1} \\ b_{r2} & b_{r1} & b_{r0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} \\ b_{24} & b_{23} & b_{22} & b_{21} \\ b_{13} & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ b_{23} & b_{22} & b_{21} & b_{20} \end{vmatrix}.$$

Verschwindet der zweite Factor des rechts stehenden Productes, so hat R_4 einen dreifachen Punkt. Verschwindet aber der erste Factor, so bilden die Wurzeln von $f_r(\lambda)$ eine harmonische Gruppe und $f_r(\lambda)$ selbst ist die Summe zweier vierter Potenzen. $\psi_r = 0$ ist dann die Gleichung eines doppelt zählenden Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen Mittelpunkt ein Doppelpunkt von R_4 ist.

Es kann der Fall eintreten, dass der erste Factor für die ∞^1 Functionen f_k verschwindet; dann hat R_4 ∞^1 Doppelpunkte oder reducirt sich auf einen zweimal zählenden Kegelschnitt. Die Functionen f_k besitzen einen gemeinsamen quadratischen Factor, welcher conjugirt ist zu den Restfactoren der f_k.

§ 7.

Curven fünfter Ordnung.

1) R_5 sei gegeben durch die Gleichungen:

$$\varrho x_i = \sum_0^5{}_p\, a_{ip}\, \lambda^{5-p}.$$

Es giebt drei linear unabhängige zu den geraden Schnitten der R_5 conjugirte Formen f_1, f_2, f_3. Wir finden somit ∞^2 zu R_5 perspective Strahlenbüschel in folgendem Ausdruck:

$$\psi_r = \begin{vmatrix} b_{10}\lambda + b_{11}, & b_{11}\lambda + b_{12}, & \ldots, & b_{14}\lambda + b_{15} \\ b_{20}\lambda + b_{21}, \ldots & & \ldots & \\ b_{30}\lambda + b_{31}, \ldots & & \ldots & \\ b_{40}\lambda + b_{41}, & & \ldots, & b_{44}\lambda + b_{45} \\ b_{r0} & b_{r1} & \ldots & b_{r4} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist symbolisch:

$$f_r(\lambda) = \alpha_\lambda^5 = \alpha_\lambda'^5; \quad f_q(\lambda) = \beta_\lambda^5; \quad f_p(\lambda) = \gamma_\lambda^5 \quad (r, p, q = 1, 2, 3)$$
$$f_4(\lambda) = \delta_\lambda^4,$$

so ist der symbolische Ausdruck des Büschels dritter Ordnung gegeben in:

$$\psi_r = (\alpha\alpha')^2(\alpha\beta)(\alpha'\beta)(\alpha\gamma)(\alpha'\gamma)(\alpha\delta)(\alpha'\delta)(\beta\gamma)(\gamma\delta)(\delta\beta)\beta_\lambda\gamma_\lambda\delta_\lambda = 0.$$

2) der zu R_5 perspective Büschel zweiter Ordnung kann nun aus den Functionen ψ_r abgeleitet werden. Zwischen den drei $\psi_r (r=1,2,3)$

muss, da entsprechende Strahlen derselben durch einen Punkt gehen, eine von den x_i oder den Coefficienten der $f_4(\lambda)$ unabhängige lineare Relation bestehen, deren Coefficienten Functionen von λ sind.

Es können nämlich die ψ_r auch definirt werden als Functionen, welche folgende Gleichungen befriedigen:

$$\varrho\psi_r = b_{r0}c_4 + b_{r1}c_3 + b_{r2}c_2 + b_{r3}c_1 + b_{r4}c_0,$$
$$\sigma\psi_r = b_{r1}c_4 + b_{r2}c_3 + b_{r3}c_2 + b_{r4}c_1 + b_{r5}c_0$$

und

$$\varrho\lambda + \sigma = 0; \quad r = 1, 2, 3, 4.$$

Durch Elimination der $c_4 \dots c_0$ folgen dann in der That die obigen Ausdrücke für ψ_r. Aus diesen Gleichungen folgt aber auch:

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \psi_2 & b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \psi_3 & b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ -\lambda\psi_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ -\lambda\psi_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ -\lambda\psi_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \end{vmatrix} = 0.$$

Wird hier μ statt λ eingesetzt, so ist die linke Seite der Gleichung durch $(\lambda - \mu)$ theilbar und nach Wegheben dieses Factors erhalten wir die Gleichung des gesuchten Büschels zweiter Ordnung. Der Factor von ψ_1 ist aber:

$$\chi_1 = \begin{vmatrix} b_{10}\mu + b_{11}, & \dots, & b_{14}\mu + b_{15} \\ b_{20} & \dots & b_{24} \\ b_{30} & \dots & b_{34} \\ b_{21} & \dots & b_{25} \\ b_{31} & \dots & b_{35} \end{vmatrix}$$

oder:

$$\chi_r = (\alpha\beta)(\alpha\beta')(\alpha\gamma)(\alpha\gamma')(\beta\beta')^2(\gamma\gamma')^2(\beta\gamma)(\beta\gamma')(\beta'\gamma)(\beta'\gamma')\alpha_\mu$$

und es folgt:

$$\chi_1\psi_1 + \chi_2\psi_2 + \chi_3\psi_3 = (\lambda - \mu)\Psi.$$

$\Psi = 0$ ist dann die Gleichung des zu R_5 perspectiven Büschels zweiter Ordnung.

3) Will man die Gleichung dieses Büschels nach (§ 1, Gl. (9)) direct aufstellen, so hat man zunächst die Form sechster Ordnung zu bilden, deren erste Polaren conjugirt sind den geraden Schnitten der R_5.

Ist:

$$\overset{6}{F}(\lambda) = m_0\lambda^6 + 6m_1\lambda^5 + \dots + m_6,$$

dann gelten die Gleichungen:

$$\sum_0^5 p(-1)^p m_p a_{i,5-p} = 0$$

und

$$\sum_1^6 p(-1)^p m_p a_{i,5-p+1} = 0.$$

Daher ist:

$$\overset{6}{F}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^6 & -6\lambda^5 & 20\lambda^4 & -20\lambda^3 & 15\lambda^2 & -6\lambda & 1 \\ a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & 0 \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} & 0 \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} & 0 \\ 0 & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} \\ 0 & a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} \\ 0 & a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} \end{vmatrix}.$$

Nach (§ 1, Gl. (9)) erhalten wir nun folgende Darstellung des zu R_5 perspectiven Büschels zweiter Ordnung:

$$\Psi = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ b_{30}\lambda + b_{31}, & b_{31}\lambda + b_{32}, & b_{32}\lambda + b_{33}, & b_{33}\lambda + b_{34}, & b_{34}\lambda + b_{35} \\ b_{40}\lambda + b_{41}, & b_{41}\lambda + b_{42}, & b_{42}\lambda + b_{43}, & b_{43}\lambda + b_{44}, & b_{44}\lambda + b_{45} \end{vmatrix} = 0$$

oder symbolisch, wenn $\overset{6}{F}(\lambda) = m_\lambda^6 = m_\lambda'^6 = m_\lambda''^6$

$$\Psi = (mm')^2(m'm'')^2(m''m)^2(m\gamma)(m'\gamma)(m''\gamma)(m\delta)(m'\delta)(m''\delta)(\gamma\delta)\gamma_\lambda\delta_\lambda = 0.$$

4) Dieser Büschel reducirt sich auf einen zweimal zählenden Büschel erster Ordnung, wenn R_5 einen dreifachen Punkt hat; letzterer fällt mit dem Mittelpunkte desselben zusammen. Nach (§ 4, 4) muss dann $\overset{6}{F}(\lambda)$ als eine Summe von drei sechsten Potenzen darstellbar sein d. h. die Katalectikante von $\overset{6}{F}(\lambda)$ muss verschwinden. Schreibt man die Gleichung des Büschels zweiter Ordnung in der Form:

$$\lambda^2 \sum_1^3 i\, z_i u_i + \lambda \sum_1^3 i\, z_i v_i + \sum_1^3 i\, z_i w_i = 0,$$

so folgt:

$$\tau\,|uvw| = \begin{vmatrix} m_6 & m_5 & m_4 & m_3 \\ m_5 & m_4 & m_3 & m_2 \\ m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_0 \end{vmatrix} = \mathrm{E}.$$

$\mathsf{E} = 0$ ist die Bedingung dafür, dass R_5 einen dreifachen Punkt hat und stellt zugleich die Gleichung der Fläche achter Ordnung dar, welche von den dreifachen Secanten einer rationalen Raumcurve fünfter Ordnung gebildet wird.

5) Die ebene Curve R_5 erhält einen vierfachen Punkt oder es giebt einen zu R_5 perspectiven Büschel erster Ordnung, sobald die drei Formen f_1, f_2, f_3 die zweiten Polaren einer Form siebenter Ordnung sind. Es sind zwei Bedingungen zu erfüllen, welche sich in den a_{ip} und den b_{kp} schreiben lassen, wie folgt:

$$\left\| \begin{matrix} a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} & 0 \\ a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} & 0 \\ a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} & 0 \\ 0 & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} & a_{10} \\ 0 & a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} & a_{20} \\ 0 & a_{35} & a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} & a_{30} \end{matrix} \right\| = 0,$$

oder auch:

$$\left\| \begin{matrix} b_{15} & b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} \\ b_{25} & b_{24} & b_{23} & b_{22} & b_{21} \\ b_{35} & b_{34} & b_{33} & b_{32} & b_{31} \\ b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} & b_{10} \\ b_{24} & b_{23} & b_{22} & b_{21} & b_{20} \\ b_{34} & b_{33} & b_{32} & b_{31} & b_{30} \end{matrix} \right\| = 0. \text{*)}$$

§ 8.

Ueber die zu R_n perspectiven Curvenbüschel.

1) Die Geraden eines Strahlenbüschels mit dem Mittelpunkte z schneiden R_n in ∞^1 Punktgruppen, welchen ∞^1 Formen $\varphi_i(\lambda)$ entsprechen. Diesen sind nun conjugirt $(n-1)$ linear unabhängige Functionen $f_k(\lambda)$, welche bekanntlich**) im Allgemeinen die $(n-2)$ten Polaren *einer* bestimmten Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$, $(2n-2)$ter Ordnung in λ sind. Aus der Beziehung $\big(\S\ 1, (5)\big)$:

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}^p (-1)^p a_{ip} b_{n-1, n-p}$$

folgt nun, wenn:

*) Vergl. Journal für Mathem. Bd. 104, S. 55.

**) Vergl. Friedrich: Die rat. Plancurve IV. Ord. im Zusammenhang mit der binären Form 6ter Ord., Giessen 1886 und W. Stahl: Ueber eine neue Darst. der Resultante zweier Formen gleicher Ord. D. Ann. Bd. XXXV, S. 395.

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda) = \sum_0^{2n-2} {}_p \binom{2n-2}{p} M_p \lambda^{2n-2-p},$$

$$\varrho_t z_i = \sum_0^{n} {}_p (-1)^p M_{t+p} a_{i,\,n-p}$$

für

$$t = 0, 1, 2, \ldots, (n-2); \quad i = 1, 2, 3.$$

Wir haben somit $(3n - 3)$ lineare Gleichungen zwischen den $(n - 1)$ Grössen ϱ_t und den $(2n - 1)$ Grössen M_p. Die Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ ist folglich bestimmt und ihre Coefficienten sind Functionen $(n-1)$ter Ordnung der Determinanten $|z a_p a_q|$.

Für jeden Punkt z der Ebene ist die Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Liegt z auf R_n in dem Punkte μ, so wird $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ gleich der Potenz $(\lambda - \mu)^{2n-2}$. Liegt aber z in einem q-fachen Punkte der R_n, welchem die Parameterwerthe $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_q$ zukommen, so ist $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nicht mehr vollständig bestimmt, sondern es ist:

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda) = \sum_1^{q} {}_p k_p (\lambda - \mu_p)^{2n-2}$$

wobei die k_p ganz beliebige Constanten sind.

2) Die Gleichung:

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda) = 0$$

stellt nun eine Curve D_{n-1} von der Ordnung $(n - 1)$ dar, welche R_n in dem Punkte λ in $(2n-2)$ unendlich benachbarten Punkten schneidet, weil für $z_i = \varphi_i(\mu)$ die Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ den Factor $(\lambda - \mu)^{2n-2}$ erhält.

Da die Gleichung:

$$\sum_1^{q} {}_p k_p (\lambda - \mu_p)^{2n-2} = 0$$

bei gegebenem Werthe von λ für die Grössen k_p unendlich viele Lösungen giebt, welche sich aus $(q - 1)$ derselben linear zusammensetzen lassen, so hat die Curve D_{n-1} auch $(q - 1)$ Zweige, welche durch den q-fachen Punkt der R_n gehen. Sind die Doppelpunkte der R_n sämmtlich von einander getrennt, so schneidet D_{n-1} die Curve R_n in den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkten und berührt sie in einem Punkte $(2n - 3)$-fach. Hierdurch sind, da:

$$\frac{2(n-1)(n-2)}{2} + 2n - 2 = n(n-1),$$

alle gemeinsamen Punkte beider Curven erschöpft.

Ersetzt man in $\overset{2n-2}{F}(\lambda) = 0$ die Potenzen λ^r durch die Grössen $(-1)^r s_r$ und setzt dann $z_i = \varphi_i(\mu)$, so reducirt sich die Gleichung auf:

$$\sum_0^{2n-2} \binom{2n-2}{p} s_p \, \mu^{2n-2-p} = \chi(\mu) = 0.$$

D. h. Wird $\overset{2n-2}{F}(\lambda) = 0$ polarisirt nach den $(2n-2)$ Wurzeln einer Gleichung $\chi(\mu) = 0$, so erhält man die Gleichung einer Curve D_{n-1}, welche R_n abgesehen von den Doppelpunkten in Punkten schneidet, deren Parameter gegeben sind durch $\chi(\mu) = 0$.*)

3) Unter den Polaren der $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ befinden sich nun auch alle Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, deren sämmtliche $r$ten Polaren conjugirt sind zu den drei Functionen $\varphi_i(\lambda)$ und zwar gilt folgender Satz, dessen Beweis ich seiner Einfachheit wegen unterdrücke:

Polarisirt man die Function $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nach den $(n-r-2)$ Parametern, welche den durch den Punkt z gehenden Strahlen eines zu R_n perspectiven Strahlenbüschels $(n-r-2)$ter Ordnung zukommen, so erhält man die Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, zu welcher der Strahlenbüschel gehört. Dies gilt auch noch für $r = -1$.

4) Polarisirt man $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nach den n Parametern von Punkten der R_n, welche auf einer Geraden u liegen, so löst sich der Factor (uz) ab, da $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ conjugirt ist zu allen durch z gehenden geraden Schnitten. Es ergiebt sich eine Function $\overset{n-2}{F_1}(\lambda)$ von der Ordnung $(n-2)$ in λ und den Coordinaten z_i.

$$\overset{n-2}{F_1}(\lambda) = 0$$

ist die Gleichung einer Curve D_{n-2}, welche R_n in den Doppelpunkten schneidet und $(n-3)$-fach in dem Punkte λ berührt.

Polarisirt man ferner $\overset{n-2}{F_1}(\lambda) = 0$ nach beliebigen $(n-2)$ Parametern, so erhält man die Gleichung einer Curve D_{n-2}, welche R_n abgesehen von den Doppelpunkten in den $(n-2)$ Punkten schneidet, zu welchen die Parameter gehören. Wir haben somit ∞^{n-2} Curven $(n-2)$ter Ordnung, welche durch die Doppelpunkte der R_n gehen.

Nimmt man $(n-3)$ Punkte auf R_n fest an, so gehen durch sie noch ∞^1 Curven D_{n-2}, welche einen zu R_n *perspectiven Curvenbüschel* $(n-2)$ter Ordnung bilden. Die Grundpunkte des Büschels bestehen

*) Herr Friedrich hat von andern Gesichtspunkten ausgehend die Gleichung von D_{n-1} aufgestellt. a. a. O.

aus den $(n-3)$ festen Punkten und den Doppelpunkten der R_n. Es finden sich somit noch $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Grundpunkte, welche ausserhalb R_n liegen. Zu je $(n-3)$ Punkten der R_n gehört somit eine Gruppe von $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Punkten ausserhalb der R_n.

5) Zwei verschiedene zu R_n perspective Curvenbüschel erzeugen eine Curve $(2n-4)$ter Ordnung, von welcher R_n ein Theil ist. Der andere Theil ist deshalb eine Curve C_{n-4} $(n-4)$ter Ordnung, auf welcher zwei Gruppen von $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Punkten liegen. Da die beiden Curvenbüschel durch lineare Combination ∞^1 Curvenbüschel ergeben, welche dieselbe Curve $(2n-4)$ter Ord. erzeugen und jeder derselben auf R_n $(n-3)$ Grundpunkte besitzt, welche mit den beiden ersten Gruppen von $(n-3)$ Punkten zu einer Involution erster Stufe gehören, so enthält die Curve C_{n-4} einfach unendlich viele Gruppen von je $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Punkten. In dieser Weise gehört zu jeder Involution $(n-3)$ter Ordnung erster Stufe auf R_n eine Curve $(n-4)$ter Ordnung.

6) Für die geometrische Bedeutung dieser Gruppen von $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Punkten ergiebt sich noch Folgendes.

Sind die $(n-3)$ Parameter der auf R_n angenommenen Punkte identisch mit den $(n-3)$ Parametern der durch s gehenden Strahlen eines zu R_n perspectiven Strahlenbüschels $(n-3)$ter Ordnung, so ist die Gleichung von D_{n-2} für jeden Werth des $(n-2)$ten Parameters identisch erfüllt, weil die $(n-3)^{\text{te}}$ Polare von $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nach den ersten Parametern conjugirt ist zu allen geraden Schnitten der R_n.

Die ausserhalb der R_n gelegenen $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ Grundpunkte eines Curvenbüschels $(n-2)$ter Ordnung haben also die Eigenschaft, dass durch jeden derselben $(n-3)$ Strahlen an einen zu R_n perspectiven Büschel $(n-3)$ter Ordnung gehen, deren Parameter übereinstimmen mit denjenigen der auf R_n gewählten Grundpunkte, welche also diese Punkte enthalten.

7) Für die Curve R_5 erhalten wir z. B.

$$\overset{8}{F}(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -8\lambda & 28\lambda^2 & -56\lambda^3 & 70\lambda^4 & -56\lambda^5 & 28\lambda^6 & -8\lambda^7 & \lambda^8 \\ x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

und hieraus:

$$\overset{3}{F}_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -3\lambda & 3\lambda^2 & -\lambda^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 & a_0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_5 \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind die vier letzten Horizontalreihen je dreimal zu schreiben unter Hinzufügen der Indices i $(i = 1, 2, 3)$.

Zu je zwei Punkten der R_5 gehört ein dritter P ausserhalb R_5, welcher mit den beiden ersten und den sechs Doppelpunkten die neun Grundpunkte eines Curvenbüschels dritter Ordnung bilden. Der Punkt P ist nach dem Vorhergehenden der Schnittpunkt der beiden durch die ersten Punkte gehenden und ihnen entsprechenden Strahlen des zu R_n perspectiven Büschels zweiter Ordnung. Fallen die beiden ersten Punkte zusammen, so fällt P auf den von dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung eingehüllten Kegelschnitt.

Wir finden leicht Folgendes, wenn wir die beiden auf R_5 zu wählenden Punkte in einer Geraden mit einem Doppelpunkt der R_5 annehmen. Dem durch fünf Doppelpunkte der R_5 gelegten Kegelschnitt können ∞^1 Dreiecke einbeschrieben werden, welche dem zu R_5 perspectiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung umschrieben sind.

8) Bei der R_6 gehören zu je drei Punkten der Curve drei Punkte ausserhalb derselben, welche mit den ersten und den 10 Doppelpunkten die 16 Grundpunkte eines zu R_6 perspectiven Curvenbüschels vierter Ordnung bilden.

Die Dreiecke, deren Ecken die drei ausserhalb R_n gelegenen Punkte sind, haben folgende Eigenschaften. Je zwei derselben sind einem Kegelschnitt einbeschrieben. Alle Dreiecke sind einem und demselben Kegelschnitt K umschrieben, dessen Tangenten projectiv sind zu der Schaar von Strahlenbüscheln dritter Ordnung, welche perspectiv sind zu R_6. Liegen die drei Punkte auf R_6 so, dass die ihnen entsprechenden Strahlen eines bestimmten dieser Büschel durch einen Punkt gehen, so kann dieser Punkt noch jede beliebige Lage haben und ist Eckpunkt eines der betrachteten Dreiecke. Die diesem Eckpunkte gegenüberstehende Seite des Dreiecks ist aber eine bestimmte Tangente von K.

Fallen die drei Punkte von R_6 zusammen, so sind die Punkte des entsprechenden Dreieckes die Rückkehrpunkte von drei Strahlenbüscheln dritter Ordnung. Der Ort dieser Rückkehrpunkte ist eine Curve sechster Ordnung, welche von einer Tangente t des Kegelschnittes K in drei solchen Punktepaaren geschnitten wird, dass die

durch je ein Paar gelegten Tangenten von K sich treffen in einem Rückkehrpunkte des zu t gehörenden Strahlenbüschels dritter Ordnung.

Die durch neun Doppelpunkte der R_6 gelegte Curve dritter Ordnung L_3 steht mit K in der Beziehung, dass es ∞^1 vollständige Vierseite giebt, welche K umschrieben und L_3 einbeschrieben sind. Ist die Curve R_6 von der vierten Classe, so sind dem Kegelschnitte K die unendlich vielen Dreiecke umschrieben, deren Eckpunkte die Rückkehrpunkte jedes zu R_6 perspectiven Strahlenbüschels dritter Ordnung sind.

Aachen, Januar 1891.

Nachträgliche Bemerkung: In Bd. XXXVIII, S. 303 d. Ann. hat Herr Schumacher einen Satz über die Grundpunkte der zu speciellen R_n perspectiven Curvenbüschel $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung veröffentlicht. Man erkennt leicht, dass derselbe aus den in § 8, (6) dieses Aufsatzes gegebenen allgemeinen Eigenschaften dieser Grundpunkte folgt.

Mai 1891.

Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren F-Reihe.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

§ 1.

Die Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, welche Gauss für die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

angewendet hat, möge in der Art verallgemeinert werden, dass

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m; \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$
$$= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_{n-1}}x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\varrho_1(\varrho_1+1)\varrho_2(\varrho_2+1)\ldots\varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)}x^2 + \cdots + \text{inf.}$$

gesetzt, und der letztere Ausdruck eine *F-Reihe* genannt wird*). Die in der Reihe (1) vorkommenden Constanten zerfallen in die zwei Gruppen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (Zählergruppe) und $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ (Nennergruppe), welche bei der obigen abgekürzten Bezeichnung sowohl von einander als vom Argumente x durch je ein Semicolon getrennt sind. In Bezug auf die positiven ganzen Zahlen m und n setzt man voraus, dass $m \leqq n$ sei. Für $m > n$ wird die Reihe (1) divergent. Der Fall $m = n$ ist vom Verfasser in der Abhandlung „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten"**), und der Fall $m = n - 1$ in der Abhandlung „Ueber eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem end-

---

*) In einer im Jahre 1871 veröffentlichten Arbeit „Ueber Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen n^{ter} Ordnung" (Crelle's Journal, Bd. 73, pag. 135) habe ich für eine hypergeometrische Reihe n^{ter} Ordnung (mit n endlichen singulären Punkten) das Functionszeichen *F mit dem Index n* angewendet (l. c. p. 137). Es ist zu bemerken, dass diese Bezeichnung mit dem hier definirten Symbol

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$

in keiner Beziehung steht.

**) Crelle's Journal, Bd. 102.

lichen singulären Punkte"*) behandelt worden. Im Fall $m = n$ ist die Reihe (1) — die dann als eine hypergeometrische Reihe bezeichnet wird — innerhalb des um den Nullpunkt mit dem Radius 1 gezogenen Kreises convergent, während sie für mod. $x > 1$ divergirt. Ist $m < n$, so stellt die Reihe (1), unter der Voraussetzung, dass keine der Constanten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ gleich Null oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist, eine transcendente ganze Function von x dar. Denn die bekannten Kriterien ergeben, dass die Reihe für jeden endlichen Werth von x convergirt.

Die Reihe (1) genügt, wie im Folgenden gezeigt wird, einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten. Für diese Gleichung ist im Falle $m < n$ der Punkt $x = 0$ der einzige endliche singuläre Werth, während im Falle $m = n$ der singuläre Werth $x = 1$ hinzutritt. Die Zahl m hat auf die Ordnung der Differentialgleichung keinen Einfluss. Die Betrachtung wird auch auf den Fall ausgedehnt, wo die erste Constantengruppe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ganz fehlt, die Zahl m also gleich Null ist. Indem man als Functionszeichen dann den Buchstaben $\mathfrak{F}$ anwendet, definirt man

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$

als die unendliche Reihe

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x) = \tag{2}$$

$$= 1 + \frac{x}{1 \cdot \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n-1}} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \varrho_1(\varrho_1+1)\,\varrho_2(\varrho_2+1) \ldots \varrho_{n-1}(\varrho_{n-1}+1)} + \cdots + \text{inf.}$$

Für dieselbe ergiebt sich ebenfalls eine lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten, worauf in § 5 näher eingegangen wird.

Im Anschluss an die bekannte Bezeichnung des Binomialcoefficienten (r beliebig, k eine positive ganze Zahl)

$$(r)_k = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}, \quad (r)_0 = 1, \tag{3}$$

wird hier (wie in den früheren Arbeiten des Verfassers) der Zähler von $(r)_k$ kurz $[r]_k$ genannt; man setzt also

$$[r]_k = r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1), \quad [r]_0 = 1. \tag{4}$$

Ausserdem wird unter $[r]_k^+$, ebenfalls für ein beliebiges r und ein positives ganzzahliges k, das Product

$$[r]_k^+ = r(r+1)(r+2)\ldots(r+k-1), \quad [r]_0^+ = 1, \tag{5}$$

verstanden. Bei Anwendung dieser Bezeichnung nehmen die Gleichungen (1) und (2) die Gestalt

*) Crelle's Journal, Bd. 108.

$$
(1a)\quad \begin{cases} F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x) \\ = \sum\limits_{k=0}^{k=\infty} \dfrac{[\alpha_1]_k^+ [\alpha_2]_k^+ \cdots [\alpha_m]_k^+}{[1]_k^+ [\varrho_1]_k^+ [\varrho_2]_k^+ \cdots [\varrho_{n-1}]_k^+} x^k, \end{cases}
$$

$$
(2a)\quad \mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{x^k}{[1]_k^+ [\varrho_1]_k^+ [\varrho_2]_k^+ \cdots [\varrho_{n-1}]_k^+}
$$

an.

§ 2.

Es möge die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$
(6)\quad \begin{cases} x^{n-1} \dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3} \dfrac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \\ + \cdots + L_{n-2} x \dfrac{d^2 y}{dx^2} + L_{n-1} \dfrac{dy}{dx} \\ = x^m \dfrac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1} \dfrac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + K_2 x^{m-2} \dfrac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} \\ + \cdots + K_{m-2} x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + K_{m-1} x \dfrac{dy}{dx} + K_m y \end{cases}
$$

betrachtet werden, in welcher $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten, und $m \leqq n$ vorausgesetzt wird. Integrirt man diese Gleichung durch einen Ausdruck von der Form

$$
(7)\qquad y = x^q + c_1 x^{q+1} + \cdots + c_\nu x^{q+\nu} + \cdots,
$$

so findet man die Reihe (1) als eine particuläre Lösung derselben, falls die Constanten $K_1, \ldots, K_m$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, die Constanten $L_1, \ldots, L_{n-1}$ mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch gewisse algebraische Gleichungen verbunden werden.

Durch die Substitution der Potenzreihe (7) entsteht aus (6), da (cfr. (4))

$$
x^{i-1} \frac{d^i y}{dx^i} = [q]_i x^{q-1} + c_1 [q+1]_i x^q + \cdots + c_\nu [q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots
$$

ist, die Gleichung

$$
\sum_{i=n}^{i=1} L_{n-i} \{[q]_i x^{q-1} + c_1 [q+1]_i x^q + \cdots + c_\nu [q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\}
$$

$$
= \sum_{i=m}^{i=0} K_{m-i} \{[q]_i x^q + c_1 [q+1]_i x^{q+1} + \cdots + c_{\nu-1} [q+\nu-1]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\},
$$

woselbst man

$$
K_0 = L_0 = 1
$$

zu nehmen hat.

Indem man den Coefficienten der Potenz x^{q-1}, der niedrigsten vorkommenden Potenz von x, gleich Null setzt, erhält man die den Exponenten q bestimmende Gleichung

$$(8)\quad [q]_n + L_1[q]_{n-1} + L_2[q]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[q]_2 + L_{n-1}[q]_1 = 0.$$

Eine Wurzel der letzteren Gleichung ist $q = 0$. Die übrigen $n-1$ Wurzeln derselben werden, da nach (4) die Factorielle $[q]_i$ gleich dem Producte aus q und $[q-1]_{i-1}$ ist, durch die Gleichung

$$[q-1]_{n-1} + L_1[q-1]_{n-2} + L_2[q-1]_{n-3} + \cdots + L_{n-2}[q-1]_1 + L_{n-1} = 0$$

bestimmt. Man bezeichne die $n-1$ Wurzeln durch

$$-s_1,\ -s_2,\ \cdots,\ -s_{n-1},$$

so dass für einen beliebigen Werth von ξ die Relation

$$(9)\quad \begin{cases} [\xi-1]_{n-1} + L_1[\xi-1]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[\xi-1]_1 + L_{n-1} \\ \qquad = (\xi+s_1)(\xi+s_2)\cdots(\xi+s_{n-1}) \end{cases}$$

besteht.

Durch Vergleichung der Coefficienten von $x^{q+\nu-1}$ auf der linken und der rechten Seite der oben angegebenen Gleichung findet man (für $\nu = 1, 2$ etc.)

$$\{[q+\nu]_n + L_1[q+\nu]_{n-1} + \cdots + L_{n-2}[q+\nu]_2 + L_{n-1}[q+\nu]_1\}\, c_\nu$$
$$= \{[q+\nu-1]_m + K_1[q+\nu-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[q+\nu-1]_1 + K_m\}\, c_{\nu-1}.$$

Der Factor von c_ν ist hierin gleich dem Producte

$$(q+\nu)(q+\nu+s_1)(q+\nu+s_2)\cdots(q+\nu+s_{n-1}).$$

Denn derselbe unterscheidet sich von der linken Seite der Gleichung (8) nur dadurch, dass $q+\nu$ an Stelle von q steht. Man nenne ferner

$$-b_1,\ -b_2,\ \cdots,\ -b_m$$

die Wurzeln der Gleichung m^{ten} Grades in ξ

$$[\xi-1]_m + K_1[\xi-1]_{m-1} + K_2[\xi-1]_{m-2} + \cdots + K_{m-1}[\xi-1]_1 + K_m = 0,$$

woraus (für ein beliebiges ξ) die Identität

$$(10)\quad \begin{cases} [\xi-1]_m + K_1[\xi-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\xi-1]_1 + K_m \\ \qquad = (\xi+b_1)(\xi+b_2)\cdots(\xi+b_m) \end{cases}$$

folgt. Wird die letztere Gleichung für $\xi = q+\nu$ angewendet, so ergiebt sich

$$c_\nu = \frac{(q+\nu+b_1)(q+\nu+b_2)\ldots(q+\nu+b_m)}{(q+\nu)(q+\nu+s_1)(q+\nu+s_2)\ldots(q+\nu+s_{n-1})}\, c_{\nu-1},$$

woselbst q einen der Werthe $0, -s_1, -s_2, \cdots, -s_{n-1}$ bedeutet. Um diejenige particuläre Lösung von (6), die zum Anfangsexponenten $q = 0$ gehört, auch in Bezug auf die Bezeichnung mit der Reihe (1)

übereinstimmen zu lassen, definirt man die Constanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch die Gleichungen

$$(11) \qquad b_1 = \alpha_1 - 1,\ b_2 = \alpha_2 - 1, \cdots, b_m = \alpha_m - 1,$$

$$(12) \qquad s_1 = \varrho_1 - 1,\ s_2 = \varrho_2 - 1, \cdots, s_{n-1} = \varrho_{n-1} - 1,$$

so dass die Werthe

$$0,\ 1-\varrho_1,\ 1-\varrho_2 \ldots, 1-\varrho_{n-1}$$

die Wurzeln der Gleichung (8) sind. Dann ist c_ν mit $c_{\nu-1}$ durch die Relation

$$(13) \quad c_\nu = \frac{(q+\alpha_1+\nu-1)(q+\alpha_2+\nu-1)\ldots(q+\alpha_m+\nu-1)}{(q+\nu)(q+\varrho_1+\nu-1)(q+\varrho_2+\nu-1)\ldots(q+\varrho_{n-1}+\nu-1)}\, c_{\nu-1}$$

verbunden.

Im Fall $q=0$ folgt hieraus

$$c_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1\,.\,\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{n-1}},$$

$$c_\nu = \frac{[\alpha_1]_\nu^+[\alpha_2]_\nu^+\cdots[\alpha_m]_\nu^+}{[1]_\nu^+[\varrho_1]_\nu^+[\varrho_2]_\nu^+\cdots[\varrho_{n-1}]_\nu^+}.$$

Mithin ist die Reihe (1)

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m;\ \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1};\ x)$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (6).

Die übrigen particulären Integrale haben, nach (8) und (12), die Anfangsexponenten $1-\varrho_1,\ 1-\varrho_2, \ldots 1-\varrho_{n-1}$. Ist $q = 1-\varrho_1$, so wird

$$c_\nu = \frac{(\alpha_1-\varrho_1+\nu)(\alpha_2-\varrho_1+\nu)\ldots(\alpha_m-\varrho_1+\nu)}{\nu(\nu+1-\varrho_1)(\varrho_2-\varrho_1+\nu)(\varrho_3-\varrho_1+\nu)\ldots(\varrho_{n-1}-\varrho_1+\nu)}\, c_{\nu-1},$$

und eine analoge Gleichung gilt in den Fällen $q = 1-\varrho_2, \ldots, 1-\varrho_{n-1}$. Die Gleichung (6) hat also die $n-1$ mehrdeutigen Integrale

$$x^{1-\varrho_1} F\begin{pmatrix}\alpha_1-\varrho_1+1,\ \alpha_2-\varrho_1+1, \ldots, \alpha_m-\varrho_1+1; \\ 2-\varrho_1,\ \varrho_2-\varrho_1+1,\ \varrho_3-\varrho_1+1, \ldots, \varrho_{n-1}-\varrho_1+1;\ x\end{pmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{1-\varrho_{n-1}} F\begin{pmatrix}\alpha_1-\varrho_{n-1}+1,\ \alpha_2-\varrho_{n-1}+1, \ldots, \alpha_m-\varrho_{n-1}+1; \\ 2-\varrho_{n-1},\ \varrho_1-\varrho_{n-1}+1,\ \varrho_2-\varrho_{n-1}+1, \ldots, \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1;\ x\end{pmatrix}.$$

Es wird vorausgesetzt, dass keiner der Werthe ϱ_i, $\varrho_i-\varrho_k$ gleich einer positiven oder negativen ganzen Zahl oder gleich Null sei. Dann stellen die obigen n Reihen das vollständige Integral der Gleichung (6) dar.

§ 3.

Die Beziehungen zwischen den Constanten $K_1, \ldots, K_m$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ werden durch (10) und (11), die Beziehungen zwischen $L_1, \ldots, L_{n-1}$ und $\varrho, \ldots, \varrho_{n-1}$ durch (9) und (12) angegeben. Es bleibt übrig, die Werthe $K_1, \ldots, K_m, L_1, \ldots, L_{n-1}$ als Functionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, resp. von $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ herzustellen.

Man bezeichne durch $A_1, A_2, \ldots, A_m$ die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, durch $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ die der Grössen $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$, so dass für ein beliebiges z die Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{cases}(z+\alpha_1)(z+\alpha_2)\ldots(z+\alpha_m)\\ = z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_{m-1}z + A_m,\end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases}(z+\varrho_1)(z+\varrho_2)\ldots(z+\varrho_{n-1})\\ = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + \cdots + R_{n-2}z + R_{n-1}\end{cases}$$

bestehen. Wird in die aus (10) und (11) folgende Identität

$$\begin{aligned}&[\zeta-1]_m + K_1[\zeta-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\zeta-1]_1 + K_m\\ &= (\zeta-1+\alpha_1)(\zeta-1+\alpha_2)\cdots(\zeta-1+\alpha_m)\end{aligned}$$

$\zeta - 1 = z$ substituirt, und die Gleichung (14) berücksichtigt, so hat man

$$(16)\qquad \begin{cases}[z]_m + K_1[z]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[z]_1 + K_m\\ = z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_{m-1}z + A_m.\end{cases}$$

In derselben Weise wird aus (9), (12) und (15) mittelst der Substitution $\zeta - 1 = z$ die Gleichung

$$(17)\qquad \begin{cases}[z]_{n-1} + L_1[z]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[z]_1 + L_{n-1}\\ = z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + \cdots + R_{n-2}z + R_{n-1}\end{cases}$$

abgeleitet. Da die Gleichungen (16) und (17) für jeden Werth von z gelten, so kann man durch Vergleichung entsprechender Ausdrücke der betreffenden linken und rechten Seiten Relationen zwischen den Constanten gewinnen. Allerdings würde die Vergleichung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von z (nachdem man die Factoriellen $[z]_i$ ausmultiplicirt hat) nicht die gesuchten Werthe von $K_1, \ldots, L_1, \ldots$ ergeben, da vielmehr Gleichungen für $A_1, \ldots, R_1, \ldots$, entstehen würden. Um die Ausdrücke von $K_1, \ldots, L_1, \ldots$ als Functionen von $A_1, \ldots, R_1, \ldots$ zu erhalten, entwickelt man in (16) und (17) die rechts stehenden Potenzen von z nach Factoriellen und setzt dann die Coefficienten der einzelnen Factoriellen links und rechts einander gleich.

Zunächst wird aus den genannten Gleichungen, indem man den Werth $z = 0$ benutzt, der Schluss gezogen, dass

$$(18)\qquad \begin{cases}K_m = A_m = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m,\\ L_{n-1} = R_{n-1} = \varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{n-1}\end{cases}$$

ist. Nach Forthebung der Summanden K_m, A_m, L_{n-1}, R_{n-1} lassen sich die Gleichungen (16), (17) durch z dividiren, da nach (4)

$$[z]_i = z[z-1]_{i-1}$$

gesetzt werden kann. Man gelangt auf diese Weise zu den Identitäten

$$(19)\quad \begin{cases} [z-1]_{m-1} + K_1[z-1]_{m-2} + \cdots + K_{m-2}[z-1]_1 + K_{m-1} \\ = z^{m-1} + A_1 z^{m-2} + \cdots + A_{m-2}z + A_{m-1}, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} [z-1]_{n-2} + L_1[z-1]_{n-3} + \cdots + L_{n-3}[z-1]_1 + L_{n-2} \\ = z^{n-2} + R_1 z^{n-3} + \cdots + R_{n-3}z + R_{n-2}. \end{cases}$$

Nun besteht, wenn p eine positive ganze Zahl, und z eine beliebige Grösse ist, die Gleichung

$$(21)\quad z^p = \begin{cases} d_0^{(p)} + d_1^{(p)}[z-1]_1 + d_2^{(p)}[z-1]_2 + \cdots \\ + d_\nu^{(p)}[z-1]_\nu + \cdots + d_{p-1}^{(p)}[z-1]_{p-1} + d_p^{(p)}[z-1]_p, \end{cases}$$

in der $d_0^{(p)}, d_1^{(p)}, \ldots, d_p^{(p)}$ positive ganzzahlige Constanten sind, und $[z-1]_\nu$ nach (4) das Product

$$[z-1]_\nu = (z-1)(z-2)\cdots(z-\nu)$$

bedeutet. Für die Grössen $d_\nu^{(p)}$ hat man, bei Anwendung der Bezeichnungen (3) und (4), den Ausdruck*)

$$(22)\quad d_\nu^{(p)} = \frac{1}{[\nu]_\nu}\left\{\begin{array}{l} (\nu+1)^p - (\nu)_1\nu^p + (\nu)_2(\nu-1)^p - \cdots \\ + (-1)^i(\nu)_i(\nu-i+1)^p + \cdots + (-1)^{\nu-1}(\nu)_{\nu-1}2^p \\ + (-1)^\nu 1^p \end{array}\right\},$$

und es gilt die Gleichung

$$(23)\qquad d_\nu^{(p+1)} = (\nu+1)\, d_\nu^{(p)} + d_{\nu-1}^{(p)},$$

welche die Grundlage weiterer Formeln für diese Constanten bildet**). Die rechte Seite der Gleichung (19) nimmt, wenn man gemäss (21) die Potenzen von z nach den Factoriellen $[z-1]_\nu$ entwickelt, die Gestalt

---

*) Cfr. Th. Clausen, „Beweise der ersten Sätze der numerischen Facultäten", Crelle's Journal, Bd. 7, pag. 234.

**) Man vergleiche § 8 der Abhandlung des Verfassers „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.", Crelle's Journal, Bd. 102, S. 114—123, woselbst auch der Anfang der Tafel der Coefficienten $d_\nu^{(p)}$ angegeben ist. Man bemerke die Gleichungen

$$d_0^{(p)} = 1,\ d_1^{(p)} = 2^p - 1,\ d_p^{(p)} = 1,\ d_{p-1}^{(p)} = \frac{(p+1)p}{1.2},$$

$$d_{p-2}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}\,\frac{3p-2}{4},\quad d_{p-3}^{(p)} = \frac{(p+1)p(p-1)(p-2)}{1.2.3.4}\,\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Für $\nu > p$ ist $d_\nu^{(p)} = 0$.

$$d_{m-1}^{(m-1)}[z-1]_{m-1} + \{d_{m-2}^{(m-1)} + A_1 d_{m-2}^{(m-2)}\}[z-1]_{m-2}$$
$$+ \{d_{m-3}^{(m-1)} + A_1 d_{m-3}^{(m-2)} + A_2 d_{m-3}^{(m-3)}\}[z-1]_{m-3} + \cdots$$
$$+ \{d_{\mu-1}^{(m-1)} + A_1 d_{\mu-1}^{(m-2)} + A_2 d_{\mu-1}^{(m-3)} + \cdots + A_{m-\mu} d_{\mu-1}^{(\mu-1)}\}[z-1]_{\mu-1}$$
$$+ \cdots + \{d_1^{(m-1)} + A_1 d_1^{(m-2)} + \cdots + A_{m-2} d_1^{(1)}\}[z-1]_1$$
$$+ d_0^{(m-1)} + A_1 d_0^{(m-2)} + A_2 d_0^{(m-3)} + \cdots + A_{m-2} d_0^{(1)} + A_{m-1} d_0^{(0)}$$

an. Der Vergleich mit der linken Seite von (19)

$$[z-1]_{m-1} + K_1[z-1]_{m-2} + K_2[z-1]_{m-3} + \cdots$$
$$+ K_{m-\mu}[z-1]_{\mu-1} + \cdots + K_{m-2}[z-1]_1 + K_{m-1}$$

liefert also für $K_1, K_2, \ldots, K_{m-1}$ die Ausdrücke

$$K_1 = d_{m-2}^{(m-2)} A_1 + d_{m-2}^{(m-1)} = A_1 + \frac{m(m-1)}{1.2},$$
$$K_2 = d_{m-3}^{(m-3)} A_2 + d_{m-3}^{(m-2)} A_1 + d_{m-3}^{(m-1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{m-1} = d_0^{(0)} A_{m-1} + d_0^{(1)} A_{m-2} + \cdots + d_0^{(m-2)} A_1 + d_0^{(m-1)}$$
$$= A_{m-1} + A_{m-2} + \cdots + A_2 + A_1 + 1.$$

Man fasst dieses Resultat in die Gleichung

$$(24)\quad \begin{cases} K_{m-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A_{m-i} \\ \quad = d_{\mu-1}^{(\mu-1)} A_{m-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} A_{m-\mu-1} + d_{\mu-1}^{(\mu+1)} A_{m-\mu-2} + \cdots \\ \quad\quad + d_{\mu-1}^{(m-2)} A_1 + d_{\mu-1}^{(m-1)}, \end{cases}$$

die für $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ gilt, zusammen, wobei

$$(25)\qquad A_0 = R_0 = 1$$

gesetzt wird.

Durch das nämliche Verfahren formt man die rechte Seite der Gleichung (20) um. Da dieselbe aus der rechten Seite von (19) erhalten wird, wenn man m durch $n-1$ und $A_1, A_2, \ldots$ durch $R_1, R_2, \ldots$ ersetzt, so folgt aus (24) auch die Gleichung

$$L_{n-\nu-1} = d_{\nu-1}^{(\nu-1)} R_{n-\nu-1} + d_{\nu-1}^{(\nu)} R_{n-\nu-2} + \cdots + d_{\nu-1}^{(n-3)} R_1 + d_{\nu-1}^{(n-2)}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, n-2$. Man substituirt hierin $\nu = \mu - 1$; dann entsteht die Formel

$$(26)\quad \begin{cases} L_{n-\mu} = \sum\limits_{i=\mu}^{i=n} d_{\mu-2}^{(i-2)} R_{n-i} \\ \quad = d_{\mu-2}^{(\mu-2)} R_{n-\mu} + d_{\mu-2}^{(\mu-1)} R_{n-\mu-1} + d_{\mu-2}^{(\mu)} R_{n-\mu-2} + \cdots \\ \quad\quad + d_{\mu-2}^{(n-3)} R_1 + d_{\mu-2}^{(n-2)}, \end{cases}$$

in der die Zahl μ nach einander die Werthe $2, 3, \ldots, n-1$ annimmt. Es ist also

$$L_1 = d_{n-3}^{(n-3)} R_1 + d_{n-3}^{(n-2)} = R_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2},$$

$$L_2 = d_{n-4}^{(n-4)} R_2 + d_{n-4}^{(n-3)} R_1 + d_{n-4}^{(n-2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{n-2} = R_{n-2} + R_{n-3} + \cdots + R_2 + R_1 + 1.$$

Die Gleichungen (18), (24) und (26) geben die gesuchten Ausdrücke für die in (6) vorkommenden Coefficienten $K_1, \ldots, K_m$, $L_1, \ldots, L_{n-1}$ vollständig an.

§ 4.

Es soll für die Grössen K_i, L_i noch je ein zweiter Ausdruck, der dieselben als Functionen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, resp. $\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}$ darstellt, abgeleitet werden.

Nach (11) und (12) bedeuten $b_1, \ldots, b_m$, $s_1, \ldots, s_{n-1}$ die Werthe

$$\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_m - 1, \ \varrho_1 - 1, \ldots, \varrho_{n-1} - 1.$$

Es mögen nun unter $B_1, B_2, \ldots, B_m$ und $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen $b_1, \ldots, b_m$, resp. $s_1, \ldots, s_{n-1}$ verstanden werden, so dass für jeden Werth von ζ

$$\text{(27)} \quad \begin{cases} (\zeta + b_1)(\zeta + b_2) \ldots (\zeta + b_m) \\ = \zeta^m + B_1 \zeta^{m-1} + \cdots + B_{m-1}\zeta + B_m, \end{cases}$$

$$\text{(28)} \quad \begin{cases} (\zeta + s_1)(\zeta + s_2) \ldots (\zeta + s_{n-1}) \\ = \zeta^{n-1} + S_1 \zeta^{n-2} + \cdots + S_{n-2}\zeta + S_{n-1} \end{cases}$$

ist. Durch Combination der letzteren Gleichungen mit (10) und (9) findet man die Identitäten

$$\text{(29)} \quad \begin{cases} [\zeta - 1]_m + K_1[\zeta - 1]_{m-1} + \cdots + K_{m-1}[\zeta - 1]_1 + K_m \\ = \zeta^m + B_1 \zeta^{m-1} + \cdots + B_{m-1}\zeta + B_m, \end{cases}$$

$$\text{(30)} \quad \begin{cases} [\zeta - 1]_{n-1} + L_1[\zeta - 1]_{n-2} + \cdots + L_{n-2}[\zeta - 1]_1 + L_{n-1} \\ = \zeta^{n-1} + S_1 \zeta^{n-2} + \cdots + S_{n-2}\zeta + S_{n-1}. \end{cases}$$

Die rechte Seite von (29) geht aber, wenn die Formel (21) auf ζ^m, ζ^{m-1} etc. angewendet wird, in die Summe

$$\begin{aligned} & d_m^{(m)}[\zeta - 1]_m + \left\{d_{m-1}^{(m)} + B_1 d_{m-1}^{(m-1)}\right\}[\zeta - 1]_{m-1} \\ & \quad + \left\{d_{m-2}^{(m)} + B_1 d_{m-2}^{(m-1)} + B_2 d_{m-2}^{(m-2)}\right\}[\zeta - 1]_{m-2} + \cdots \\ & \quad + \left\{d_\mu^{(m)} + B_1 d_\mu^{(m-1)} + B_2 d_\mu^{(m-2)} + \cdots + B_{m-\mu} d_\mu^{(\mu)}\right\}[\zeta - 1]_\mu \\ & \quad + \cdots + \left\{d_1^{(m)} + B_1 d_1^{(m-1)} + \cdots + B_{m-1} d_1^{(1)}\right\}[\zeta - 1]_1 \\ & \quad + d_0^{(m)} + B_1 d_0^{(m-1)} + B_2 d_0^{(m-2)} + \cdots + B_{m-1} d_0^{(1)} + B_m d_0^{(0)} \end{aligned}$$

über. Da dieselbe für ein beliebiges ζ gleich der Function

$$[\zeta-1]_m + K_1[\zeta-1]_{m-1} + \cdots + K_{m-\mu}[\zeta-1]_\mu + \cdots + K_m$$

ist, so werden für $K_1, K_2, \ldots, K_m$ die Werthe

$$K_1 = d_{m-1}^{(m-1)} B_1 + d_{m-1}^{(m)} = B_1 + \frac{(m+1)m}{1.2},$$

$$K_2 = d_{m-2}^{(m-2)} B_2 + d_{m-2}^{(m-1)} B_1 + d_{m-2}^{(m)}, \quad \text{etc.}$$

erhalten. Indem man

$$B_0 = S_0 = 1 \tag{31}$$

setzt, hat man für $\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} K_{m-\mu} &= \sum_{i=\mu}^{i=m} d_\mu^{(i)} B_{m-i} \\ &= d_\mu^{(\mu)} B_{m-\mu} + d_\mu^{(\mu+1)} B_{m-\mu-1} + \cdots + d_\mu^{(m-1)} B_1 + d_\mu^{(m)}. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Analoge Ausdrücke werden für $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ mit Hülfe der Gleichung (30) abgeleitet, deren rechte Seite sich aus der von (29) ergiebt, wenn man $m, B_1, B_2, \ldots$ durch $n-1, S_1, S_2, \ldots$ ersetzt. Die rechte Seite der Formel (32) stellt, wenn $n-1, \nu, S_1, \ldots$ an die Stelle von $m, \mu, B_1, \ldots$ treten, den Werth von $L_{n-\nu-1}$ dar; d. h. es ist, für $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-2$,

$$L_{n-\nu-1} = d_\nu^{(\nu)} S_{n-\nu-1} + d_\nu^{(\nu+1)} S_{n-\nu-2} + \cdots + d_\nu^{(n-2)} S_1 + d_\nu^{(n-1)}.$$

Wird also $\nu = \mu - 1$ gesetzt, so hat man die Gleichung

$$\left\{\begin{aligned} L_{n-\mu} &= \sum_{i=\mu}^{i=n} d_{\mu-1}^{(i-1)} S_{n-i} \\ &= d_{\mu-1}^{(\mu-1)} S_{n-\mu} + d_{\mu-1}^{(\mu)} S_{n-\mu-1} + \cdots + d_{\mu-1}^{(n-2)} S_1 + d_{\mu-1}^{(n-1)}, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

die für $\mu = 1, 2, \ldots, n-1$ gilt.

Der Vergleich der Formeln (24) und (32) zeigt, dass wenn m beliebige Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ mit m anderen Grössen $b_1, b_2, \ldots, b_m$ durch die Beziehungen

$$\alpha_1 = b_1 + 1, \quad \alpha_2 = b_2 + 1, \ldots, \alpha_m = b_m + 1$$

verbunden sind, und $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$ die oben angegebenen symmetrischen Summen bedeuten, die Gleichung

$$\sum_{i=\mu}^{i=m} d_\mu^{(i)} B_{m-i} = \sum_{i=\mu}^{i=m} d_{\mu-1}^{(i-1)} A_{m-i} \tag{34}$$

besteht, in der μ irgend einer der Werthe $1, 2, \ldots, m-1$ ist*). Im Fall $\mu = 0$ lautet (da $d_0^{(p)} = 1$ ist) die Gleichung (32)

$$K_m = B_m + B_{m-1} + B_{m-2} + \cdots + B_1 + 1.$$

Andererseits hat man nach (18) für K_m den Ausdruck

$$K_m = A_m = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m = (b_1+1)(b_2+1)\cdots(b_m+1),$$

der in der That mit $B_m + B_{m-1} + \cdots + 1$ identisch ist.

§ 5.

Die Reihe (2)

$$\mathfrak{F}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$$

stellt, wie bereits in § 1 angeführt wurde, einen dem Werthe $m = 0$ entsprechenden Grenzfall der Reihe $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}; x)$ dar. Setzt man in die Differentialgleichung (6) für m den Werth Null ein, so reducirt sich die rechte Seite derselben auf den Summandus $K_0 y$. Es möge $K_0 = 1$ genommen werden, was keine Beschränkung ist, da die genannte Constante durch Anwendung einer Substitution $x = \gamma x'$ stets gleich 1 gemacht werden kann. Man betrachtet also die Differentialgleichung

$$(35)\qquad \left\{\begin{array}{c} x^{n-1}\dfrac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + L_2 x^{n-3}\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \\ + \cdots + L_{n-2}x\dfrac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\dfrac{dy}{dx} - y \end{array}\right\} = 0,$$

in der $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}$ Constante bedeuten.

Die Substitution der Potenzreihe

$$(36)\qquad y = x^q + C_1 x^{q+1} + C_2 x^{q+2} + \cdots + C_\nu x^{q+\nu} + \cdots$$

lässt aus (35), wenn unter L_0 wieder der Werth 1 verstanden wird, die Gleichung

$$\sum_{i=n}^{i=1} L_{n-i}\left\{[q]_i x^{q-1} + C_1[q+1]_i x^q + \cdots + C_\nu[q+\nu]_i x^{q+\nu-1} + \cdots\right\}$$
$$-\left\{x^q + C_1 x^{q+1} + \cdots + C_{\nu-1}x^{q+\nu-1} + C_\nu x^{q+\nu} + \cdots\right\} = 0$$

entstehen. Für den Anfangsexponenten q gilt wiederum die Gleichung (8). Einer der Werthe von q ist also gleich Null; die übrigen werden, wie in § 2, durch $-s_1, -s_2, \cdots, -s_{n-1}$ bezeichnet, so dass auch

*) Dieses Resultat ist vom Verfasser auf einem etwas anderen Wege bereits in der obenerwähnten Abh. „Ueber die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe etc.", Crelle's Journal, Bd. 102, abgeleitet worden (Gleichungen (87) und (96), p. 128 und 134, woselbst $n-1$ statt m steht).

hier die Identität (9) gilt. Werden an Stelle von $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ die Constanten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ mittelst der Gleichungen (12)

$$s_1 = \varrho_1 - 1,\ s_2 = \varrho_2 - 1, \ldots, s_{n-1} = \varrho_{n-1} - 1$$

eingeführt, so findet man

$$(37) \qquad C_\nu = \frac{C_{\nu-1}}{(q+\nu)(q+\varrho_1+\nu-1)\ldots(q+\varrho_{n-1}+\nu-1)}.$$

Es sei zunächst $q = 0$. Dann ergiebt sich die Reihe (2) als particuläre Lösung von (35). Durch Benutzung der übrigen Werthe von q,

$$1-\varrho_1,\ 1-\varrho_2, \ldots, 1-\varrho_{n-1},$$

erhält man die $n-1$ mehrdeutigen particulären Integrale der Gleichung (35)

$$x^{1-\varrho_1}\mathfrak{F}(2-\varrho_1, \varrho_2-\varrho_1+1, \varrho_3-\varrho_1+1, \ldots, \varrho_{n-1}-\varrho_1+1; x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{1-\varrho_{n-1}}\mathfrak{F}(2+\varrho_{n-1}, \varrho_1-\varrho_{n-1}+1, \varrho_2-\varrho_{n-1}+1, \ldots, \varrho_{n-2}-\varrho_{n-1}+1; x).$$

Die Ausdrücke, welche in §§ 3 und 4 für $L_1, \ldots, L_{n-1}$ abgeleitet wurden, bleiben auch für die Differentialgleichung (35) in Gültigkeit, da die betreffenden Rechnungen ausschliesslich auf den Gleichungen (9) und (12) beruhen. Die Constanten $L_1, \ldots, L_{n-1}$ werden also durch (26) und (18) oder auch durch (33) als Functionen der Grössen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-1}$ dargestellt.

Kiel, im Januar 1891.

Beziehungen zwischen den linearen Räumen auferlegbaren charakteristischen Bedingungen.

Von

H. Schubert in Hamburg.

Wenn eine eckige Klammer einen linearen Raum bezeichnet, dessen Dimension gleich der in dieser Klammer befindlichen Zahl ist, wenn ferner durch das Bedingungssymbol $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ vorausgesetzt wird, dass ein $[a_p]$, in ihm liegend ein $[a_{p-1}]$, in diesem liegend ein $[a_{p-2}]$ u. s. f. bis $[a_0]$ gegeben ist, und wenn die einem $[p]$ auferlegte Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ bedeutet, dass der $[p]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam habe, so muss:

$$(1) \qquad 0 \gtreqless a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leqq n$$

sein, damit für einen in einem $[n]$ gedachten $[p]$ die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ Sinn hat. Wenn man aber den a alle mit (1) verträglichen ganzzahligen Werthe ertheilt, so erhält man, wie ich schon früher gezeigt habe*), die Gesammtheit der *charakteristischen* Bedingungen des $[p]$, d. h. derjenigen Bedingungen, durch welche allein sich jede sonstige einem $[p]$ auferlegbare Bedingung bei Zugrundelegung eines beliebigen Systems von $[p]$ ausdrücken lässt. Anders ausgedrückt, die endliche Zahl der gemeinsamen Elemente zweier Systeme Σ und Σ' von $[p]$ ist eine Summe von Producten je zweier Factoren (*Gradzahlen*) derartig, dass immer der eine Factor angiebt, wieviel $[p]$ des Σ eine gewisse Bedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ erfüllen, während der andere Factor eine analoge Bedeutung für Σ' hat. Wegen der fundamentalen Rolle, die hiernach in der Theorie der linearen Räume diejenigen Zahlen spielen müssen, welche angeben, wieviel $[p]$ keine andere als charakteristische Bedingungen erfüllen, habe ich schon 1886**) alle Zahlen durch eine Formel zusammengefasst, welche zählen, wieviel $[p]$ ausser der allgemein gelassenen Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ noch h Mal die einfache Bedingung

*) Mitt. der Math. Ges. in Hamburg. Band I, S. 134 bis 155.

**) Acta Mathematica, Band 8, S. 117.

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2,\ \cdots,\ n)$$

erfüllen, wo

$$h = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p - \tfrac{1}{2}p(p+1)$$

sein muss, damit die Frage nach der gesuchten Anzahl x Sinn hat. Für diese Anzahl erhielt ich damals:

$$x = \frac{h!\,D}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots a_p!}, \tag{2}$$

wo D die bekannte Determinante ist, welche gleich dem Producte aller möglichen positiven Differenzen je zweier der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ ist.

Im Folgenden soll nun eine Verallgemeinerung dieses Resultats mitgetheilt werden, die der Verfasser gelegentlich seiner Aufsuchung allgemeiner Anzahlfunctionen für Räume *zweiten* Grades fand. Durch Vergleichung des neuen Resultats mit dem alten durch F. (2) ausgedrückten, erhält man eine interessante Relation zwischen der Determinante D und einer auf Binomialcoefficienten bezüglichen Determinante.

Fügt man der einem $[p]$ auferlegten Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ die schon oben erwähnte einfache Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2, \ldots, n),$$

die wir kurz μ nennen wollen, hinzu, so erhält man*):

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu = (a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_p) + (a_0, a_1-1, a_2, \ldots, a_p) + \cdots + (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p - 1). \tag{3}$$

Fügt man nun diese Bedingung μ immer wieder von Neuem hinzu, so gelangt man schliesslich nach h-maligem Hinzufügen, wenn

$$h = a_0 + a_1 + \cdots + a_p - \tfrac{1}{2}p(p+1)$$

ist, zu einem Vielfachen der Bedingung $(0, 1, 2, \ldots, p)$, die ausdrückt, dass der $[p]$ gegeben ist, und dieses Vielfache ist dann die oben mit (2) bezeichnete Anzahl. Es hat aber das h-malige Hinzufügen der Bedingung μ auch dann Sinn, wenn h kleiner bleibt als die eben angegebene obere Grenze. In diesem Falle ergiebt sich eine Summe von Vielfachen von Bedingungen $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p)$, wo nunmehr:

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_p = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p - h \tag{4}$$

sein muss. Wir können also ansetzen:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu^h = \sum x_b \cdot (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_p), \tag{5}$$

wo die Summirung auf alle Zahlengruppen b zu erstrecken ist, die ausser dem selbstverständlichen:

---

*) Acta Mathem. Band 8, S. 104.

$$0 \leqq b_0 < b_1 < b_2 \cdots < b_p \leqq n$$

auch der Gleichung (4) gehorchen. Unsere Aufgabe besteht nun darin, den Coefficienten x_b allgemein als Function der Zahlen a und b darzustellen.

Zunächst ergiebt sich aus § 5 meiner im 26. Bande der Math. Ann. (S. 44) enthaltenen Abhandlung, dass für $p = 1$ die gesuchte Function x_b eine Differenz zweier Binomialcoefficienten wird, nämlich:

$$(6) \quad h_{a_0 - b_0} - h_{a_0 - b_1} \quad \text{oder} \quad \frac{(a_0 + a_1 - b_0 - b_1)!}{(a_0 - b_0)!\,(a_1 - b_1)!} - \frac{(a_0 + a_1 - b_0 - b_1)!}{(a_0 - b_1)!\,(a_1 - b_0)!}.$$

Von hier aus kann man mit Benutzung meiner im 8. Bande der Acta Mathematica angestellten Erörterungen zu dem Falle $p = 2$ emporsteigen. Dann erhält man eine aus 6 *Tri*nomial-Coefficienten bestehende algebraische Summe, deren Basen sämmtlich h sind und deren Indices die Differenzen zwischen den a und den b sind. Hiernach lag es nahe, x_b allgemein als ein gewisses Vielfaches einer aus Binomialcoefficienten bestehenden Determinante hinzuschreiben, so dass jeder Binomialcoefficient ein a zur Basis und ein b zum Index hat. War aber so die Form der Function x_b erst gefunden, so bot der Beweis keine Schwierigkeit mehr, da es nur darauf ankam, aus der Annahme der Richtigkeit für μ^m die Richtigkeit für μ^{m+1} zu erkennen, was durch Formel (3) gelingt. So erhält man x_b in folgender Gestalt:

$$(7) \qquad x_b = \frac{h!\, b_0!\, b_1!\, b_2! \ldots b_p!}{a_0!\, a_1!\, a_2! \ldots a_p!} \begin{vmatrix} (a_0)_{b_0}, & (a_0)_{b_1}, & \cdots, & (a_0)_{b_p} \\ (a_1)_{b_0}, & (a_1)_{b_1}, & \cdots, & (a_1)_{b_p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (a_p)_{b_0}, & (a_p)_{b_1}, & \cdots, & (a_p)_{b_p} \end{vmatrix},$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(8) \qquad x_b = h! \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_0 - b_0)!}, & \frac{1}{(a_0 - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_0 - b_p)!} \\ \frac{1}{(a_1 - b_0)!}, & \frac{1}{(a_1 - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_1 - b_p)!} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \frac{1}{(a_p - b_0)!}, & \frac{1}{(a_p - b_1)!}, & \cdots, & \frac{1}{(a_p - b_p)!} \end{vmatrix}.$$

Löst man diese Determinante in ihre $(p + 1)!$ Glieder auf, so erhält man x_b als eine algebraische Summe von gewissen Polynomialcoeffi-

cienten, die zur h^{ten} Potenz einer $(p+1)$-gliedrigen Summe gehören. Beispielsweise sei $p=2$, $a_0=2$, $a_1=6$, $a_2=7$, $h=6$. Dann kommt für $(2, 6, 7)\mu^6$, d. h. für die Bedingung, dass eine Ebene, in einem 7-dimensionalen linearen Raume liegend, eine gegebene Ebene in einem Punkte schneidet, und ausserdem 6 gegebene 4-dimensionale lineare Räume in je einem Punkte schneidet, eine Summe von Vielfachen der Bedingungen (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4) und für diese Vielfachen ergiebt sich aus (7) oder (8) beziehungsweise 0, 14, 45, 30, 19, 30, 5. Durch sechsmalige Anwendung der Formel (3) findet man diese Coefficienten bestätigt, nämlich:

$$\begin{aligned}
(2,6,7)\mu^1 &= (1,6,7) + (2,5,7),\\
(2,6,7)\mu^2 &= (0,6,7) + 2(1,5,7) + (2,4,7) + (2,5,6),\\
(2,6,7)\mu^3 &= 3(0,5,7) + 3(1,4,7) + 3(1,5,6) + (2,3,7)\\
&\quad + 2(2,4,6),\\
(2,6,7)\mu^4 &= 6(0,4,7) + 6(0,5,6) + 4(1,3,7) + 8(1,4,6)\\
&\quad + 3(2,3,6) + 2(2,4,5),\\
(2,6,7)\mu^5 &= 10(0,3,7) + 20(0,4,6) + 4(1,2,7) + 15(1,3,6)\\
&\quad + 10(1,4,5) + 5(2,3,5),\\
(2,6,7)\mu^6 &= 14(0,2,7) + 45(0,3,6) + 30(0,4,5) + 19(1,2,6)\\
&\quad + 30(1,3,5) + 5(2,3,4).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch übrig, die Formel (7) mit der früher gefundenen Formel (2) zu vergleichen. Behufs dessen haben wir in (7) speciell

$$b_0=0,\quad b_1=1,\quad b_2=2,\ \cdots,\ b_p=p$$

anzunehmen, und das Ergebniss gleich $\frac{h!\,D}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots a_p!}$ zu setzen. Auf diese Weise erhalten wir, da D die aus den 0^{ten} bis p^{ten} Potenzen der Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_p$ gebildete Determinante ist, die folgende interessante Relation:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} (a_0)^0, & (a_0)^1, & \cdots, & (a_0)^p\\ (a_1)^0, & (a_1)^1, & \cdots, & (a_1)^p\\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (a_p)^0, & (a_p)^1, & \cdots, & (a_p)^p \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a_0)_0, & (a_0)_1, & \cdots, & (a_0)_p\\ (a_1)_0, & (a_1)_1, & \cdots, & (a_1)_p\\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ (a_p)_0, & (a_p)_1, & \cdots, & (a_p)_p \end{vmatrix} = 0!\,1!\,2!\,3!\cdots p!.$$

Diese Relation zwischen den 0^{ten} bis p^{ten} Potenzen von $p+1$ Zahlen und den Binomialcoefficienten derselben Zahlen mit den Indices 0 bis p, findet sich auch, wie mir Herr **Busche** in Bergedorf mittheilte, in Baltzer's Determinanten (5. Auflage, § 10, K. 3, S. 87) und wird dort aus einer von **Borchardt** in den Abh. der Berl. Academie (1860, S. 4) herrührenden Interpolationsformel abgeleitet.

Hamburg, am 5. März 1891.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowsky'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft. Leipzig, im März 1891.)

Für das Jahr 1894.

Die von Leverrier ausgeführte Bestimmung der säcularen Störungen der Bahnen, namentlich der inneren Planeten, hat bekanntlich unbefriedigende Resultate ergeben, insofern die Glieder der zweiten Näherung, welche nur ungenau und unter Umständen selbst grösser als die Glieder der ersten Näherung gefunden wurden, sich für die Berechnung der Störungen als unbrauchbar erwiesen haben. Dieses unbefriedigende Ergebniss, das in seinen weiteren Folgen mit gewissen Anomalien in der Bewegung des Mercur, beziehungsweise seines Perihels zusammenzuhängen scheint, ist Leverrier*) geneigt, der bisher befolgten Behandlungsweise zuzuschreiben, bei welcher in erster Näherung die Differentialgleichungen des Problems als linear betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht demgemäss

> *eine neue Bestimmung der säcularen Störungen wenigstens der Bahnen von Mercur, Venus, Erde und Mars unter Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung*

mittelst einer einwurfsfreien Methode, bei welcher die von Leverrier angetroffene Schwierigkeit, welche gegen die Brauchbarkeit der erhaltenen Resultate sprechen würde, als beseitigt betrachtet werden kann. — Preis 1000 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besondern Falle ausdrücklich den Gebrauch einer andern Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Umschlag begleitet sein, welcher auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Jede

*) Recherches astronomiques, Chap. IX, art. 16 und Additions III, S. 51.

Bewerbungsschrift muss auf dem Titelblatte die Angabe einer Adresse enthalten, an welche die Arbeit für den Fall, dass sie nicht preiswürdig befunden würde, zurückzusenden ist. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht. Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft.

Berichtigungen.

S. 27, Z. 3 v. u. lies $a_{21}x_2$ statt $x_{21}a_2$.
„ 29 „ 11 v. o. „ $\Delta\Delta'$ statt $\Delta\Delta$.
„ 38 „ 17 v. o. „ $\Phi = cu_\xi v_\eta$, $\psi_g = cu_\eta f(\xi x)$.
„ 44 „ 5 v. o. „ σ statt σ'.
„ 44 „ 30 v. o. „ $f(x\xi)$ statt $f(xy)$.
„ 47 „ 9 v. o. „ $(uv)_x$ statt (uv_x).
„ 48 „ 13 v. o. „ $A_2 f$ statt $A_2 f_2$.
„ 48 „ 23 v. o. hinter „beliebiges n“ ist einzuschieben: „welche u. A. bei Herrn Frobenius, Journal f. Math. 1878 Bd. 84 S. 11 f. hergeleitet ist“.
„ 48 „ 25 v. o. statt „gefunden und nebst seinem Beweise“ lies: „weiter verfolgt und seinen Beweis“.
„ 226 „ 9 v. o. ist die Zahl (7) als Nummer der Gleichung hinzuzufügen.
„ 241 „ 11 v. o. lies $y = e^{-\frac{1}{2}a_2' x'}\eta$ statt $y = e^{-\frac{1}{2}a_2' x'}$.

Fig. 1.

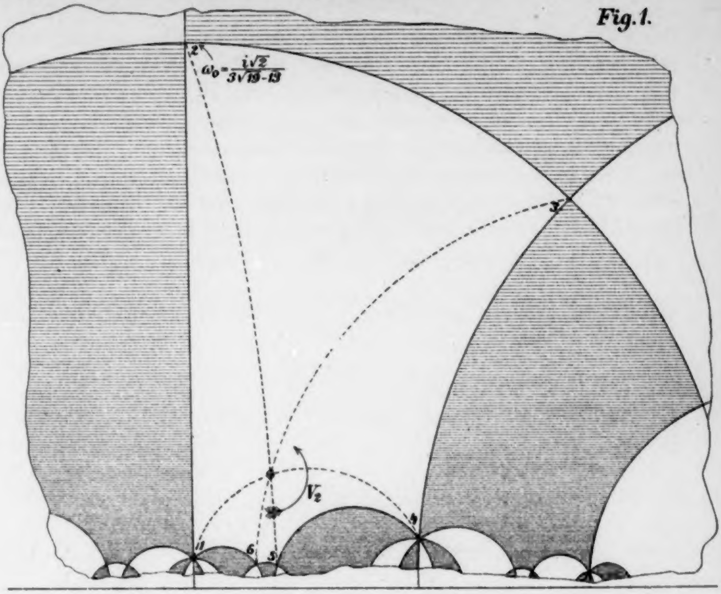

2
$\omega_0 = \frac{i\sqrt{2}}{3\sqrt{19}-13}$
3
V_2
11
6
5
4

Fig. 2.


2
$\omega_0 = \frac{i\sqrt{2}}{5-\sqrt{23}}$
V_2
$\omega_0 = i$
1
6
5
4
3